МАТЕМАТИКА, ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА ТА АВТОМАТИЗАЦІЯ

УДК 539.4

Кундрат М.М., д.т.н., професор (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ГРАНИЧНА РІВНОВАГА В КОМПОЗИЦІЇ З ПРУЖНИМ СТРІЧКОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Методом функцій стрибка досліджено розвиток локалізованих зон передруйнування в композиції з пружним стрічковим включенням. Граничні опори зсуву контактних меж на верхньому та нижньому берегах включення приймаються різними, відповідно розміри зон навіть при симетричному навантаженні будуть неоднаковими. З використанням комплексних потенціалів отримано залежності для компонентів тензора напружень і вектора переміщень від навантаження та невідомих функцій стрибка. За умов взаємодії тонкого включення та матриці, задачу зведено до системи інтегральних рівнянь стосовно функцій стрибка. Метод проілюстровано на прикладі.

Development of localized zones of prefracture in compositions with elastic ribbon-like inclusion in isotropic matrix under the action by loads on infinity by method of jump function is investigated. Zones of prefracture developed from the ribbon tips are modelled by fiber-matrix interface slip band. Using the complex potentials we obtain the dependence of stress and displacement components on loads and unknown jump functions. Taking into account conditions of the interaction a thin inclusion and matrix, the problem is reduced to the system of singular integral equations for the jump function. An example illustrates the method.

З огляду на важливе наукове й соціальне значення забезпечення теоретичного обґрунтування міцності елементів конструкцій і споруд та необхідність втілення розроблених теорій в інженерну практику, проблема поглибленого вивчення процесів деформування та руйнування структурно неоднорідних тіл, зокрема композитів, постійно користується підвищеною увагою спеціалістів у галузі механіки деформівного твердого тіла. Одним з найважливіших завдань на шляху до успішного вирішення цієї проблеми є з’ясування умов зародження й розвитку локального руйнування поблизу дефектів та неоднорідностей природного, технологічного чи експлуатаційного походження. Визначення полів напружень і деформацій з додатковим урахуванням явищ розпушення матеріалів, нелінійного та пластичного їх деформування дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

Розв'язок плоскої задачі теорії пружності для тіла з жорстким еліптичним ядром подано у праці [1], із нього граничним переходом можна отримати результати і для лінійного (пластинчатого) включення. Поля напружень і переміщень біля вершин включень та їх асимптотичні представлення досліджувалися в широкому колі праць, огляд яких подано в монографії [2]. Зокрема виявлено [3, 4], що внаслідок нерівномірного розтягу-стиску біля включення слід сподіватися більших порівняно з породженими тріщинами пластичних деформацій. Аналітичні розв'язки плоских задач для включення з пластичними зонами, що в різний спосіб моделюються локалізованими тонкими прошарками матеріалу, отримано у працях [5-7] та інших. Але постановка задачі не дала можливості отримати обмежені напруження, залишалася логарифмічна особливість в околі вершини включення, що затрудняло інтерпретацію отриманих даних як розв'язок модельної пружнопластичної задачі. У працях [8-10] сформульовано нову модельну постановку та отримано розв'язки задач для тіла з включенням кінцевої довжини. Математична модель деформування тіла з включенням передбачає двофазну зону передруйнування, яка складається з спричиненого високою концентрацією пружних напружень ділянки розпушення та області пластичного зсуву чи адгезії. Це дало змогу отримати високий рівень фізичної адекватності моделі та уникнути внаслідок цього сингулярності напружень в околах вершин включення, отримавши природним чином в усіх точках композиції механічно коректні обмежені напруження. Розрахункова модель описується, крім пружних сталих, ще трьома характеристиками: зсувною міцністю (порогом текучості) τ_s^*, граничним значенням зсувів δ_{2c} та міцністю включення на розрив P_{ut}. У цій праці розвиваємо дослідження [11-13] про розвиток зон передруйнування біля пружного стрічкового включення за умови, що зсувна межа міцності контактної межі матриця-включення на верхньому та нижньому краях є різною.

Постановка задачі. За умов плоскої задачі теорії пружності розглядаємо ізотропну площину, що містить пружне стрічкове включення завдовжки $2a$ та малої порівняно з довжиною товщини $2h$. Модуль пружності включення $E_в$ більший від відповідного E матриці, коефіцієнти Пуассона – $\nu_в$ та ν. На пластину діють рівномірно розподілені на нескінченності напруження $\sigma_{xx}^{\infty} = q$. Осі декартової системи координат xOy збігаються з осями геометричної симетрії тіла (рис. 1).

Із аналізу двовимірного напруженого стану такої композиції за суто пружним розв'язком випливає, що найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців включень, а максимальні дотичні напруження $\tau_{\max}$ діють уздовж межі між матрицею та включенням. Вважаємо, що саме тут зароджуються зони передруйнування, просуваючись від країв до центральної частини

включення. Останні можуть відповідати областям накопичення пошкоджень, пластичного деформування, розпушення, проковзування та інше.

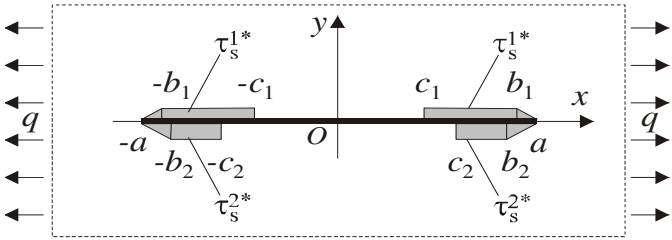

Рис. 1. Схема задачі

Приймаємо, що зсувна границя міцності контактної межі матриця-включення на нижньому та верхньому краях включення є різною і відповідно дорівнює τ_s^{2*} ($y=-h$) та $\tau_s^{1*}=m\tau_s^{2*}$, $m\le 1$ ($y=+h$). Кожна із зон передруйнування складається з двох частин: ділянки розпушення $L_1^- \approx b_2<|x|<a$ та ділянки пластичного деформування $L_2^- \approx c_2<|x|<b_2$ на нижньому ($y=-h$) краї і відповідних зон на верхньому ($y=+h$) краї – $L_1^+ \approx b_1<|x|<a$ та $L_2^+ \approx c_1<|x|<b_1$. При цьому виконуються такі крайові умови: на ділянках розпушення дотичні напруження лінійно зростають від нуля до свого граничного значення –

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^+(x)&=\tau_s^{1*}\frac{a-|x|}{a-b_1}sign(x)\quad \left(b_1<|x|<a,\ y=+h\right),\\ \sigma_{xy}^-(x)&=-\tau_s^{2*}\frac{a-|x|}{a-b_2}sign(x)\quad \left(b_2<|x|<a,\ y=-h\right),\end{aligned}\tag{1}$$

а на ділянках пластичного деформування є сталими –

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^+(x)&=\tau_s^{1*}sign(x)\quad \left(c_1<|x|<b_1,\ y=+h\right),\\ \sigma_{xy}^-(x)&=-\tau_s^{2*}sign(x)\quad \left(c_2<|x|<b_2,\ y=-h\right).\end{aligned}\tag{2}$$

На ділянках $L_0^+ \approx \left(-c_1,c_1\right)$ та $L_0^- \approx \left(-c_2,c_2\right)$ зв'язок між включенням та матрицею ідеальний. Значення параметрів $c_i\left(i=1,2\right)$ знаходимо з додаткових фізичних умов, а довжини зон розпушення (а отже й b_i), які можуть вважатися залежними від структури матеріалів додатковими механічними параметрами контактної взаємодії пари матриця-включення, задаються – умов для їх

обчислення немає. Зазначимо, що запровадження у такий спосіб зон передруйнування дає можливість уникнути особливостей напружень в околах кінців включень та отримати обмежені напруження в усіх точках композиції, які дають механічно коректну картину деформування.

Метод функцій стрибка. Вплив включення на напружено-деформований стан композиції за результатами праць [14, 2] змоделюємо функціями стрибків вектора напружень і похідної від вектора переміщень під час переходу через його серединну лінію:

$$\begin{gathered}\left[\sigma_{yy}(x)-i\sigma_{xy}(x)\right]=\begin{cases} f_1(x)-if_2(x), & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases}, \\ \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right]=\begin{cases} f_3(x)+if_4(x), & |x|<a \\ 0, & |x|>a \end{cases},\end{gathered} \tag{3}$$

де $f_j(x)$ ($j=\overline{1,4}$) – шукані функції стрибка; $[\sigma(x)]=\sigma^-(x)-\sigma^+(x)$, $\sigma^{\pm}(x)$ – значення функції на верхньому й нижньому боках лінії $y=0$.

Згідно праці [1] у плоскій задачі теорії пружності компоненти тензора напружень і вектора переміщень за відсутності масових сил подають через дві аналітичні функції комплексної змінної $z=x+iy$:

$$\begin{gathered}\sigma_{yy}(z)-i\sigma_{xy}(z)=\Phi(z)+\Omega(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2G[u'(z)+iv'(z)]=\kappa\Phi(z)-\Omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}.\end{gathered} \tag{4}$$

Тут $G=0{,}5E/(1+\nu)$ – модуль зсуву матеріалу матриці; $\kappa=(3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напруженого стану та $\kappa=3-4\nu$ за умов плоскої деформації. За відомою схемою [2] після підставляння виразів (4) в умови (3) з урахуванням навантаження отримаємо значення комплексних потенціалів

$$\begin{gathered}\Phi(z)=\frac{-1}{2i(\kappa+1)}\{t_1(z)-it_2(z)+2G[t_3(z)+it_4(z)]\}+\Phi_0(z), \\ \Omega(z)=\frac{-1}{2i(\kappa+1)}\{-\kappa(t_1(z)-it_2(z))+2G[t_3(z)+it_4(z)]\}+\Omega_0(z),\end{gathered} \tag{5}$$

де $t_j(z)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f_j(t)dt}{t-z}$, $\Phi_0(z)=q/4$, $\Omega_0(z)=-q/2$.

За фізичним змістом величини $\Phi_0(z), \Omega_0(z)$ відповідають розв'язку однорідної задачі для суцільного тіла без включення, а інтеграли типу Коші описують розв'язок збурений наявністю включення. Залежності (4), (5) визначають компоненти тензора напружень та похідні від переміщень у довільній точці пластини через функції стрибків та навантаження.

З іншого боку умовою ідеального механічного контакту включення з матрицею є співвідношення:

$$\sigma_{yy}^{в}(x,\pm h)=\sigma_{yy}^{\pm}(x),\quad \sigma_{xy}^{в}(x,\pm h)=\sigma_{xy}^{\pm}(x),$$

$$\frac{\partial u^{в}(x,\pm h)}{\partial x}=\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right)^{\pm},\quad \frac{\partial v^{в}(x,\pm h)}{\partial x}=\left(\frac{\partial v(x)}{\partial x}\right)^{\pm}, \tag{6}$$

де верхнім індексом “*в*” позначено характеристики, що стосуються включення. Враховуючи його малу товщину та формули (6), закон Гука для ізотропного включення в усередненому вигляді можна подати так:

$$\left\langle\frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle=\frac{1}{E_в}\langle\sigma_{xx}\rangle-\frac{\nu_в}{E_в}\langle\sigma_{yy}\rangle,\quad \frac{[v]}{h}=\frac{1}{E_в}\langle\sigma_{yy}\rangle-\frac{\nu_в}{E_в}\langle\sigma_{xx}\rangle,$$

$$\frac{[v]}{h}+\left\langle\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle=\frac{2(1+\nu_в)}{E_в}\langle\sigma_{xy}\rangle, \tag{7}$$

де $\langle\varphi(x)\rangle=\varphi^{+}(x)+\varphi^{-}(x)$.

З умови рівноваги елемента включення

$$\left\langle\sigma_{xx}^{в}\right\rangle(x)=\frac{1}{h}\int_x^a\left[\sigma_{xy}^{в}(t)\right]dt+\frac{N_{xx}(a)}{h},\quad \left\langle\sigma_{xy}^{в}(x)\right\rangle=\frac{1}{h}\int_x^a\left[\sigma_{yy}^{в}(t)\right]dt+\frac{N_{xy}(a)}{h}, \tag{8}$$

де $N_{xx}(a)$, $N_{xy}(a)$ – нормальні та дотичні зусилля на торці включення $x=a$. Тоді з формул (7), (8) слідують залежності:

$$\frac{1}{h}\int_x^a f_2(t)dt+\nu_в\langle\sigma_{yy}\rangle+E_в\left\langle\frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle+\frac{1}{h}N_{xx}(a)=0,$$

$$\nu_в\int_x^a f_2(t)dt-E_в\int_x^a f_4(t)dt+h\langle\sigma_{yy}\rangle+\nu_в N_{xx}(a)=0, \tag{9}$$

$$\int_x^a f_3(t)dt+\frac{1}{G_в}\int_x^a f_1(t)dt+h\left\langle\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle+\frac{1}{G_в}N_{xy}(a)=0.$$

Формули (9) з урахуванням результатів (4), (5) та умов навантаження за схемою [14, 2] породжують систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибка

$$\lambda_1 t_2(x)+\frac{2}{h}\int_x^a f_2(t)dt-E\lambda_2 t_4(x)+4\lambda_0 q-\frac{2}{h}N_{xx}(a)=0,$$

$$(1-\nu)t_2(x)-\frac{2\nu_в}{h}\int_x^a f_2(t)dt+Et_4(x)+\frac{2E_в}{h}\int_x^a f_4(t)dt-\frac{2\nu_в}{h}N_{xx}(a)=0. \tag{10}$$

Тут $\lambda_1 = (3-\nu)(1+\nu)\lambda_0 - \nu_в(1-\nu)$, $\lambda_2 = \nu_в + \lambda_0(1-\nu)$; $\lambda_0 = E_в/E$ – відносна жорсткість включення.

Розвиток зон передруйнування. Розглянемо спочатку задачу (1)-(2) за умов $\tau_s^{1*} = \tau_s^{2*} = \tau_s^*$ ($m=1$), а значить і $c_1 = c_2 = c$, $b_1 = b_2 = b$, $L_i^- = L_i^+ = L_i\,(i=1,\,2)$. Тоді з урахуванням результатів (10) та крайових умов (1)–(2) отримуємо систему інтегральних рівнянь стосовно шуканих функцій стрибка:

$$\begin{gathered}
\lambda_1 t_2^{(0)}(x) + \frac{2}{h}\int_x^c f_2(t)dt - E\lambda_2\left[t_4^{(0)}(x) + t_4^{(1)}(x)\right] - 2\tau_s^* g_1(x) + 4\lambda_0 q - \\
-(2/h)N_{xx}(a) = 0 \quad (x \in L_0), \\
-\frac{2\nu_в}{h}\int_x^c f_2(t)dt + E\left[t_4^{(0)}(x) + t_4^{(1)}(x)\right] + \frac{2E_в}{h}\left[\int_x^c f_4^{(0)}(t)dt + \int_c^a f_4^{(1)}(t)dt\right] - \\
-2\tau_s^* g_2(x) - 2\nu_в N_{xx}(a)/h + (1-\nu)t_2^{(0)}(x) = 0 \quad (x \in L_0), \\
E\lambda_3\left[t_4^{(0)}(x) + t_4^{(1)}(x)\right] + \frac{2\lambda_1 E_в}{h}\int_x^a f_4^{(1)}(t)dt - 4(1-\nu)\lambda_0 q - \\
-(2\lambda_4/h)\left[N_{xx}(a) - \tau_s^* g_3(x)\right] = 0\,(x \in L_1 + L_2),
\end{gathered} \tag{11}$$

де $t_i^{(0)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-c}^{c}\frac{f_i^{(0)}(t)dt}{t-x}$, $t_4^{(1)}(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_c^a\left(\frac{1}{t-x} + \frac{1}{t+x}\right)f_4^{(1)}(t)dt$,

$$g_1(x) = (a+b-2c)/h + \lambda_1 g_0(x)/\pi,$$

$$g_2(x) = -\nu_в\,(a+b-2c)/h + (1-\nu)\,g_0(x)/\pi,$$

$$g_0(x) = \ln\frac{b^2-x^2}{c^2-x^2} + \frac{1}{a-b}\left[a\ln\frac{b^2-x^2}{c^2-x^2} - x\ln\frac{(a-x)(b+x)}{(a+x)(b-x)}\right] - 2,$$

$$g_3(x) = \begin{cases} a+b-2x, & x<b \\ (a-x)^2/(a-b), & x>b \end{cases},\ \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2(1-\nu),\ \lambda_4 = \nu_в\lambda_1 + 1 - \nu.$$

Систему рівнянь (11) доповнюємо умовами загальної рівноваги включення та обмеженості напружень в околах $x = \pm c$ вершин зон передруйнування.

Тепер при заданому навантаженні q зафіксуємо зсувну міцність на нижньому $y=-h$ краї включення $\tau_s^* = \tau_s^{2*}$, а на верхньому $y=+h$ приймемо рівною $\tau_s^{1*} = m\tau_s^{2*}$ ($m \le 1$). З фізичних міркувань слід очікувати видовження зон передруйнування $a - c_1$ на верхньому боці включення, тобто отримуємо

задачу з крайовими умовами (1)-(2) згідно з рис. 1. Її розв'язок будуємо за використаною вище схемою з урахуванням, що зміна напружено–деформованого стану відбувається лише на верхньому боці включення.

Розв'язок отриманих систем рівнянь подаємо у вигляді рядів за многочленами Чебишева першого роду з виділеною кореневою особливістю та невідомими коефіцієнтами. За схемою [2, 15] методу колокацій приходимо до безмежної системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, яка за фіксованої довжини зон передруйнування перетворюється в лінійну стосовно невідомих коефіцієнтів та параметра навантаження. Останню розв'язували методом редукції, а точність оцінювали за відхиленням узагальнених коефіцієнтів інтенсивності [2] від нуля, яке допускали не більшим від 0,001. Торцьові зусилля враховуємо за наближеною [14] формулою $N_x(a) = 2hq$.

Приклад. Розглянемо композицію з коефіцієнтами Пуассона $\nu = 0{,}33$ та $\nu_в = 0{,}2$, товщини $h_* \equiv h/a = 1/20$ для різних значень відносної жорсткості включення та довжини зон розпушення, які на верхньому і нижньому краях прийняли однаковими $b_1 = b_2 = b$. На рис. 2 відображено залежності відносних довжин зон передруйнування $\varepsilon_2 = (a - c_2)/a$ (лінії *1*, *5*) та $\varepsilon_1 = (a - c_1)/a$ (лінії *2–4*, *6–7*) від знерозміреного параметра навантаження $\tilde{q} = q/\left(2\tau_s^{2*}\right)$. Для кожної пари ліній суцільна відповідає значенню $\gamma \equiv (a - b)/a = 10^{-3}$, а штрихова – $\gamma = 0{,}1$ (так само і на рис. 3, 4), для ліній *1–4* відносна жорсткість $\lambda_0 = 10^9$ (практично абсолютно жорсткі), для ліній *5–7* – $\lambda_0 = 1/20$. Відношення m зсувних границь міцності на верхньому та нижньому краях включення: для ліній *1–2*, *5–6* параметр $m = 0{,}99$; для ліній *3*, *7* – $m = 0{,}9$; для лінії *4* – $m = 0{,}7$.

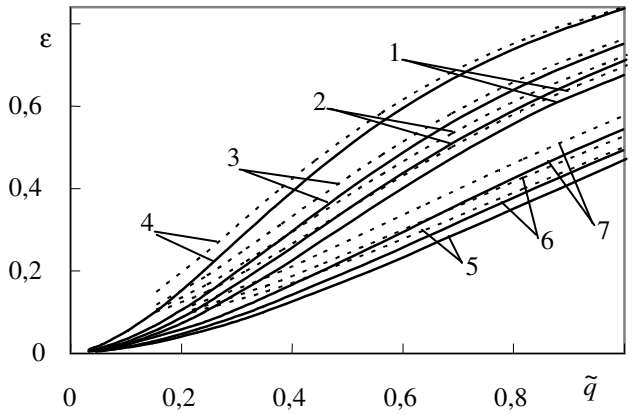

Рис. 2. Загальна довжина зон передруйнування

Залежності між загальними довжинами зон на нижньому та верхньому краях включення подано на рис. 3 та рис. 4: для ліній *1* відношення зсувних міцностей $m = 0{,}99$; для ліній *2* – $m = 0{,}9$; для *3* – $m = 0{,}7$.

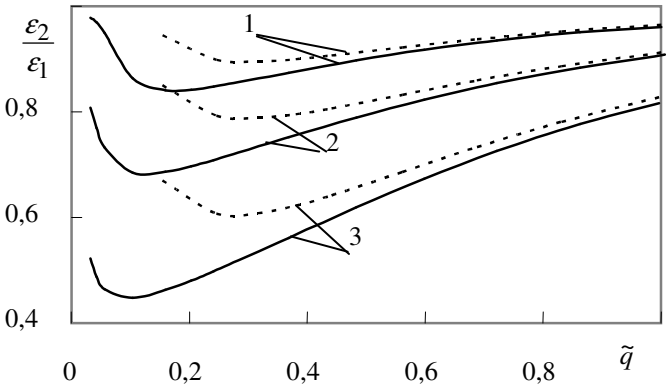

Рис. 3. Відношення між довжинами зон залежно від навантаження

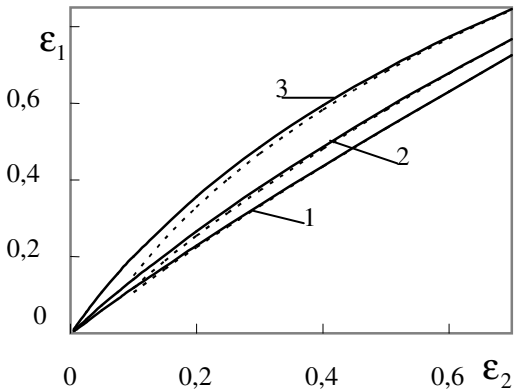

Рис. 4. Залежність між розмірами зон

Спочатку (за малих навантажень) відношення між розмірами зон зростає ($\varepsilon_2/\varepsilon_1$ зменшується), а при $\tilde{q} > 0{,}2$ прямує до лінійного.

Висновки. Запроваджено двофазну зону передруйнування (ослабленого контакту) у пластині з пружним включенням, що дало можливість уникнути сингулярності напружень в околах його країв та отримати механічно коректні обмежені напруження в усіх точках композиції. Досліджено вплив наванта-

ження, довжини зон розпушення та зсувної границі міцності контактних меж матриця-включення на розвиток локалізованих зон передруйнування.

Збільшення зони розпушення за фіксованого рівня навантаження видовжує зони передруйнування, хоча самі області пластичності при цьому зменшуються. З розвитком зон передруйнування абсолютна різниця між їх довжинами для різних зон розпушення зменшується, що пояснюється зростанням впливу зон пластичного деформування. Зі збільшенням жорсткості стрічкового включення чи його товщини довжина локалізованих зон передруйнування зростає за інших однакових умов.

1. Мусхелишвили Н..И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с. **2**. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги де формівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с. **3**. Панасюк В.В., Бережницкий Л.Т., Труш И.И. Распределение напряжений около дефектов типа жестких остроугольных включений // Проблемы прочности. – 1972. – №7. – С. 3-9. **4**. Бережницкий Л.Т., Громяк Р.С. К оценке предельного состояния матрицы в окрестности остроконечного жесткого включения // Физико-химическая механика материалов. – 1977. – Т.13, № 2. – С. 39-47. **5**. Brussat T.R., Westmann R.A. Interfacial slip around rigid fiber inclusions // J. Comp. Mater. – 1974. – V.8, N 4. – P. 364-377. **6**. Shioiri J., Inoue K. Micromechanics of interfacial failure in short fiber reinforced composite materials // Rep. 1-st Soviet-Japanese Symp. on Composite Materials. – Moscow, 1979. – P. 286-295. **7**. Бережницкий Л.Т., Кундрат Н.М. О пластических полосах у вершины линейного жесткого включения // Проблемы прочности. – 1982. – № 11. – С. 66-69. **8**. Кундрат М.М. Композиція з жорстким лінійним включенням в модельному формулюванні // Вісник Львівського Університету. Серія прикладна математика. – 1999. – Вип. 1. – С. 146-151. **9**. Кундрат М.М. Гранична рівновага композиції з жорсткими лінійними включеннями // Шоста Всеукраїнська наукова конференція "Застосування обчислювальної техніки, математичного моделювання у наукових дослідженнях". Тези доповідей. – Львів, 1999. – С. 61-62. **10**. Кундрат М.М. Гранична рівновага композиції з жорстким включенням // Вісник НУВГП. Збірник наукових праць. – 2008. – Вип. 3 (43). – С. 326-333. **11**. Кундрат М.М., Сулим Г.Т. Зони передруйнування в композиції з пружним високомодульним включенням при симетричному та антисиметричному навантаженнях // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, 2003. – С. 322–324. **12**. Сулим Г.Т., Кундрат М.М. Відшарування тонкого жорсткого включення при циклічному навантаженні за умов плоскої задачі термопружності // Праці 13-го міжнародного колоквіуму "Механічна втома металів - 2006" 25-28 вересня 2006р, Тернопіль. – Тернопіль: Тернопільський державний технічний університет ім. Івана Пулюя, 2006. – С 504-509. **13**. Bożydarnik V.V., Kundrat M.M., Sulym H.T. Pole naprężeń w ośrodku izotropowym z cienką inkluzją z uwzględnieniem więzów osłabionych / I Kongres Mechaniki Polskiej, Warszawa, 28–31 sierpnia 2007 r. – Warszawa, 2007. – S. 135-142. **14**. Сулим Г.Т. Система лінійних включень в ізотропному середовищі // ДАН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 7. – С. 62-65. **15**. Божидарник В.В., Сулим Г.Т. Продольный сдвиг изотропной среды с системой туннельных разрезов // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1990. – Вып. 243. – С. 10-12.

Рецензент: д. т. н., професор Бабич Є.М. (НУВГП)