

УДК 532.5:519.63

Барановський С.В., к.т.н., доцент (Рівненський державний гуманітарний університет), **Щодро О.Є., к.т.н., доцент**, **Сівак В.М., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне).

ПОБУДОВА ПЛАНОВОЇ КАРТИНИ ТЕЧІЇ ТА ПРОСТОРОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА ТА ОЦІНКА ЕКОЛОГІЧНОГО СТАНУ ВОДОТОКУ

В роботі розроблено алгоритм розрахунків просторових деформацій русла довільної форми на основі дифузійної теорії розмиву. Побудова планової картини течії ведеться на основі методу конформних відображень. Дається також оцінка концентрацій речовин, які потрапляють у потік внаслідок розмиву ґрунту.

Algorithm of river-bed 3-D deformations evaluation is proposed with the aid of the diffusion conception of scour development. Algorithm for the plane flume calculation was also proposed using conformal mapping theory. Estimation of the bottom silt concentration is given on the basis of scour calculation.

Метою роботи є розробка алгоритму і програми для побудови трьохвимірного зображення деформованого дна русла довільної конфігурації з врахуванням реальної форми його поперечних перерізів та оцінка концентрації забруднюючих речовин та їх зміни у часі з врахуванням розмиву ґрунту з шкідливими домішками.

Об'єктом досліджень є процес деформації річкового русла, пов'язаний з гідравлічною структурою потоку в ньому та гідрохімічними процесами.

Предметом досліджень є вплив реальної геометрії русла на кінематичну структуру і розмивну спроможність потоку.

Для виконання завдань дослідження згідно до зазначеної мети необхідно перш за все вміти розраховувати кінематичну структуру течії з урахуванням реальної геометрії русла; далі необхідно розрахувати інтенсивність і скінченні значення деформації русла за певний період часу, а в подальшому оцінити інтенсивність евтрофікації та інших суттєвих гідрохімічних процесів.

При дослідженні кінематичних характеристик потенціальних течій традиційним є застосування методу конформних відображень. У випадку розрахунку характеристик внутрішніх течій у плоскому криволінійному каналі (рис. 1) ефективним з обчислювальної точки зору є

застосування перетворення Кристофеля–Шварца, яке дозволяє область, обмежену многокутником у фізичній площині Z , відобразити на верхню півплощину площини W (рис. 1). Межа многокутника при цьому співпадає в даній площині з дійсною віссю.

Перетворення Кристофеля – Шварца для відображення каналу у площині Z на площину W має вигляд

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{M}{w} \left(\prod_{j=1}^N (w - b_j)^{-\alpha_j/\pi} \right) w^{-\alpha_0/\pi}. \quad (1)$$

Тут α_j – кути повороту під час переходу кожної кутової точки (відлік проти годинникової стрілки); b_j – невідомі положення точок межі на дійсній осі в

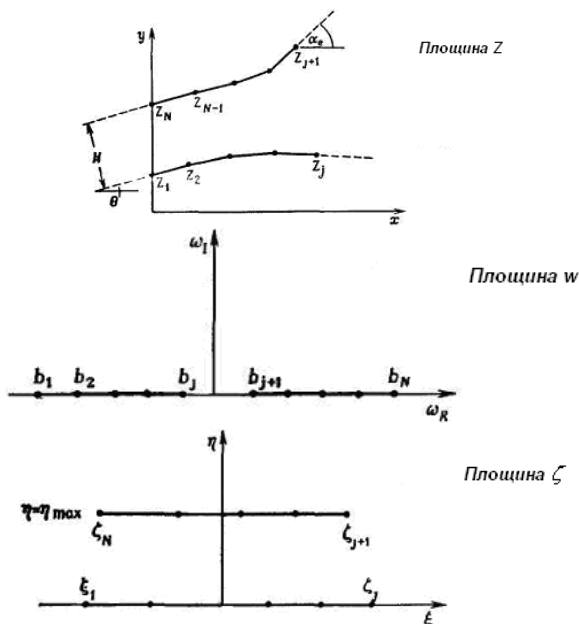


Рис. 1. Схеми відображення для розрахунків обмеженої області (канала, русла)

перетвореній площині; три значення b_j , можуть бути вибрані довільним чином. Ці величини невідомі і визначаються шляхом повторного інтегрування рівняння (1). Величина M пов'язана з висотою каналу і його орієнтацією щодо осі x . Рівняння (1) містить лише кути і полюси b_j , які дійсно наявні в каналі.

При вивченні течії у каналі доцільно здійснити друге перетворення, що переводить верхню півплощину площини W у прямий канал, паралельний дійсній осі в площині ζ (рис. 1)

Відображення площини W на площину ζ визначається співвідношенням

$$\zeta = -(\frac{1}{\pi}) \ln w + i. \quad (2)$$

Якщо припустити, що канал розміщений далеко вгору по потоку як прямий канал (що еквівалентно $W \rightarrow \infty$), то рівність (1) прийме вигляд

$$\frac{dZ}{dw} = \frac{M}{w}. \quad (3)$$

Проінтегрувавши (3) і здійснивши відображення (2), одержимо:

$$Z = \pi M (i - \zeta) + Z_0. \quad (4)$$

Застосовуючи (4) до верхньої і нижньої поверхонь каналу, одержимо вираз для M :

$$Z_u - Z_l = iHe^{i\theta} = -\pi Mi. \quad (5)$$

Значення H і θ визначені на рис. 1.

Якщо положення полюсів b_j знайдено, то для побудови сітки можна здійснити чисельне інтегрування рівняння (1). Проте, більш ефективним з обчислювальної точки зору є використання змішаної маршевої схему другого порядку, в якій використовується аналітичне інтегрування у кожному полюсі. Ця схема може бути представлена у вигляді

$$\frac{Z_{k+1} - Z_k}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} = \frac{-\pi M \prod_{j=1}^N (w_{k+1} - b_j)^{1-\alpha_j/\pi} - (w_k - b_j)^{1-\alpha_j/\pi}}{w_{k+\frac{1}{2}}^{\alpha_j/\pi} (1 - \alpha_j/\pi)(w_{k+1} - w_k)}. \quad (6)$$

Скінченно-різницевий аналог виразу (2) має такий вигляд:

$$w_{k+1} - w_k = -\pi w_{k+\frac{1}{2}} (\zeta_{k+1} - \zeta_k). \quad (7)$$

Співвідношення (3) і (4) представляють прямий зв'язок між фізичною площиною Z і розрахунковою площиною ζ , справедливий для будь-якого шляху інтегрування в розрахунковій області.

Положення полюсів b_j шукається ітеративно за такою процедурою.

Шляхом інтегрування рівняння (6) знаходяться значення $Z_j^V - Z_{j-1}^V$, де

V – номер ітерації. Далі визначаються нові оцінки для ζ_j^{V+1} :

$$\zeta_j^{v+1} = \zeta_{j-1}^{v+1} + \frac{|Z_j^c - Z_{j-1}^c|}{|Z_j^v - Z_{j-1}^v|} (\zeta_j^v - \zeta_{j-1}^v), \quad (8)$$

де величини Z_j^c , які визначають положення кутових точок у фізичній площині є відомими. Нові значення b_j^{v+1} отримаємо з (2):

$$b_j^{v+1} = \exp[\pi(i - \zeta_j^{v+1})]. \quad (9)$$

Весь процес (6) – (10) повторюється до тих пір, поки для всіх j величини Z_j^v не стануть достатньо близькими до Z_j^c .

Після відшукування значень b_j , інтегрування (6) вздовж ліній постійного значення ξ і η у розрахунковій області дозволяє побудувати сітку у фізичній області.

Зазначимо, що потенціальні течії в каналі визначатимуться виразом

$$\Phi + i\Psi = \zeta, \quad (10)$$

де Φ – потенціал швидкості, Ψ – функція течії, а модуль швидкості дорівнює одиниці.


Алгоритм числової реалізації наближеного методу розв'язання різницевого аналогу модельної задачі, що описує потенціальну плоску течію у криволінійному каналі полягає у здійсненні таких кроків.

1. Задаємо координати кутових точок каналу Z_1, Z_2, \dots, Z_N , кут втікання течії у канал θ (див. рис. 3).
2. Задаємо початкові наближення значень точок $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ (образів кутових точок каналу у фізичній області) (див. рис. 1).
3. За формулою (10) обчислюємо образи кутових точок у площині W .
4. Зафіксувавши початкову точку каналу та використовуючи змішану маршову схему (6) інтегрування вздовж розрахункових границь, за ітеративною схемою (8) встановлюємо відповідність між кутовими точками у фізичній та розрахунковій областях.
5. При відомих значеннях b_j , шляхом інтегрування (6) вздовж ліній постійного значення ξ і η у розрахунковій області будуємо конформну сітку у фізичній області (див. рис. 1).

Програмна реалізація розглянутої вище модельної задачі здійснена в середовищі Delphi. В програмному комплексі для зручності реалізовано власний модуль основних дій над комплексними числами, оскільки площина, в якій розглядається канал є комплексною. Крім того, з метою

уніфікації методу для довільних випадків конфігурації каналів реалізована процедура автоматизованого визначення координат кутових точок та побудови зображення каналу. Вигляд програмного вікна зображено на рис. 3.

При дослідженні потенціальних течій у криволінійному каналі за допомогою створеного програмного комплексу користувач після запуску програми, використовуючи маніпулятор-мишу на спеціально створеній графічній поверхні (полотні) вказує положення кутових точок каналу. Для зображення кутових точок у програмному вікні також передбачені два режими, яким відповідають кнопки: 1 – точки нижнього берега, 2 – точки верхнього берега. При цьому програмний комплекс автоматично буде ламані відповідних берегів та висвітлює числові значення координат цих кутових точок в рядку “Координати” розрахункової таблиці (див. рис. 3).

Після цього, в рядку “Zeta.Re” необхідно вказати дійсну частину для кожного початкового наближення, а саме значення точок $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ (у рядку “Zeta.Im” уявна частина заповнюється автоматично). Далі здійснюється запуск програми на виконання (за допомогою кнопки ) , після чого в таблиці автоматично висвітлюються значення: кутів повороту сегментів каналу α_j (“Кути”), висоти каналу H (“Н”), величини M , пов'язаної з висотою каналу і його орієнтацією щодо осі x (“М”), кута α_e , який відповідає нескінченно віддаленій точці каналу (“AlphaE”), кута втікання течії у канал θ (“Theta”).

В останньому рядку таблиці програмного вікна виводиться значення точності наближення кутових точок. Кількість ітерацій висвітлюється в рядку заголовка форми. Зазначимо, що при проведенні числових експериментів для різних випадків отримувана нами кількість ітерацій не перевищувала 10.

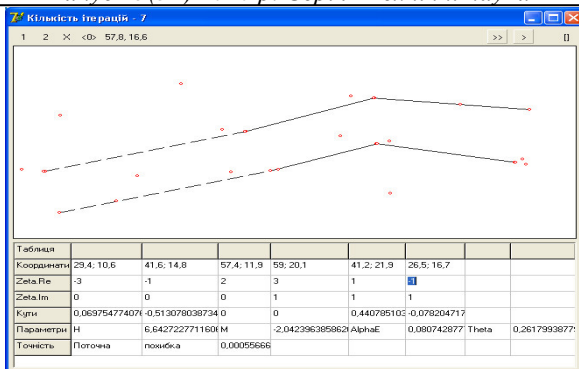




Рис. 3. Задання границь області

Після досягнення заданої точності будується ортогональна сітка (див. рис. 4). В програмному комплексі закладена можливість виведення обчислювальних результатів після кожного ітераційного кроку (за допомогою кнопки ).

В останньому рядку таблиці програмного вікна виводиться значення точності наближення кутових точок. Кількість ітерацій висвітлюється в рядку заголовка форми. Зазначимо, що при проведенні числових експериментів для різних випадків отримувана нами кількість ітерацій не перевищувала 10.

Після досягнення заданої точності будується ортогональна сітка (див. рис. 4). В програмному комплексі закладена можливість виведення обчислювальних результатів після кожного ітераційного кроку (за допомогою кнопки ).

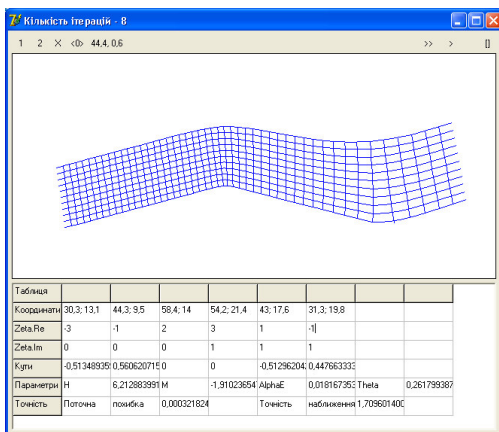


Рис. 4. Побудована гідродинамічна сітка

Врахування форми поперечних перерізів русла здійснюємо за відомою наближеною методикою М.А. Веліканова. Його ідея полягає у тому, що границі рівно витратних струмин в плані русла можуть бути побудовані на основі традиційного рівняння Шезі та зв'язаних з ним співвідношень:

$$v = C\sqrt{R \cdot I}; \quad Q = v \cdot \omega, \quad R = \frac{\omega}{\chi}, \quad C = \frac{1}{n} R^y$$

$$y = -0,13 + 2,5 \cdot n^{0,5} - 0,75 \cdot (n^{0,5} - 0,1) \cdot R^{0,5}, \quad (12)$$

якщо його записувати для кожної вертикалі в межах розглядуваної ділянки з врахуванням осереднених по вертикалях швидкостей потоку $v(b)$ та знаходити елементарні витрати $dQ(b)$, які їм відповідають $v(b) = C(b)\sqrt{R(b) \cdot I}; \quad dQ = v(b) \cdot d\omega$.

$$R(b) = \frac{d\omega(b)}{d\chi} = \frac{h(b) \cdot db}{d\chi} = \frac{h(b)}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{db}\right)^2}}, \quad (13)$$

де b та B – поперечна координата розглядуваної вертикалі у руслі та ширина русла по верху, $\left|\frac{dh}{db}\right|$ – поперечний нахил дна русла на даній вертикалі, (рис. 3); v , Q , C , n , ω та R – швидкості, витрати, коефіцієнти Шезі, коефіцієнти шорсткості, площі живого перерізу та гідравлічні радіуси для всього потоку в умовах рівномірного руху у призматичному руслі з постійним нахилом дна I ,

$\chi = \int_0^B \sqrt{1 + \left(\frac{dh}{db}\right)^2} db$ – змочений периметр русла у даному його перерізі; dv , dQ ,

$d\omega$ відповідні позначення диференціалів даної характеристики русла при його зміні по його ширині.

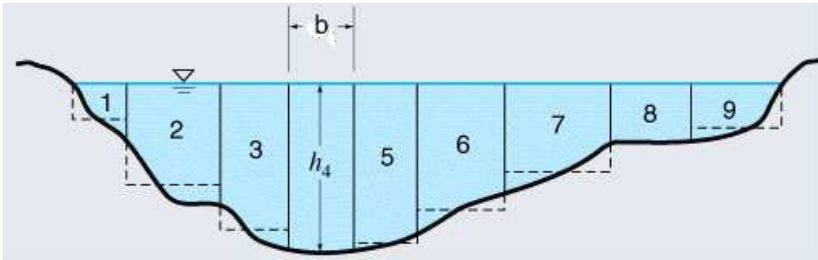


Рис. 5. Схема живого перерізу русла

Границі рівно-витратних струмин згідно зазначеної методики визначаються на основі чисельного розв'язання наступного рівняння для кожного i при розділенні русла по його ширині на N струмин:

$$Q_i = \int_0^{b_i} q db, \quad q_i = \frac{1}{n} R_i^y h_i \sqrt{R_i \cdot I}, \quad (14)$$

де b_i та Q_i – координати границь рівно-витратних струмин та відповідні їм витрати; i – номери струмин, ($i=1, N$), q – питома витрата на вертикалі, h_i – глибина на вертикалі, $R_i = \frac{h_i}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh_i}{db}\right)^2}}$ – гідравлічний радіус на i -тій вертикалі.

калі.

Після отримання границь рівно-витратних струмин проводиться перерахунок швидкостей, отриманих з гідродинамічної сітки, і на їх основі проводиться розрахунок деформацій русла за методикою [1-3], яка заснована на використанні дифузійної моделі. При розрахунку процесу деформації русла важливим є врахування впливу зміни положення поверхні дна (вільної ділянки границі області) не тільки на коефіцієнт дифузії, але і на розподіл швидкостей в потоці. У випадку невеликих змін поверхні дна врахування такого впливу можливе і з використанням модельних співвідношень для компонент швидкості. Коли ж зміна положення поверхні дна суттєво впливає на розподіл швидкостей в потоці, пропонуємо представляти залежність горизонтальної u та вертикальної w складових вектора швидкості $\vec{V}(x, z, t)$ від вільної ділянки границі $L: z=l(x, t)$ у вигляді:

$$u(x, z, t) = \frac{u_0}{(1+\alpha)^m} \left(\frac{l(x, t) - z}{l(x, t)} + \alpha \right)^m \frac{l_0}{l(x, t)}, \quad w(x, z, t) = u(x, z, t) \frac{l'(x, t)z}{l(x, t)}, \quad (15)$$

де u_0 – швидкість рідини на її поверхні; l_0 – деяке осереднене значення глибини потоку; α – досить мале число.

З метою моделювання та дослідження процесу деформації дна русла із врахуванням взаємовпливу зміни геометрії області на кінематичну структуру потоку, аналогічно до попереднього випадку, будемо розглядати відрив та вертикальний підйом частинок ґрунту як їх дифузію в рідину з деяким «фіктивним» коефіцієнтом, в області $G = \{(x, z, t): -\infty < x < +\infty, 0 < z < l(x, t), t > 0\}$, що описується наступною нелінійною сингулярно збуреною модельною задачею [1, 3]:

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(D \left(V \left(l(c(x, z, t)) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial z} \right) - u \left(l(c(x, z, t)) \right) \frac{\partial c}{\partial x} - \left(w \left(l(c(x, z, t)) \right) + w_0 \right) \frac{\partial c}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (16)$$

$$c(x, z, 0) = \bar{c}(x, z); \quad c(x, z, t) \Big|_{z=0} = 0, \quad c(x, z, t) \Big|_{z=l(x, t)} = c_*; \quad (17)$$

$$\left(\varepsilon D \left(V \left(l(c(x, z, t)) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial n} - \left(V_n \left(l(c(x, z, t)) \right) + w_{0n} \right) c \right) \Big|_{z=l(x, t)} = c_* \frac{dl}{dt}; \quad (18)$$

$$l(x, 0) = \tilde{l}(x), \quad (19)$$

де c – концентрація домішків у потоці, l – глибина русла, з урахуванням його деформацій; c_* – концентрація інертних часток або біоактивних домішок у матеріалі поверхневого шару ґрунту; w_0 – швидкість осідання частинок в стоячій воді; n – одиничний вектор нормалі до границі області, орієнтований в її середину; ε – малий параметр.

Тут рівняння (16) описує загальний розподіл домішок у потоці; рівняння (18) описує умову балансу маси наносів, або біохімічних домішок на вільній ділянці границі L . За допомогою моделі (16 - 19) представляється можливим оцінювати інтенсивність деформації дна та його нове положення, а також надходження біоактивних домішок у потік шляхом задання відповідних умов та концентрацій.

Для відшукування розв'язку вихідної задачі здійснимо перетворення області G , увівши нові змінні s, r , які пов'язанні із змінними x, z співвідношеннями:

$$s = x, \quad r = \frac{l_0 z}{l(x, t)}. \quad (20)$$

При цьому рівняння (16), (17) та вирази для скоректованих швидкостей перепишуться відповідно у вигляді:

$$\varepsilon \frac{l_0^2}{l^2(s, t)} \frac{\partial}{\partial r} \left(D \left(V \left(l(c(s, r, t)) \right) \right) \frac{\partial c}{\partial r} \right) - u \left(l(c(s, r, t)) \right) \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0 w_0}{l(s, t)} \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial c}{\partial t}; \quad (21)$$

$$c(s,r,0)=\bar{c}(s,r); \quad c(s,r,t)\Big|_{r=0}=0, \quad c(s,r,t)\Big|_{r=l_0}=c_*; \quad (22)$$

$$u(s,r,t)=\frac{u_0}{(1+\alpha)^m} \left(\frac{l_0-r}{l_0}+\alpha\right)^m \frac{l_0}{l(s,t)}, \quad w(s,r,t)=u(s,r,t) \frac{l'_s(s,t)r}{l_0}. \quad (23)$$

Зазначена система розв'язується, наприклад, із застосуванням відомого методу прогонки, який дає достатньо стійкий і збіжний алгоритм. Для знаходження нового положення границі $l_{i,k+1}$ після кожного часового етапу, зробивши деякі перетворення, перепишемо рівняння (18) у вигляді

$$\left(\varepsilon D(s,r,t) \frac{1}{\sqrt{1+l'^2(s,t)}} \left(l'_s(s,t) \frac{\partial c}{\partial s} - \frac{l_0(1+l'^2(s,t))}{l(s,t)} \frac{\partial c}{\partial r} \right) - \frac{(w(s,t)-u(s,t)l'_s(s,t))}{\sqrt{1+l'^2(s,t)}} c \right) \Big|_{z=l(s,t)} = c_* \frac{dl(s,t)}{dt}. \quad (24)$$

Записавши різницевий аналог рівняння (24), отримаємо співвідношення для визначення значень $l_{i,k+1}$:

$$l_{i,k+1} = l_{ik} + \frac{\Delta t}{c_*} \left(\varepsilon D_{ijk} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta s^2 + (l_{i+1,k} - l_{ik})^2}} \left(\frac{l_{i+1,k} - l_{ik}}{\Delta s} \cdot \frac{c_{i+1,jk+1} - c_{ijk+1}}{\Delta s} - \frac{l_0}{l_{ik}} \cdot \frac{c_{ij+1,k+1} - c_{ijk+1}}{\Delta r} \right) - \frac{(\Delta s \cdot w_{ijk} - u_{ijk}(l_{i+1,k} - l_{ik}))}{\sqrt{\Delta s^2 + (l_{i+1,k} - l_{ik})^2}} c_{ijk+1} \right). \quad (25)$$

Математична модель процесу самоочищення води у річці може бути представленою в такому виді. Відомо, що у будь-якому природному руслі здійснюється процес самоочищення, який можна описати наступною системою рівнянь:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -k_1 L; \quad (26)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = k_1 L - k_2 D; \quad (27)$$

де L – вміст органічних речовин, $\frac{мг}{л}$; $D = C_p - C_t$; D – дефіцит кисню, $\frac{мг}{л}$; C_p – розчинність кисню, $\frac{мг}{л}$; C_t – концентрація кисню, $\frac{мг}{л}$; k_1 – константа біодеструкції органічних решток, $\approx 0,3[\text{доби}^{-1}]$; k_2 – коефіцієнт репарації кисню, $\approx 0,43[\text{доби}^{-1}]$.

Гранична умова для рівняння (26):

$$L|_{t=0} = L_0 = 100 \frac{мг O_2}{л}, \text{ при } D|_{t=0} = D_0$$

З системи рівнянь (26 – 27) при розв’язанні отримуємо вираз:

$$L_t = L_0 e^{-k_1 t}, \quad (28)$$

де t – час.

Підставляємо вираз (28) в рівняння (27) і отримуємо його у вигляді розв’язку:

$$D = \frac{k_1 L_0}{(k_2 - k_1)} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) + D_0 e^{-k_2 t};$$

де D_0 – коефіцієнт дифузії для відкритого водного потоку.

При розмиві русла з тою інтенсивністю, яка задається математичною моделлю (16 - 19) в потік потрапляють також домішки з донних відкладень. Їхню концентрацію у потоці розраховуємо незалежно від розрахунків концентрації наносів, але за допомогою тих же самих рівнянь (21 - 23).

Характер зміни концентрацій L і C відображено на рис. 6. З аналізу поведінки кривих витікає висновок, що існує момент часу з критично низькою концентрацією кисню в потоці ($t_{кр}$), який відповідає моменту найбільш несприятливих екологічних умов.

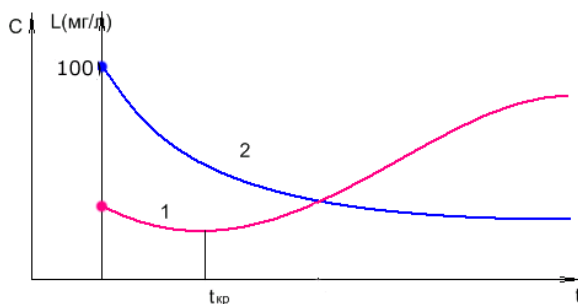


Рис. 6. Характер зміни концентрацій L і C у часі

1. Барановський С.В. Про один підхід до моделювання тривимірного процесу деформації дна під впливом турбулентного потоку // Актуальні проблеми водного господарства. – Том 1. – Рівне: УДАВГ, 1997. – С.7- 10.
2. Шинкарук Л.А., Щодро О.Є., Барановський С.В. До розрахунку місцевого розмиву біля регуляційних струмененаправляючих дамб // Матеріали ювілейної конференції УДАВГ, присвяченої 75-річчю академії. – Рівне, 1997. – С.80-82.
3. Бомба А.Я., Барановський С.В., Щодро О.Є. Покрокова асимптотика розв'язку сингулярно збурених задач конвективної дифузії в скінченних областях з вільними межами та проблеми моделювання планових деформацій дна русла // Вісник УДАВГ. – № 1. – Рівне: УДАВГ, 1998.– С. 21-27.
4. Сівак В.М., Щодро О.Є., Ходневич Я.В. Розрахунки полів швидкостей і тисків у потоці в аеротенках на основі системи рівнянь Рейнольдса. // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – Вип. 34. – Рівне, 2009. – С. 262 – 271.

Рецензент: д.т.н., професор Кравець С.В. (НУВГП)