МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.3

Дейнека О. Ю.[1] асистент, Сяський А. О.[2], д.т.н., професор
(Національний університет водного господарства та природокористування[1], м. Рівне; Рівненський державний гуманітарний університет[2], м. Рівне)

НАПРУЖЕНА ПОСАДКА ЗАМКНЕНОГО КРУГОВОГО СТРИЖНЯ В КРУГОВИЙ ОТВІР НЕСКІНЧЕННОЇ ОРТОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

Знайдено розв'язок задачі про напружену посадку кругового кільця сталого прямокутного поперечного перерізу в круговий отвір нескінченної ортотропної пластинки, яка перебуває в умовах однорідного напруженого стану на нескінченності. Кільце моделюється замкненим криволінійним брусом, лінія контакту якого з контуром пластинки не співпадає з його геометричною віссю. З урахуванням гіпотези плоских перерізів і відсутності тиску між поздовжніми волокнами бруса, побудовано інтегро-диференціальне рівняння з ядром Гільберта для визначення контактних зусиль. Розв'язок задачі встановлюється методом скінченних тригонометричних сум. Визначено мінімальний натяг, за якого розмикання ділянки контакту між пластинкою і кільцем відбувається у двох точках.
***Ключові слова*: ребро жорсткості, напружена посадка, ортотропна пластина, круговий стрижень, внутрішні зусилля, нормальні напруження.**

Вступ. У техніці широко використовуються пресові з'єднання, в яких за рахунок натягу забезпечується відносна нерухомість циліндричних тіл. Визначальним фактором їх міцності та довговічності є концентрація напружень у з'єднаннях з натягом. Огляд досліджень напруженого стану в масивних циліндричних тілах кругової форми виконано в роботах [1; 2]. Задачі про запресовку замкнених тонких пружних стрижнів у криволінійний отвір нескінченної ізотропної пластинки з використанням особливих крайових умов у інтегральній формі розглянуті в [3; 4].

Для розрахунку напруженого стану в замкненому криволінійному кільці у роботі [5] запропоновано використовувати метод сил [6]. У даній статті такий підхід використано для побудови розв'язку задачі про запресовку пружного кільця прямокутного поперечного перерізу в круговий отвір нескінченної ортотропної пластинки.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ортотропну пластинку товщиною $2h$ з круговим отвором радіусом $\rho_1 = 1$, в який з на-

тягом $\Delta > 0$ запресоване кругове кільце сталого прямокутного перерізу висотою $2h_0$, шириною 2η із зовнішнім радіусом $\rho_0 = \rho_1 + \Delta$. Вважаємо, що величина Δ має порядок пружних зміщень. Спільна серединна площина пластинки та кільця віднесені до прямокутної (x, y) і полярної (ρ, λ) систем відліку з початком у центрі отвору. Головні напрями ортотропії матеріалу пластинки співпадають з напрямами координатних осей.

Пружна система «пластинка – кільце» перебуває в умовах узагальненого плоского напруженого стану, створеного рівномірно розподіленими зусиллями p і q, які діють у головних напрямках ортотропії і прикладені на нескінченності. Зовнішнє навантаження на кільце відсутнє.

Розв'язок задачі полягає у визначенні: контактних зусиль між пластинкою і кільцем; мінімального натягу $\Delta_{\min}$, за якого відбувається розмикання зони контакту в двох точках; компонент напруженого стану в кільці та дослідженні впливу на шукані величини ортотропії матеріалу пластинки.

Умовно відділяючи пластинку від кільця, замінюючи дію одного тіла на інше нормальними T_ρ і дотичними $S_{\rho\lambda}$ контактними зусиллями, приходимо до першої основної задачі для нескінченної ортотропної пластинки з круговим отвором і круглого пружного кільця.

Основні рівняння задачі. Пластинка перебуває під дією зовнішнього навантаження на нескінченності та контактних зусиль на контурі отвору γ. Її напружено-деформований стан на γ характеризується співвідношеннями [7]

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{2E_x h}\Bigg[c_1 T_\rho(\lambda) + \frac{c_2}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)dt - \frac{c_2}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t) ctg\,\frac{\lambda - t}{2}\,dt -$$

$$-\frac{c_3}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t) ctg\,\frac{\lambda - t}{2}\,dt + p\left[\sin^2\lambda - \beta_1\beta_2\cos^2\lambda + (\beta_1 + \beta_2)\sin^2\lambda\right] +$$

$$+ q\left[-\sin^2\lambda + (\beta_1 + \beta_2)\cos^2\lambda + \beta_1\beta_2\cos^2\lambda\right]\beta_1\beta_2\Bigg];$$

$$V = \frac{1}{2E_x h}\Bigg[c_1 S_{\rho\lambda}(\lambda) - \frac{c_3}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)dt + \frac{c_3}{\pi}\oint_\gamma S_{\rho\lambda}(t) ctg\,\frac{\lambda - t}{2}\,dt + \frac{c_4}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t) ctg\,\frac{\lambda - t}{2}\,dt + \tag{1}$$

$$+ 0{,}5\left(p - q\beta_1\beta_2\right)\left(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_1\beta_2\right)\sin 2\lambda\Bigg];$$

$$k\ (\lambda) = \frac{1}{\rho_1}\left(1 - \varepsilon_\lambda + \frac{dV}{d\lambda}\right),$$

в яких введено позначення: ε_λ, V – відносне видовження контуру γ і кут повороту нормалі до нього; $k(\lambda)$ – кривина контуру γ внаслідок деформації пластинки; E_x, ν_x – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки в напрямку осі Ox; β_1, β_2 – корені характеристичного рівняння [8]; $c_2 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left[-1+(1-\beta_1\beta_2)\cos^2\lambda\right]$; $c_1 = \beta_1\beta_2 - \nu_x$; $c_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{4}(1-\beta_1\beta_2)\sin 2\lambda$; $c_4 = \frac{\beta_1+\beta_2}{2}\left[-1+(1-\beta_1\beta_2)\sin^2\lambda\right]$.

Пружне кільце моделюється замкненим криволінійним брусом, лінія контакту якого з контуром пластинки не співпадає з його геометричною віссю. Брус перебуває у рівновазі лише під дією контактних зусиль, які передаються до нього від пластинки.

Оскільки, задача розрахунку замкненого кільця статично невизначена, то його умовно розріжемо при $\lambda = 0$, а в центрі розрізу прикладемо зосереджену поздовжню силу N_0 і згинальний момент L_b^0. Через симетрію задачі відносно осі Ox поперечна сила в розглядуваному перерізі відсутня. Тепер задача розрахунку кільця стала статично визначеною, але для встановлення сталих N_0 і L_b^0 необхідно формулювати додаткові умови.

Компоненти напруженого стану розімкненого кільця (поперечна Q і поздовжня N сили та згинальний момент L_b), які віднесені до його осі, визначаємо з умов рівноваги частини кільця на проміжку $[0; \lambda]$

$$\begin{aligned} N &= N_0\cos\lambda + f_1\cos\lambda + f_2\sin\lambda; \\ Q &= N_0\sin\lambda + f_1\sin\lambda - f_2\cos\lambda; \\ L_b &= L_b^0 - R(N - N_0), \end{aligned} \tag{2}$$

де R – радіус осі кільця;

$$f_1 + f_2 = i\rho_0\int_0^\lambda [T_\rho(t) + iS_{\rho\lambda}(t)]e^{it}dt. \tag{3}$$

Формули для визначення деформацій крайнього поздовжнього волокна кільця, яке контактує з пластинкою, мають вигляд [5]

$$\begin{aligned} &\frac{dV^c}{d\lambda} = \frac{RL_b}{E_0J} + \frac{N}{E_0F}; \quad \varepsilon_\lambda^c = \frac{N}{E_0F} + \frac{\rho_0 - r_0}{\rho_0}\frac{RL_b}{E_0J}; \\ &k^c(\lambda) = \frac{1}{\rho_0}\left(1 - \varepsilon_\lambda^c + \frac{dV^c}{d\lambda}\right) = \frac{1}{\rho_0}\left(1 + \frac{r_0RL_b}{\rho_0E_0J}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Тут E_0 – модуль пружності матеріалу кільця; F – площа поперечного перерізу матеріалу кільця; E_0F – жорсткість кільця на розтяг(стиск);

E_0J – жорсткість кільця на згин; r_0 – радіус кривини нейтрального для чистого згину волокна кільця. Величини, відзначені верхнім індексом "*c*", для кільця мають той самий зміст, що і величини без індексу для пластинки.

Співвідношення (4) отримані з урахуванням гіпотези плоских перерізів і відсутності тиску між поздовжніми волокнами кільця.

Для знаходження сталої N_0 використаємо умову рівноваги половинки кільця ($\lambda \in [0; \pi]$)

$$\rho_0 \int_0^{\pi} T_\rho(\lambda) \sin \lambda d\lambda = 2N_0 . \tag{5}$$

На підставі методу сил, рівняння для визначення L_b^0 одержимо з умови, що кут повороту перерізу $\lambda = 0$ внаслідок деформації дорівнює нулю [6]

$$R\int_0^{\pi} \left(\frac{L_p}{E_0 J} + \frac{N_p}{E_0 FR} \right) \overline{L}_1 d\lambda = 0 , \tag{6}$$

де $\overline{L}_1 = 1$ – момент, прикладений в перерізі $\lambda = 0$ і співнапрямлений з L_b^0.

Згинальний момент L_b і поперечна сила N_p від зовнішнього навантаження розімкненого кільця визначаються за формулами

$$L_p = L_b^0 + R(N_0 - N) = L_b; \qquad N_p = N, \tag{7}$$

з урахуванням яких із співвідношення (6) знаходимо

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{L_b}{E_0 J} + \frac{N}{E_0 FR} \right) d\lambda = 0 . \tag{8}$$

Граничні умови на ділянці контакту пластинки і кільця формулюємо у вигляді рівності їх кривин. При відсутності тертя ці умови можна записати так

$$k^c(\lambda) = k\ (\lambda); \quad S_{\rho\lambda}, \quad \lambda \in [0; 2\pi] . \tag{9}$$

Підставляючи в (9) співвідношення (1), (4) після певних перетворень приходимо до сингулярного інтегро-диференціального рівняння з ядром Гільберта для визначення контактного зусилля T_ρ

$$\frac{2E_x h}{\rho_0} \left(\frac{r_0 R L_b}{E_0 J} - \Delta \right) = -c_1 T_\rho(\lambda) - \frac{c_2}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t) dt + \frac{c_3}{\pi} \oint_\gamma T_\rho(t) ctg \frac{\lambda - t}{2} dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\lambda} \left(c_3 \oint_\gamma T_\rho(t) dt - 2c_4 \oint_\gamma T_\rho(t) ctg \frac{\lambda - t}{2} dt \right) +$$

$$+ \frac{p}{2} \left(-1 - \beta_1 - \beta_2 + \beta_1 \beta_2 + 3(1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2) \cos 2\lambda \right) +$$

$$+\frac{q}{2}\beta_1\beta_2(1-\beta_1-\beta_2-\beta_1\beta_2-3(1+\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos 2\lambda),\quad \lambda\in[0;\,2\pi]. \qquad (10)$$

При цьому вважаємо $\Delta=\rho_0-\rho_1>0;\ \rho_0\approx\rho_1=1$.

Разом з умовами (5), (8) рівняння (10) визначає математичну модель розглядуваної задачі.

Побудова розв'язку задачі. Враховуючи симетрію задачі відносно координатних осей, контактне зусилля подамо у вигляді скінченної тригонометричної суми

$$T_\rho(\lambda)=\frac{A_0}{2}+\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\cos(2m\lambda). \qquad (11)$$

Підставивши (3) в (2) з урахуванням (11), знаходимо

$$N=\rho_0\left[\frac{A_0}{2}(1-\cos\lambda)-\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\frac{\cos(2m\lambda)-\cos\lambda}{4m^2-1}\right]+N_0\cos\lambda;$$

$$Q=\rho_0\left[-\frac{A_0}{2}\sin\lambda-\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\frac{2m\sin(2m\lambda)-\sin\lambda}{4m^2-1}\right]+N_0\sin\lambda; \qquad (12)$$

$$L_b=L_b^0-R(N-N_0).$$

На підставі (11) співвідношення (5), (8) перетворимо до вигляду

$$N_0=\rho_0\left[\frac{A_0}{2}-\sum_{m=1}^{M}\frac{A_{2m}}{4m^2-1}\right];\quad L_b^0+RN_0+\frac{A_0\rho_0}{2}\left[\frac{J}{FR}-R\right]=0. \qquad (13)$$

На підставі (13), вирази для внутрішніх силових і моментних факторів у кільці запишуться так:

$$N=\rho_0\left[\frac{A_0}{2}-\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\frac{\cos(2m\lambda)}{4m^2-1}\right];\quad Q=\rho_0\left[-2\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\frac{m\sin(2m\lambda)}{4m^2-1}\right];$$

$$L_b=L_b^0-R(N-N_0). \qquad (14)$$

Використовуючи в (10) квадратурні формули для регулярних і сингулярних інтегралів

$$\frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)dt=A_0;\quad \frac{1}{\pi}\oint_\gamma T_\rho(t)ctg\,\frac{\lambda-t}{2}\,dt=2\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\sin 2m\lambda$$

та співвідношення (13), (14), одержимо математичну модель задачі у вигляді системи одного функціонального і двох алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $A_0,\ A_{2m}(1\le m\le M),\ N_0,\ L_b^0$

$$\frac{4E_xh}{\rho_0}\left\{\frac{r_0R}{E_0J}\left(-R\rho_0\left[\frac{A_0}{2}-\sum_{m=1}^{M}\frac{A_{2m}\cos(2m\lambda)}{4m^2-1}\right]+RN_0+L_b^0\right)-\Delta\right\}=$$

$$=(\nu_x-\beta_1\beta_2+0{,}5(\beta_1+\beta_2)(1+\beta_1\beta_2)-1{,}5(\beta_1+\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)\cos 2\lambda)A_0+$$

$$+3(\beta_1+\beta_2)(1-\beta_1\beta_2)\sin 2\lambda\sum_{m=1}^{M}A_{2m}\sin 2m\lambda-$$

$$-2\sum_{m=1}^{M} A_{2m}((\beta_1+\beta_2)(1+\beta_1\beta_2+(1-\beta_1\beta_2)\cos 2\lambda)m+\beta_1\beta_2-\nu_x)\cos 2m\lambda+$$
$$+p(-1-\beta_1-\beta_2+\beta_1\beta_2+3(1+\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos 2\lambda)+$$
$$+q\beta_1\beta_2(1-\beta_1-\beta_2-\beta_1\beta_2-3(1+\beta_1+\beta_2+\beta_1\beta_2)\cos 2\lambda),\ \lambda\in[0;\pi/2];$$
$$N_0=\rho_0\left[\frac{A_0}{2}-\sum_{m=1}^{M}\frac{A_{2m}}{4m^2-1}\right];\quad L_b^0+RN_0+\frac{A_0\rho_0}{2}\left[\frac{J}{FR}-R\right]=0. \qquad (15)$$

Розглянемо часткові випадки задачі:

– при $\beta_1=\beta_2=1$ система (15) визначає напружений стан ізотропної пластинки з круговим отвором, в який запресоване пружне кільце [4];

– якщо в системі (15) вважати $p=q=0$, то вона визначає розв'язок задачі про напружену посадку пружного кільця в круговий отвір нескінченної ортотропної пластинки при відсутності зовнішнього навантаження;

– при $\sqrt{E_xE_y}/E_0=0$ одержимо задачу про запресовку в круговий отвір ортотропної пластинки абсолютно жорсткого кільця (диска) [7].

Наближений розв'язок задачі. Точний розв'язок системи (15) знайти не вдається. Для її наближеного розв'язання використаємо метод колокації. Порівнюючи у функціональному рівнянні значення лівих і правих частин у точках $\lambda_k=\frac{\pi k}{2(M+1)}$ $(k=\overline{0,M})$ приходимо до системи $M+3$ лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення сталих $A_0,\ A_{2m}(1\le m\le M),\ N_0,\ L_b^0$.

Якщо ці сталі стануть відомі, то контактні зусилля між пластинкою і кільцем визначимо за формулою (11), а зусилля і моменти в кільці – зі співвідношень (14).

Для встановлення мінімального натягу $\Delta_{\min}$, за якого на ділянці $\lambda\in[0;\pi/2]$ можливе розмикання контакту лише в одній точці $\lambda=\lambda_*$, до системи (15) необхідно додати умову рівності нулю в цій точці контактного тиску $T_\rho(\lambda_*)=0$.

На практиці точне визначення кута λ_*, пов'язане зі значними математичними труднощами, тому для наближеного визначення $\Delta_{\min}$ використано метод дихотомії [9], яким досліджено вплив ортотропії матеріалу пластинки на напружений стан в пластинці та кільці.

Результати числового розрахунку величин $T_\rho(\lambda)/p,\ N(\lambda)/p,\ Q(\lambda)/p,\ L_b(\lambda)/p$ при $h/h_0=0{,}75;\ \eta/\rho_0=0{,}02;$ $\sqrt{E_xE_y}/E_0=5;\ q/p=3$ наведені на рисунку. Штрихові лінії побудовані для матеріалу скло – епоксид $(\beta_1=2{,}2712;\ \beta_2=0{,}7626;\ \nu_x=0{,}25;$

$E_x/E_y = 3)$; штрих-пунктирні – для матеріалу графіт – епоксид ($\beta_1 = 6{,}9992; \beta_2 = 0{,}7144;\ \nu_x = 0{,}25;\ E_x/E_y = 25)$; суцільні – для ізотропного матеріалу ($\beta_1 = 1;\ \beta_2 = 1;\ \nu = 0{,}3;\ E_x / E_y = 1)$.

Значення мінімального натягу $2E_x h\Delta_{\min} / p$, за якого розмикання відбувається у точках $\lambda_* = \pm\pi/2$, наведені в таблиці.

Таблиця

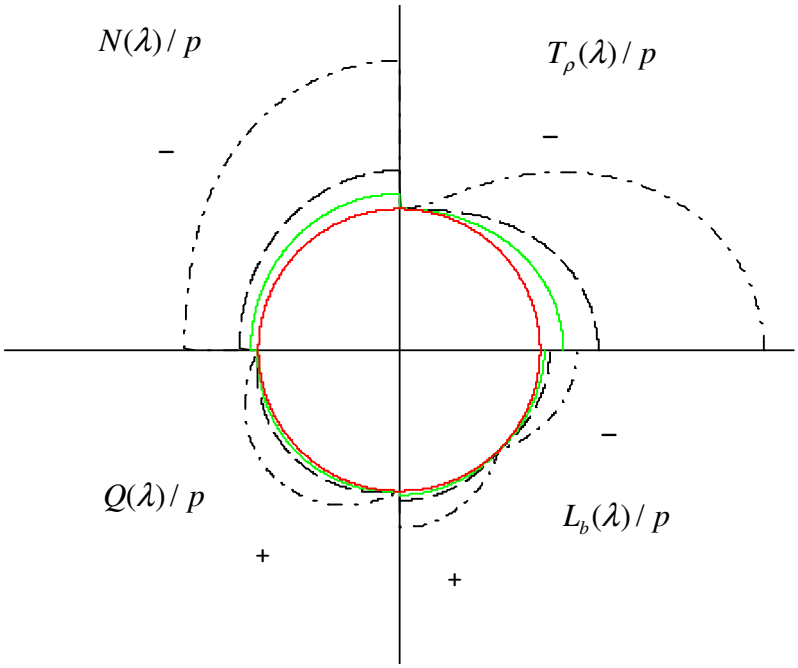
Матеріал	Ізотропний	Скло – епоксид	Графіт – епоксид
$2E_x h\Delta_{\min} / p$	4,0012	10,9383	89,7433

Для оцінки збіжності методу колокації всі розрахунки компонентів напруженого стану в пластинці і підсиленні проводились для значень M до $M = 500$. Шукані величини практично не змінюються, починаючи з $M = 2$. що свідчить про задовільну збіжність методу.

Аналізуючи одержані результати приходимо до висновків:

– ортотропія матеріалу пластинки суттєво впливає на розподіл контактних зусиль T_ρ на контурі отвору. У випадку збільшення E_x / E_y ці величини різко зростають при $\lambda = 0$;

– серед внутрішніх зусиль в кільці найбільший вклад в напружений стан кільця вносять нормальні зусилля N. При цьому вплив поперечних сил Q незначний.



Рисунок

1. Чернець М. Моделювання і аналіз трибоконтактної взаємодії у циліндричних спряженнях [Текст] / М. Чернець // Машинознавство. – 2003. – № 2(68). – С. 30–33. **2.** Семенов-Ежов И. Е. Проблема концентрации напряжений в соединениях с натягом (обзор) [Текст] / И. Е. Семенов-Ежов // Вестник машиностр. МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2001. – № 4. – С. 37–40. **3.** Мартынович Т. Л. Контактные взаимодействия пластин с упругими элементами [Текст] / Т. Л. Мартынович, В. Е. Юринец. – Львов : Вища школа. Изд-во при Львов. ун-те, 1984. – 160 с. **4.** Мартынович Т. Л. Впрессовка замкнутого стержня в криволинейное отверстие изотропной пластинки [Текст] / Т. Л. Мартынович, М. К. Зварич // Прикладная механика. – 1974. – Т. 10. – Вып. 9. – С. 46–52. **5.** Сяський А. Застосування методу сил для статичного розрахунку замкнених криволінійних стрижнів жорсткості [Текст] / А. Сяський, Н. Шевцова // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2015. – № 3 (79). – С. 24–30. **6.** Писаренко Г. С. Опір матеріалів [Текст] / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – К. : Вища школа, 2004. – 655 с. **7.** Комбель С. М. Посадка жорсткого диска в еліптичний отвір нескінченної ортотропної пластинки [Текст] С. М. Комбель // Машинознавство. – 2002. – Вип. 9. – С. 41–47. **8.** Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки [Текст] / С. Г. Лехницкий. – М. : Гостехиздат, 1957. – 464 с. **9.** Бахвалов Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : МГУ, – БИНОМ, 2008. – 636 с.

Рецензент: д.т.н., професор Трач В. М. (НУВГП)

Deineka O. Y., Assistant (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne), **Siaskyi A. O., Doctor of Engineering**, **Professor** (Rivne State University of Humanities)

TENSE LANDING OF THE RESERVED CIRCULAR BAR IN CIRCULAR OPENING INFINITELY ORTOTROPIC PLATE

The solution of a task of the hard landing of a circular ring of constant cross-section in a circular hole of infinite ortotropic plate, which is in conditions of the uniform stressed state at infinity is found. Simulating the ring by selfcontained curvilinear edge, calculation of which is based on a hypothesis of normal section, and the line of contact does not coincide with a center line, we obtained the integro-differential equation with Gilbert's core for determination the contact efforts between a plate and a ring. The solution of a task is established by method of trigonometrical series. The minimum tension at which

disconnection of the site of contact between a plate and a ring happens in two points is defined.
***Keywords*: reinforcing edge, tense landing, ortotropic plate, circular bar, internal efforts, normal tensions.**

Дейнека О. Ю., асистент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно), **Сяський А. О., д.т.н., професор** (Ровенский государственный гуманитарный университет, г. Ровно)

НАПРЯЖЕННАЯ ПОСАДКА ЗАМКНУТОГО КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ В КРУГОВОЕ ОТВЕРСТИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ

Найдено решение задачи о напряженной посадку кругового кольца постоянного поперечного сечения в круговой отверстие бесконечной ортотропной пластинки, которая находится в условиях однородного напряженного состояния на бесконечности. Моделируя кольцо замкнутым криволинейным брусом, расчет которого основывается на гипотезе нормального сечения, а линия контакта не совпадает с геометрической осью, построено интегро-дифференциальное уравнение с ядром Гильберта для определения контактных усилий между пластинкой и кольцом. Решение задачи установлено методом тригонометрических рядов. Определено минимальное натяжение, при котором размыкание участка контакта между пластинкой и кольцом происходит в двух точках.
***Ключевые слова*: ребро жесткости, напряженная посадка, ортотропная пластина, круговой стержень, внутренние усилия, нормальные напряжения.**