Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства і природокористування

Кафедра електротехніки і автоматики

043-43

Методичні вказівки

до виконання практичних занять з дисципліни

„Ідентифікація і моделювання об'єктів автоматизації"

студентами за напрямом підготовки 6.050202

"Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології"

денної та заочної форм навчання

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рекомендовано методичною комісією за напрямом підготовки
6.050202 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології"
протокол №6 від 18.05.2011

Рівне 2011

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні вказівки до виконання практичних занять з дисципліни „Ідентифікація і моделювання об'єктів автоматизації" студентами за напрямом підготовки 6.050202 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" денної та заочної форм навчання /Б.П.Сидорчук. - Рівне: НУВГП, 2011. – 64с.

.

Упорядник Сидорчук Б.П., доцент кафедри електротехніки і автоматики.

Відповідальний за випуск Б.О.Баховець, професор, завідувач кафедри електротехніки і автоматики.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

© Сидорчук Б.П., 2011
© НУВГП, 2011

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Зміст

Практичне заняття №1. Ідентифікація об'єктів методами кореляційного аналізу ……..…..... 4

Практичне заняття №2. Ідентифікація моделей за методом найменших квадратів ……..….....18

Практичне заняття №3. Застосування методу найменших квадратів для побудови кривої регресії ….……..…..…..28

Практичне заняття №4. Ідентифікація об'єктів на основі повного та дробового факторних експериментів …..…….....41

Практичне заняття №5. Побудова моделей за методом Брандона .....……..……..…55

Навчально – методична література .....…….……55

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практичне заняття №1

Тема: Ідентифікація об'єктів методами кореляційного аналізу

***Мета*:** *Навчитись будувати емпіричну лінію регресії та розраховувати коефіцієнт кореляції*

Хід заняття

І. Усне опитування теоретичного матеріалу

Усне опитування провести за контрольними запитаннями та теоретичним матеріалом.

ІІ.Теоретичні відомості

Ідентифікація об'єктів методами кореляційного аналізу дозволяє встановити існування зв'язків між досліджуваними параметрами та оцінити ступінь такого зв'язку. Основними задачами кореляційного аналізу об'єкта (процесу) є:

- визначення форми зв'язку між вхідними $x_1,...,x_n$ і вихідними $y_1,...,y_m$ параметрами (отримання моделі – лінійної, нелінійної);
- розрахунок ступеня зв'язку між вхідними та вихідними параметрами;
- вибір вхідних змінних, які мають найбільший вплив на вихідну змінну і є незалежними (не впливають одна на одну).

У випадку одномірного об'єкта за експериментальними даними будують графічну залежність між вхідним x та вихідним параметром y, що називається *емпіричною лінією регресії.*

Методика отримання емпіричної лінії регресії наступна:

1.Експериментальні точки наносять на поле кореляції в координатах (x, y). Весь діапазон зміни x на полі кореляції (мал. 4.7) розбивається на рівні інтервали Δx.

2.Усі точки, що потрапили в даний інтервал Δx_j, відносять до його середини x_j. Для цього підраховують часткові середні $\bar{y}_j$ для кожного інтервалу:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

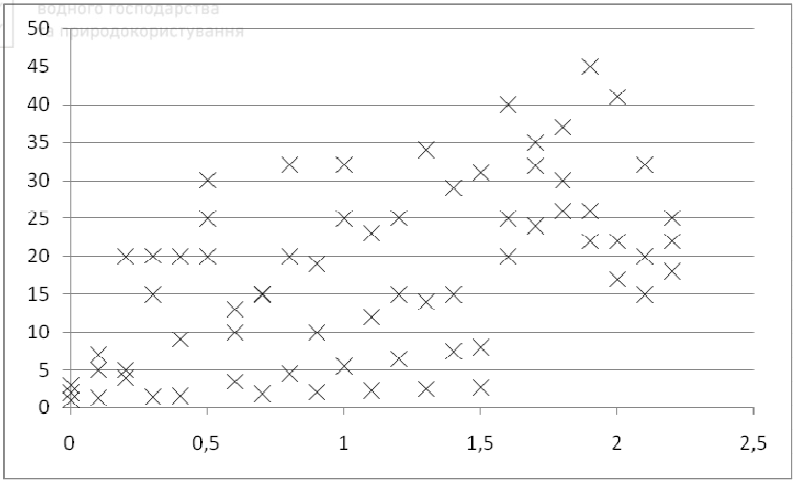

Рис.1. Кореляційне поле

$$\overline{y}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ji}, j = \overline{1,k},$$

де n_j — кількість експериментальних значень $y_{ji}, i = \overline{1,n_j}$ в інтервалі Δx_j; $\sum_{j=1}^{k} n_j = N$, де k — кількість інтервалів розбивки; N — кількість експериментальних даних в усіх інтервалах (обсяг вибірки).

3.Послідовно з'єднують точки $(x_j, \overline{y}_j)$ відрізками прямої. Отримана ламана називається емпіричною лінією регресії.

За формою емпіричної лінії регресії роблять попередні припущення: модель об'єкта може бути задати лінійним або нелінійним рівнянням. Для цього проводять оцінку ступеня зв'язку між параметрами методами кореляційного аналізу.

Величина лінійної залежності між двома параметрами вимірюється через простий коефіцієнт кореляції, величина залежності від декількох — за допомогою множинного коефіцієнта кореляції

Для оцінки ступеня лінійного зв'язку між вхідними та вихідними параметрами використовують коефіцієнт кореляції

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)(y_i - M_y)}{(n-1)\sqrt{D_X D_Y}}, \qquad (1)$$

де $K_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_x)(y_i - M_y)$ - називається другим змішаним моментом,

$D_X = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - M_X)^2$, $D_Y = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - M_Y)^2$ - дисперсії,

M_x, M_y - середні арифметичні за x, y,

n- кількість експериментів.

Для багатомірного об'єкта ступінь лінійного зв'язку між вихідною змінною y та k вхідними x_i ($j = \overline{1,k}$) оцінюється коефіцієнтом множинної кореляції

$$R_{xy} = \sqrt{a_1 r_{yx_1} + a_2 r_{yx_2} + ... + a_k r_{yx_k}}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Коефіцієнти a_j, $j = \overline{1,k}$ знаходять з наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} y_1^H = a_1 x_{11}^H + a_2 x_{21}^H + ... + a_k x_{k1}^H = \sum_{j=1}^{k} a_j x_{j1}^H \\ y_2^H = a_1 x_{12}^H + a_2 x_{22}^H + ... + a_k x_{k2}^H = \sum_{j=1}^{k} a_j x_{j2}^H \\ ..... \\ y_n^H = a_1 x_{1n}^H + a_2 x_{2n}^H + ... + a_k x_{kn}^H = \sum_{j=1}^{k} a_j x_{jn}^H \end{cases},$$

де y_i^H, x_{ji}^H нормовані значення відповідно вихідної та вхідних змінних в i-му експерименті:

$$y_i^H = \frac{y_i - M_y}{\sqrt{D_y}}, \quad x_{j_i}^H = \frac{x_{ji} - M_x}{\sqrt{D_x}}, \quad j = \overline{1,k}, \; i = \overline{1,n}.$$

Коефіцієнти кореляції r_{yx}, R_{xy} можуть приймати значення в

Національний університет
водного господарства
діапазоні від 0 до 1. Чим більше за абсолютним значенням r_{xy} (R_{xy}) тим сильніше лінійна залежність між параметрами *x* та *y*. Нульове (або близьке до нуля) значення коефіцієнта кореляції вказує на відсутність лінійного зв'язку між вхідними і вихідною змінними.

При $r_{xy} = 1$ має місце лінійна залежність між *x* та *y* у вигляді

$$y = b_o + b_1 x .$$

При $R_{xy} = 1$ лінійний зв'язок між y та k вхідними x_i ($j = \overline{1,k}$) задається у вигляді

$$y = y(x_1,...,x_k) = b_o + b_1 x_1 + ... + b_k x_k = \sum_{j=0}^{k} b_j x_j ,\ x_o = 1 .$$

Коефіцієнти $b_o, b_1, ..., b_k$ шукаються, як правило, методами регресійного аналізу.

III. Розв'язування задач

Задача 1.

Побудувати емпіричну лінію регресії та розрахувати коефіцієнт кореляції для об'єкта керування деякого резервуара з вільним витоком рідини. За вхідну величину x взяти зміну витрати на вході, за вихідну y – зміну вільного об'єму резервуара (об'єму, незаповненого рідиною).

В результаті проведення експериментів на об'єкті, отримані наступні значення x_i і y_i, $i = \overline{1,n}$, $n = 10$ - кількість експериментів (табл.1):

Таблиця 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
y_i	11	10	8	8,3	6	6,2	5,3	4,1	4,5	3,5

На основі проведених розрахунків встановити чи існує лінійна залежність між *x* та *y*.

Розв'язок.

Нанесемо експериментальні точки на поле кореляції:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

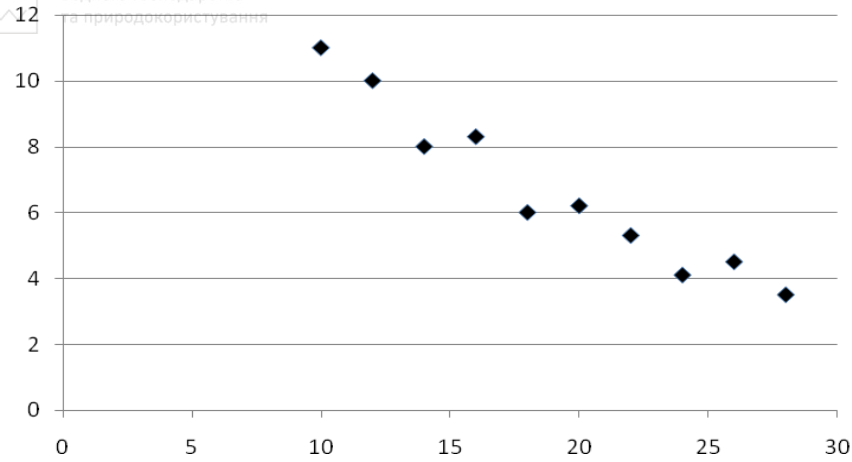

Рис.2. Експериментальні точки згідно даних табл.1

Весь діапазон зміни x на полі кореляції розбиваємо на рівні інтервали Δx_j, $j=\overline{1,k}$, де $k=5$.

Підраховуємо часткові середні $\overline{y_j}$ для кожного інтервалу за співвідношенням

$$\overline{y}_j=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ji},\ j=\overline{1,5}.$$

$$\overline{y}_1=\frac{1}{2}(11+10)=10{,}5;\quad \overline{y}_2=\frac{1}{2}(8+8{,}3)=8{,}15;$$

$$\overline{y}_3=\frac{1}{2}(6+6{,}2)=6{,}1;\quad \overline{y}_4=\frac{1}{2}(5{,}3+4{,}1)=4{,}7;$$

$$\overline{y}_5=\frac{1}{2}(4{,}5+3{,}5)=4;$$

Знаходимо середину кожного інтервалу x_j, $j=\overline{1,5}$:

$x_1=11;\ x_2=15;\ x_3=19;\ x_4=23;\ x_5=27.$

Наносимо на рис.2 сукупність отриманих точок (x_j, y_j) та з'єднуємо їх прямими. Отже, емпірична лінія регресії побудована

Національний університет водного господарства та природокористування

(рис.3).

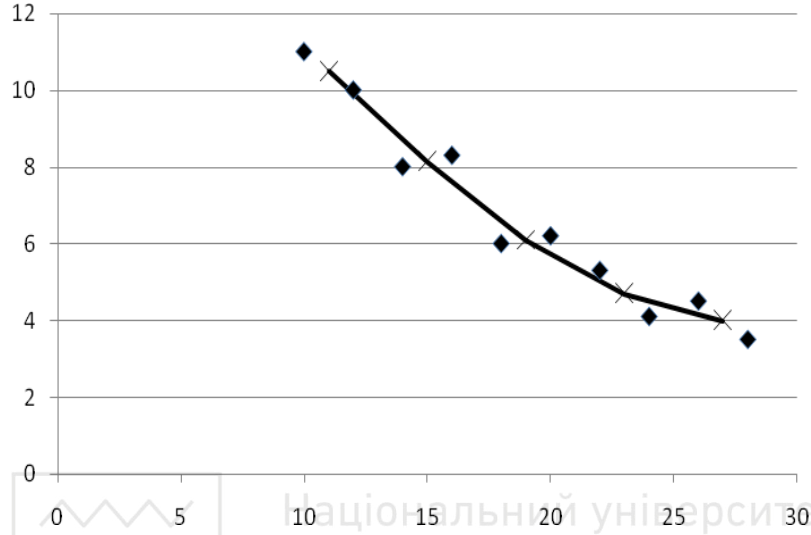

Рис.3. Емпірична лінія регресії за даними табл.1

Далі розрахуємо величини, що входять у формулу (1).

Знайдемо середнє арифметичне $M_Y = 66.9/10 = 6.69$ і $M_X = 190/10 = 19$, відхилення значень y_i і x_i від M_X, M_Y, а також їх добутки (табл.2).

Таблиця 2

i	x_i	y_i	$x_i - M_X$	$y_i - M_Y$	$(x_i - M_X)\times(y_i - M_y)$
1	10	11	-9	4,31	-38,79
2	12	10	-7	3,31	-23,17
3	14	8	-5	1,31	-6,55
4	16	8,3	-3	1,61	-4,83
5	18	6	-1	-0,69	0,69
6	20	6,2	1	-0,49	-0,49
7	22	5,3	3	-1,39	-4,17
8	24	4,1	5	-2,59	-12,95
9	26	4,5	7	-2,19	-15,33
10	28	3,5	9	-3,19	-28,71

Національний університет водного господарства та природокористування

Далі визначимо оцінки дисперсій

$$D_Y^* = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(y_i - M_Y)^2 = 6{,}46, \quad D_X^* = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(x_i - M_X)^2 = 36{,}67.$$

Підставивши отримані значення у формулу (1), отримаємо:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{10}(y_i - M_y)(x_i - M_x)}{9 * \sqrt{6{,}46 * 36{,}67}} = -\frac{134{,}30}{138{,}55} = -0{,}97.$$

Отже, можна зробити висновок, що величина Y зв'язана з X достатньо сильним причинним зв'язком, близьким до лінійної залежності, а отже зв'язок між вхідними та вихідними параметрами можна описати у виді $y = b_o + b_1 x$.

Задача 2.

Побудувати кореляційне поле та емпіричну лінію регресії для вебер-амперної характеристики $i(\psi)$ котушки з феромагнітним сердечником згідно з наступними експериментальними даними:

Таблиця 3

ψ, Вб	0,1	0,25	0,35	0,45	0,55	0,75	1,0
i, А	0,02	0,07	0,12	0,18	0,22	0,35	0,45

Розв'язок.

Для побудови емпіричної лінії регресії нанесемо всі експериментальні точки ψ, i на систему координат (ψ, i). Далі весь діапазон зміни ψ на полі кореляції розіб'ємо на три рівні інтервали:

$$\Delta\psi = \frac{1{,}0 - 0{,}1}{3} = 0{,}3.$$

Отже, весь діапазон зміни ψ розбито на наступні інтервали:

$\Delta\psi_1 \in (0{,}1;0{,}4)$, $\Delta\psi_2 \in (0{,}4;0{,}7)$, $\Delta\psi_3 \in (0{,}7;1{,}0)$.

Знайдемо в кожному з інтервалів середні значення:

$$\overline{\psi_1} = \frac{0{,}1 + 0{,}4}{2} = 0{,}25, \ \overline{\psi_2} = \frac{0{,}4 + 0{,}7}{2} = 0{,}55, \ \overline{\psi_3} = \frac{0{,}7 + 1{,}0}{2} = 0{,}85.$$

Національний університет
водного господарства

Далі підрахуємо часткові середні $\bar{i}_j$ для кожного інтервалу $j=1,2,3$:

$$\bar{i}_1=\frac{0{,}02+0{,}08+0{,}14}{3}=0{,}08,\ \bar{i}_2=\frac{0{,}18+0{,}22}{2}=0{,}2,\ \bar{i}_3=\frac{0{,}35+0{,}45}{2}=0{,}4.$$

Потім в системі координат (ψ,i) наносимо точки $(\bar{\psi}_j,\bar{i}_j)$, $j=1,2,3$ та послідовно їх з'єднуємо відрізками прямої. В результаті отримуємо емпіричну лінію регресії (рис.4).

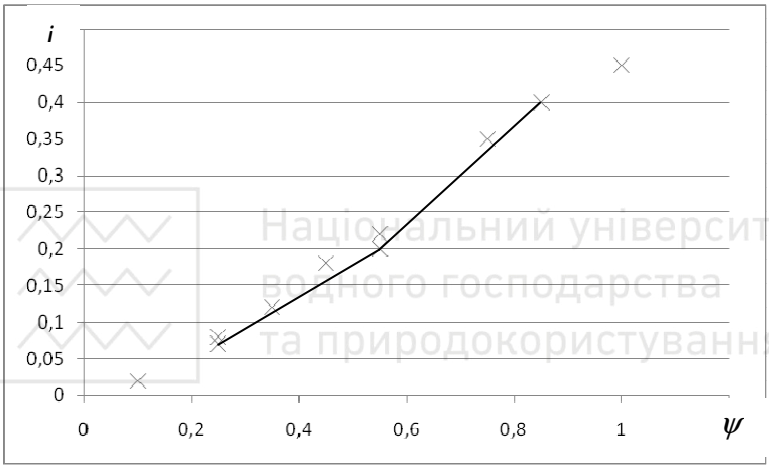

Рис.4 Емпірична лінія регресії за даними табл.3

IV.Самостійна робота

В результаті проведення експериментів на об'єкті, отримані наступні значення вхідного сигналу x та вихідного сигналу y: x_i і y_i, $i=\overline{1,n}$, n -кількість експериментів(табл.4):

Таблиця 4

i	1	2	3	4	5
x_i	-3	-2,2	-0,5	-0,2	0,9
y_i	-1	-0,4	0	1,2	2

Необхідно :

а) побудувати емпіричну лінію регресії;

Національний університет
водного господарства
та природокористування

б) розрахувати коефіцієнт кореляції та встановити чи існує функціональна лінійна залежність між x та y.

Розв'язок.

Нанесемо експериментальні точки на поле кореляції:

Рис.5.Експериментальні точки згідно даних табл.4

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Весь діапазон зміни x на полі кореляції розбиваємо на рівні інтервали Δx_j, $j=\overline{1,k}$, де $k=3$: $\Delta x_j = \dfrac{|-3|+0{,}9}{3} = 1{,}3,\ j=\overline{1,k}$

Підраховуємо часткові середні $\overline{y_j}$ для кожного інтервалу за співвідношенням

$$\overline{y}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} y_{ji},\ j=\overline{1,3}.$$

$$\overline{y}_1 = \frac{1}{2}(-1-0{,}4) = -0{,}7;\ \ \overline{y}_2 = \frac{1}{2}(0+1{,}2) = 0{,}6;\ \ \ \overline{y}_3 = 2;$$

Знаходимо середину кожного інтервалу x_j, $j=\overline{1,3}$

$$x_1 = -3 + \frac{1{,}3}{2} = -2{,}35;\ \ x_2 = -3 + 1{,}3 + \frac{1{,}3}{2} = -1{,}05;$$

Національний університет водного господарства та природокористування

$$x_3 = -3 + 2 * 1{,}3 + \frac{1{,}3}{2} = 0{,}25 .$$

Наносимо на рис.5 сукупність отриманих точок (x_j, y_j) та з'єднуємо їх прямими. Отже, емпірична лінія регресії побудована (рис.6).

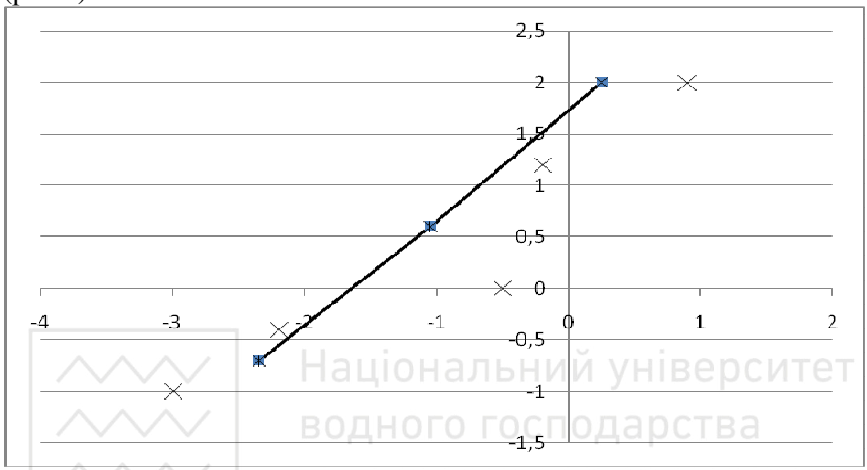

Рис.6. Емпірична лінія регресії за даними табл.6

Національний університет водного господарства та природокористування

Далі розрахуємо величини, що входять у формулу (1).

Знайдемо середнє арифметичне $M_Y = -5/5 = -1$ і $M_X = 1{,}8/5 = 0{,}36$, відхилення значень y_i і x_i від M_X, M_Y, а також їх добутки (табл.5).

Таблиця 5

i	x_i	y_i	$x_i - M_X$	$y_i - M_Y$	$(x_i - M_X)\times(y_i - M_y)$
1	-3	-1	-2	-1,36	2,72
2	-2,2	-0,4	-1,2	-0,76	0,912
3	-0,5	0	0,5	-0,36	-0,18
4	-0,2	1,2	0,8	0,84	0,672
5	0,9	2	1,9	1,64	3,116

Далі визначимо оцінки дисперсій

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$D_Y^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}(y_i - M_Y)^2 = 2{,}98\,, \quad D_X^* = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(x_i - M_X)^2 = 4{,}97\,.$$

Підставивши отримані значення у формулу (1), отримаємо:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(y_i - M_y)(x_i - M_x)}{2 * \sqrt{2{,}98 * 4{,}97}} = \frac{7{,}24}{7{,}69} = 0{,}941\,.$$

Отже, можна зробити висновок, що величина y зв'язана з x достатньо сильним причинним зв'язком, близьким до лінійної залежності, а тому зв'язок між вхідним та вихідним параметрами можна описати у виді $y = b_o + b_1 x$.

V.Домашнє завдання

1.Вивчити теоретичний матеріал по наступній темі практичних робіт.

2. Побудувати емпіричну лінію регресії за експериментальними даними згідно з табл.6 (де р- порядковий номер студента в журналі).

Таблиця 6

i	x_i	y_i
1	-6	-4*р
2	-5	-2,5*р
3	-4	-1*р
4	-2	0
5	0,5	1*р
6	1	1,5*р
7	2	1,7*р
8	3	1,9*р
9	5	2,0*р
10	6	2,1*р
11	7	2,05*р
12	8	2,1*р
13	9	2,4*р
14	9,5	2,45*р
15	10	2,5*р

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв’язок.

Нанесемо експериментальні точки на поле кореляції:

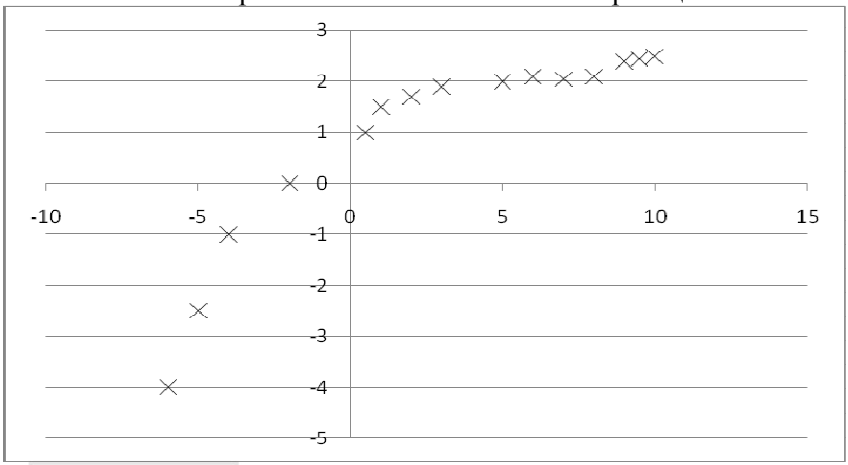

Рис.7. Експериментальні точки згідно табл.6

Весь діапазон зміни x на полі кореляції розбиваємо на три рівні інтервали Δx_j, $j=\overline{1,k}$, де $k=3$: $\Delta x_j=\dfrac{|-6|+10}{3}=5{,}33$, $j=\overline{1,3}$.

Підраховуємо часткові середні $\overline{y_j}$ для кожного інтервалу за співвідношенням

$$\overline{y}_j=\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}y_{ji},\ j=\overline{1,3}.$$

$$\overline{y}_1=\frac{1}{4}(-4-2{,}5-1+0)=-1{,}875;\ \overline{y}_2=\frac{1}{4}(1+1{,}5+1{,}7+1{,}9)=1{,}525;$$

$$\overline{y}_3=\frac{1}{7}(2+2{,}1+2{,}05+2{,}1+2{,}4+2{,}45+2{,}5)=2{,}23.$$

Знаходимо середину кожного інтервалу x_j, $j=\overline{1,3}$:

$$x_1=-6+\frac{5{,}33}{2}=-3{,}33;\ \ x_2=-3{,}335+5{,}33=1{,}99;\ x_3=1{,}995+5{,}33=7{,}32.$$

Наносимо на рис. 8 сукупність отриманих точок (x_j,y_j) та з’єднуємо їх прямими. Отже, емпірична лінія регресії побудована

Національний університет водного господарства та природокористування

(рис.8).

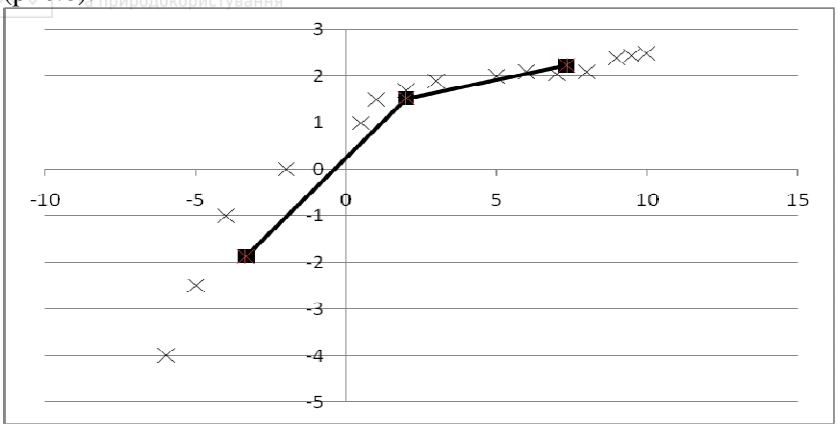

Рис.8. Емпірична лінія регресії

VI.Контрольні запитання.

1. Які основні задачі кореляційного аналізу?
2. Що називається емпіричною лінією регресії?
3. В чому полягає методика отримання емпіричної лінії регресії?
4. Для чого використовуються коефіцієнти кореляції?
5. Як розраховується простий коефіцієнт кореляції?
6. Як розраховується множинний коефіцієнт кореляції?
7. Якщо простий коефіцієнт кореляції рівний 1, якою залежністю можна описати зв'язок між вхідними та вихідними параметрами?
8. Яке співвідношення називається другим змішаним моментом?
9. За допомогою якого коефіцієнта вимірюється ступінь зв'язку між вихідною змінною y та k вхідними?
10. Який параметр вказує на відсутність лінійного зв'язку між вхідними і вихідною змінними?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практичне заняття №2

Тема: Ідентифікація моделей за методом найменших квадратів

***Мета*:** *Навчитись будувати регресійні моделі*

Хід заняття

І. Письмове опитування теоретичного матеріалу

І варіант:

1) Для чого використовується метод найменших квадратів?

2) Яка функція MatLab використовується для побудови кривої регресії?

3) Який найпростіший вигляд рівняння моделі?

ІІ варіант

1) Яка основна ідея методу найменших квадратів?

2) Що називається лінією регресії?

3) Як аналітично записується умова мінімізації суми квадратів відхилень вихідного параметра об'єкта від моделі?

ІІ.Теоретичні відомості

Метод найменших квадратів застосовується для обробки експериментальних даних, в тому числі і для обробки вхідних і вихідних сигналів.

Розглянемо найпростіший вигляд рівняння моделі, у якій на вихідну величину *y* впливає одна вхідна величина *x*

$$y(x) = b_o + b_1 x .$$

Для визначення параметрів моделі варто знайти значення коефіцієнтів b_o, b_1. За відсутності перешкод для цього достатньо двох дослідів і розв'язати рівняння

$$y_1 = b_o + b_1 x_1 ;\ y_2 = b_o + b_1 x_2 .$$

Якщо досліджувана система характеризується лінійною залежністю і в ній не виникають перешкоди, то всі інші експериментальні дані повинні укладатися на прямій. Однак на практиці завжди існує розкид результатів, обумовлений впливом випадкових факторів. У таких випадках для знаходження коефіцієнтів b_o і b_1 проводять *N* дослідів і одержують невизначену

Національний університет водного господарства та природокористування

систему рівнянь

$$y_1 = b_o + b_1 x_1;\ y_2 = b_o + b_1 x_2;$$

.....

$$y_N = b_o + b_1 x_N$$

Після цього виникає задача усереднення експериментальних даних, зокрема за методом найменших квадратів.

Основна ідея методу найменших квадратів (МНК) полягає в заміні емпіричних даних теоретичними, тобто даними, одержаними в результаті рішення рівняння. Якщо нанести експеременталні точки на графік, то лінія, що найбільш повно відображає закономірність цих даних та побудована за методом найменших квадратів називається лінією регресії. Ця лінія має такі властивості, що відхилення дослідних даних від даних, одержаних за МНК, буде мінімальним.

Метод найменших квадратів базується на мінімізації F — суми квадратів відхилень вихідного параметра об'єкта від моделі. Аналітично ця умова записується у вигляді

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left[y_j - y(x) \right]^2 = min, \qquad (2)$$

де y_j експериментальні значення вихідної величини в досліді j.

Або для моделі $y(x) = b_o + b_1 x$

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left(y_j - b_o - b_1 x_j \right)^2 = min.$$

Знайдемо похідні по b_o, b_1 від функції F

$$\frac{\partial F}{\partial b_o} = 2\sum_{j=1}^{N} \left(y_j - b_o - b_1 x_j \right), \ \frac{\partial F}{\partial b_1} = 2\sum_{j=1}^{N} \left(y_j - b_o - b_1 x_j \right) x_j$$

та прирівняємо до нуля:

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = \sum_{j=1}^{N} \left(b_o + b_1 x_j \right), \ \sum_{j=1}^{N} y_j x_j = \sum_{i=1}^{n} \left(b_o x_j + b_1 x_j^2 \right).$$

Отже, будемо мати наступну систему рівнянь:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{N} y_j = Nb_o + b_1 \sum_{j=1}^{N} x_j, \\ \sum_{j=1}^{N} y_j x_j = b_o \sum_{j=1}^{N} x_j + b_1 \sum_{j=1}^{N} x_j^2. \end{cases}$$

Звідки знаходимо невідомі коефіцієнти b_0, b_1 лінії регресії :

$$b_1 = \frac{N\sum_{j=1}^{N} y_j x_j - \sum_{j=1}^{N} y_j \sum_{j=1}^{N} x_j}{N\sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right)^2}, \quad b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} y_j - b_1 \sum_{j=1}^{N} x_j}{N}.$$

Для побудови регресивної моделі (тобто кривої регресії) в MatLab використовується команда $polytool(x, y)$, що створює діалогове вікно (рис.1), з допомогою якого можна оцінити і при необхідності скоректувати отриману регресивну модель.

Дане вікно містить:

- поле відображення даних і графіка регресивної моделі, а також додатково відображаються границі довірчого інтервалу, який характеризує точність моделі,
- список вибору степені полінома для рівняння регресії (Degree),
- поле введення /встановлення значень x та y,
-випадаючий список Export для вибору величин, які будуть збережені в робочому просторі MatLab (при виборі All – будуть збережені всі величини , відображені у вікні . При цьому програма пропонує назви для цих величин, які користувач може змінити).

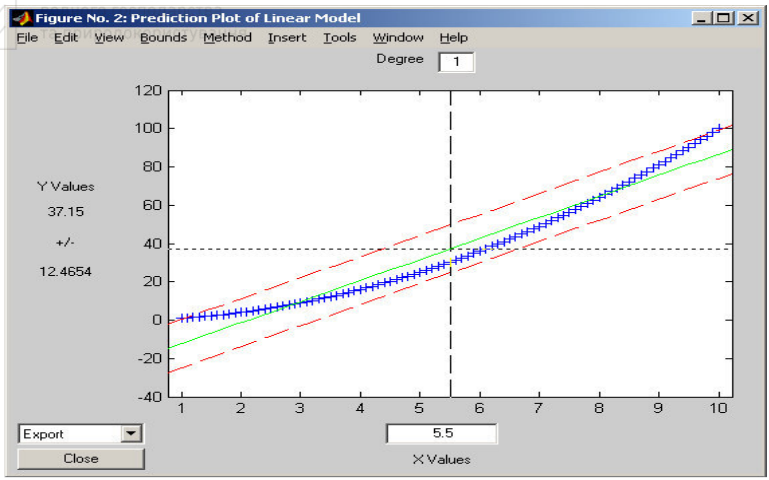

Рис.1. Лінія регресії в MatLab

III. Розв'язування задач

Задача 1.

Для деякого об'єкта експериментальні значення вхідного та вихідного сигналу x_i, y_i представлені в таблиці 1. Використовуючи метод найменших квадратів побудувати регресійну модель об'єкта, що описується лінійною залежністю $y = ax + b$.

Таблиця 1.

№ досліду	1	2	3	4	5
x	-2	0	1	3	4
y	-1	-0.5	0	1	3

Побудувати графік кривої регресії.

Розв'язок.

Експериментальні точки нанесемо на поле кореляції в координатах *(x,y)* (рис.2)*:*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

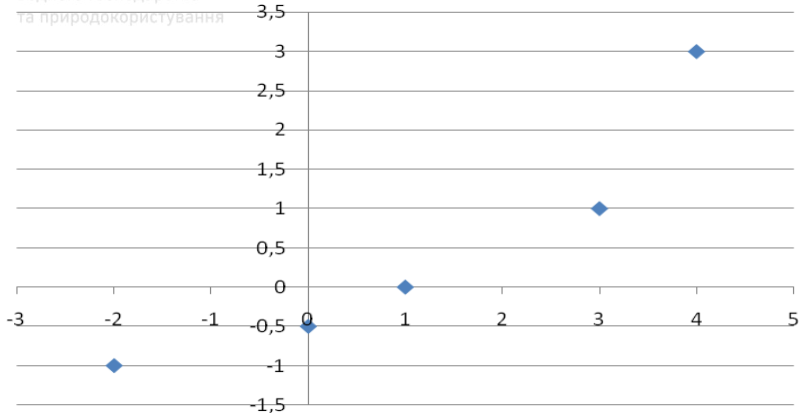

Рис.2.Поле кореляції згідно даних табл.1

Проведемо ідентифікацію моделі за методом найменших квадратів. Для цього попередньо знайдемо значення наступних виразів:

N=5; $\sum_{i=1}^{5} x_i = -2+0+1+3+4 = 6;$

$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = (-2)^2 + 0 + 1^2 + 3^2 + 4^2 = 30;$

$\sum_{i=1}^{5} y_i = (-1)+(-0{,}5)+0+1+3 = 2{,}5;$

$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = -2*(-1)+0*(-0{,}5)+1*0+3*1+4*3 = 17.$

Далі підставимо отримані значення в систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} y_j = Nb + a\sum_{j=1}^{5} x_j, \\ \sum_{j=1}^{5} x_j y_j = b\sum_{j=1}^{5} x_i + a\sum_{j=1}^{5} x_j{}^2. \end{cases}$$

В результаті матимемо:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} 2{,}5 = 5b + 6a, \\ 17 = 6b + 30a, \end{cases}$$

звідки:

$$b = \frac{2{,}5 - 6a}{5};\ 17 = 6 * \frac{2{,}5 - 6a}{5} + 30a = 3 - 7{,}2a + 30a = 3 + 22{,}8a;$$

$$a = 0{,}614;\ \ b = \frac{2{,}5 - 6 * 0{,}614}{5} = -0{,}237.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд $y = 0{,}614x - 0{,}237$.

Побудуємо графік отриманої лінії регресії. Для цього знайдемо дві точки даної прямої:

при $x = 0 \Rightarrow\ \ y = -0{,}237;$ при $x = 4 \Rightarrow\ \ y = 2{,}22$.

Нанесемо отримані точки на поле кореляції та проведемо через них лінію (рис.3):

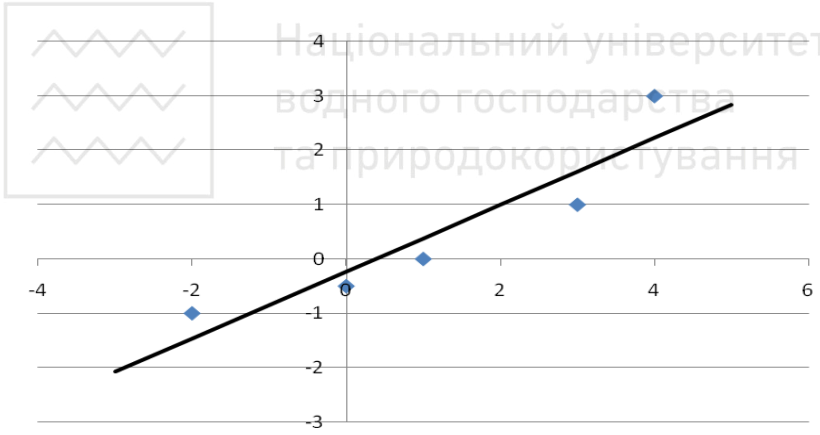

Рис 3. Лінія регресії $y = 0{,}614x - 0{,}237$

Задача 2.

Використовуючи метод найменших квадратів побудувати лінію регресії для вебер-амперної характеристики $I(\psi)$ котушки з феромагнітним сердечником згідно з даними, наведеними в таблиці.

Таблиця 2

ψ, Вб	0,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,11
I, А	0,0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язок.

Експериментальні точки нанесемо на поле кореляції в координатах ψ, I (рис.4)*:*

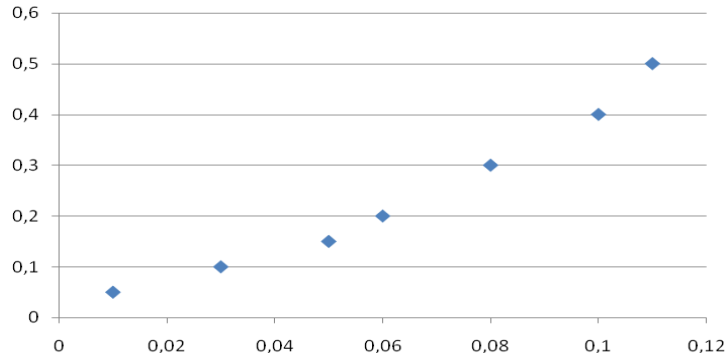

Рис.4.Поле кореляції згідно з даними табл.2

Проведемо ідентифікацію моделі за методом найменших квадратів. Для цього попередньо знайдемо значення наступних виразів:

N=7; $\sum_{j=1}^{5} \psi_j = 0{,}01 + 0{,}03 + 0{,}05 + 0{,}06 + 0{,}08 + 0{,}1 + 0{,}11 = 0{,}44$*;*

$$\sum_{j=1}^{5} \psi_j^2 = (0{,}01)^2 + (0{,}03)^2 + (0{,}05)^2 + (0{,}06)^2 + (0{,}08)^2 + (0{,}1)^2 + (0{,}11)^2 = 0{,}0356;$$

$$\sum_{j=1}^{5} I_j = (0{,}05)^2 + (0{,}1)^2 + (0{,}15)^2 + (0{,}2)^2 + (0{,}3)^2 + (0{,}4)^2 + (0{,}5)^2 = 1{,}7;$$

$$\sum_{j=1}^{5} \psi_j I_j = 0{,}01 * 0{,}05 + 0{,}03 * 0{,}1 + 0{,}05 * 0{,}15 + 0{,}06 * 0{,}2 +$$

$$+ 0{,}08 * 0{,}3 + 0{,}1 * 0{,}4 + 0{,}11 * 0{,}5 = 0{,}142 .$$

Далі підставимо отримані значення в систему рівнянь:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{5} I_j = Nb + a\sum_{j=1}^{5} \psi_j, \\ \sum_{j=1}^{5} \psi_j I_j = b\sum_{j=1}^{5} \psi_j + a\sum_{j=1}^{5} \psi_j{}^2. \end{cases}$$

В результаті матимемо

$$\begin{cases} 1{,}7 = 7b + 0{,}44a, \\ 0{,}142 = 0{,}44b + 0{,}0356a, \end{cases}$$

Звідки $b = \dfrac{1{,}7 - 0{,}44a}{7}$;

$$0{,}142 = 0{,}44 * \frac{1{,}7 - 0{,}44a}{7} + 0{,}0356\,a = 0{,}107 - 0{,}0277\,a + 0{,}0356\,a =$$

$$= 0{,}107 + 0{,}0079a;$$

$$a = 4{,}43;\ b = \frac{1{,}7 - 0{,}44 * 4{,}43}{7} = -0{,}0356.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд: $I = 4{,}43\psi - 0{,}0356$.

Побудуємо графік отриманої лінії регресії. Для цього знайдемо дві точки даної прямої

при $\psi = 0 \Rightarrow\ I = -0{,}0356$; при $\psi = 0{,}1 \Rightarrow\ I = 0{,}407$.

Нанесемо отримані точки на поле кореляції та проведемо через них лінію (рис.5):

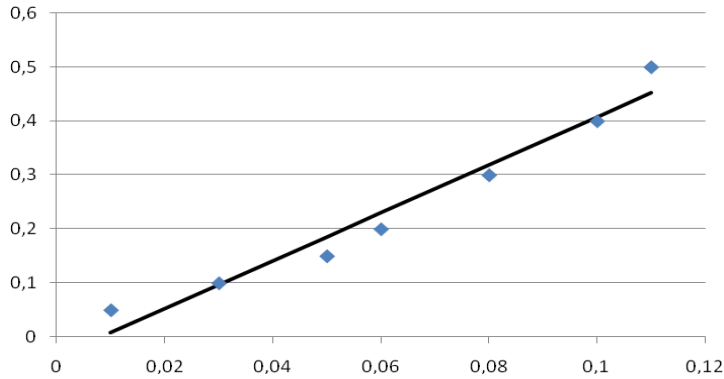

Рис 5. Лінія регресії $I = 4{,}43\psi - 0{,}0356$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

IV.Домашнє завдання.

1.Побудувати лінію регресії для вебер-амперної характеристики $I(\psi)$ котушки з феромагнітним сердечником згідно з даними, наведеними в таблицях 3, 4. Побудову здійснити двома способами, а саме за методом найменших квадратів та з допомогою програми Matlab. Зробити відповідні висновки, порівнявши отримані результати двох способів.

Таблиця 3

ψ, Вб	0,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,11

Таблиця 4

№ вар.	i, А							
1	0,0	0,06	0,09	0,14	0,21	0,32	0,38	0,51
2	0,1	0,2	0,33	0,45	0,46	0,55	0,67	0,82
3	0,12	0,24	0,37	0,52	0,6	0,68	0,76	0,98
4	0,15	0,3	0,43	0,55	0,67	0,74	0,9	1,0
5	0,08	0,1	0,17	0,24	0,32	0,45	0,55	0,6
6	0,05	0,06	0,1	0,2	0,35	0,4	0,5	0,7
7	0,11	0,17	0,22	0,35	0,52	0,67	0,75	0,98
8	0,34	0,46	0,52	0,68	0,71	0,86	0,98	1,12
9	0,25	0,36	0,42	0,51	0,65	0,71	0,80	0,91
10	0,05	0,07	0,09	0,2	0,25	0,35	0,55	0,9

2.Вивчити теоретичний матеріал по наступній темі практичного завдання.

Розв'язання домашнього завдання 1.

Завантажуємо программу Matlab. Для побудови рівняння регресії вводимо наступні команди

```
>> w=[0.01 0.03 0.05 0.06 0.08 0.1 0.11];
>> I=[0.05 0.1 0.15 0.2 0.3 0.4 0.5];
>> polytool(w,I)
```

В результаті отримуємо наступний графік (рис.6)

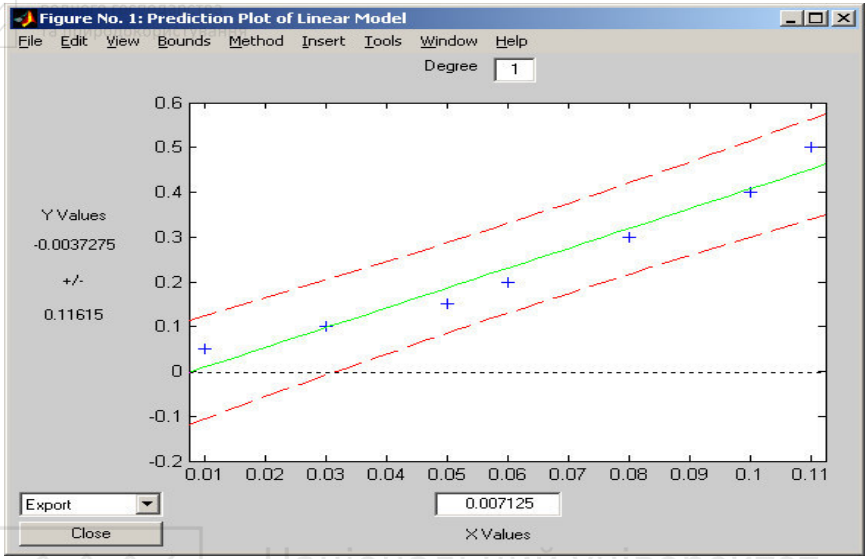

Рис.6. Лінія регресії $I = 4{,}42\psi - 0{,}0353$

У вікні, що відкрилося у полі Export із списку вибираємо parameters.

Далі переходимо в робочий простір і вводимо ім'я змінної betta. В результаті отримуємо

beta =

4.4245 -0.0353.

Отже, значення коефіцієнтів a та b: $a = 4{,}4245$, $b = -0{,}0353$.

Аналогічно задачі 2 будуємо лінію регресії згідно з даними табл.3,4. Робимо відповідні висновки.

V.Контрольні запитання

1. Для чого використовується метод найменших квадратів?
2. Який найпростіший вигляд рівняння моделі деякого об'єкта?
3. Яка основна ідея методу найменших квадратів?
4. Як аналітично записується умова мінімізації суми квадратів відхилень вихідного параметра об'єкта від моделі?
5. Що називається лінією регресії?
6. Яка функція MatLab використовується для побудови кривої регресії?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

7. Як знаходяться коефіцієнти лінії регресії?

8. Як вибрати степінь полінома лінії регресії при її створенні засобами MatLab?

9. Як вивести на екран коефіцієнти кривої регресії при її побудові з допомогою функції $polytool(x, y)$ програми MatLab?

10. Що характеризує довірчий інтервал в графічному вікні, створеному з допомогою функції $polytool(x, y)$ програми MatLab?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практичне заняття №3

Тема: Застосування методу найменших квадратів для побудови кривої регресії

***Мета*:** *Навчитись будувати криву регресії для нелінійного об'єкта та об'єкта, що має декілька вхідних параметрів*

Хід заняття

І. Усне опитування теоретичного матеріалу

Опитування теоретичного матеріалу за контрольними питаннями.

ІІ.Теоретичний матеріал

Форма лінії регресії може бути вибрана із наступної множини стандартних лінійних та нелінійних функціональних залежностей

1. $y = b_0 + b_1 x$;
2. $y = b_0 + b_1 x^2$;
3. $y = b_0 + b_1 e^x$;
4. $y = b_0 + b_1 \sqrt{x}$;
5. $y = b_0 + b_1 \ln x$;
6. $y = b_0 + b_1 x^p$;
7. $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 x}$;
8. $y = \dfrac{1}{b_0 + b_1 e^{-x}}$;
9. $y = b_o x^{b_1}$;
10. $y = \dfrac{x}{b_0 + b_1 x}$;
11. $y = b_0 + b_1 x + b_2 x_2 + \ldots$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

У випадку, якщо зв'язок між вхідним та вихідним параметром задається у вигляді $y = b_0 + b_1 x^2$, то відповідно до методу найменших квадратів, коефіцієнти лінії регресії шукатимемо наступним чином

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left(y_i - y(x)\right)^2 = min,$$

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left(y_i - b_o - b_1 x_j{}^2\right)^2 = min.$$

Знайдемо похідні по b_o, b_1 від функції F

$$\frac{\partial F}{\partial b_o} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - b_o - b_1 xj_i{}^2\right), \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 2\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - b_o - b_1 x_j{}^2\right)x_j{}^2$$

Національний університет водного господарства та природокористування

та прирівняємо до нуля

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(b_o + b_1 x_j{}^2 \right), \quad \sum_{j=1}^{n} y_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \left(b_o x_j{}^2 + b_1 x_j^4 \right).$$

Отже, будемо мати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} y_j = N b_o + b_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j x_j^2 = b_o \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^4. \end{cases}$$

Звідки знаходимо невідомі коефіцієнти b_0, b_1 лінії регресії

$$b_1 = \frac{N \sum_{j=1}^{n} y_j x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} y_j x_j^2}{N \sum_{j=1}^{n} x_j^4 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^2}, \quad b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j - b_1 \sum_{j=1}^{n} x_j^2}{N}.$$

Національний університет водного господарства та природокористування

У випадку багатомірного об'єкта лінійний зв'язок між y та k вхідними x_i ($i = \overline{1,k}$) задається у вигляді

$$y = y(x_1, ..., x_k) = b_o + b_1 x_1 + ... + b_k x_k = \sum_{i=0}^{k} b_i x_i, \; x_o = 1,$$

де b_i — підлягаючі визначенню коефіцієнти.

Задачу визначення коефіцієнтів $b_o, ..., b_k$ розв'язують таким чином, щоб розкид експериментальних точок щодо розрахункової залежності був мінімальний і підкорявся закону нормального розподілу. Мірою цього розкиду є вибіркова дисперсія. Якщо позначити через y_{pj} розрахункове, а через y_{ej} — експериментальне значення y в досліді j, то вибіркову дисперсію визначають за співвідношенням

$$S_p^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \left(y_{ej} - y_{pj} \right)^2}{\gamma} = \frac{F}{\gamma},$$

де N — кількість дослідів; γ — кількість незалежних дослідів, або число ступенів свободи (тобто загальна кількість дослідів мінус кількість дослідів, необхідне для визначення коефіцієнтів y рівнянні регресії).

Підбор коефіцієнтів b_i повинний відповідати умові $S_p^2 \to min$, або, що те ж саме, $F \to min$. Умовою мінімуму S_p^2, або F є рівність нулю їхніх частинних похідних по $b_o, b_1, ..., b_k$

$$\frac{\partial F}{\partial b_o} = \frac{\partial F}{\partial b_1} = \frac{\partial F}{\partial b_2} = ... = \frac{\partial F}{\partial b_k} = 0 .$$

Як і вище, складемо функцію F для такого лінійного полінома

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left[y_{ej} - \sum_{i=0}^{k} b_i x_{ij} \right]^2 ,$$

де x_{ij} — експериментальне значення x_i в досліді j.

Звідси одержимо для визначення $b_1, ..., b_k$ систему нормальних лінійних рівнянь, у якій число рівнянь k співпадає з числом невідомих

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i x_{ij} \right) x_{1j} = \sum_{j=1}^{N} x_{1j} y_j ;$$

.....

$$\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{k} b_i x_{ij} \right) x_{kj} = \sum_{j=1}^{N} x_{kj} y_j .$$

III. Розв'язування задач

Задача 1. На деякому об'єкті проведені експерименти. В результаті отримано значення вхідного x та вихідного y сигналів (x_i, y_i), що зведені в табл. 1.

Таблиця 1

x	0	0,1	0,2	0,5	0,6	0,8	1	2	3	4
y	0,1	1	1,2	1,4	1,9	1,95	2,1	2,5	2,8	2,9

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Необхідно побудувати криву регресії.

Розв'язок.

Нанесемо експериментальні точки на систему координат (x, y)

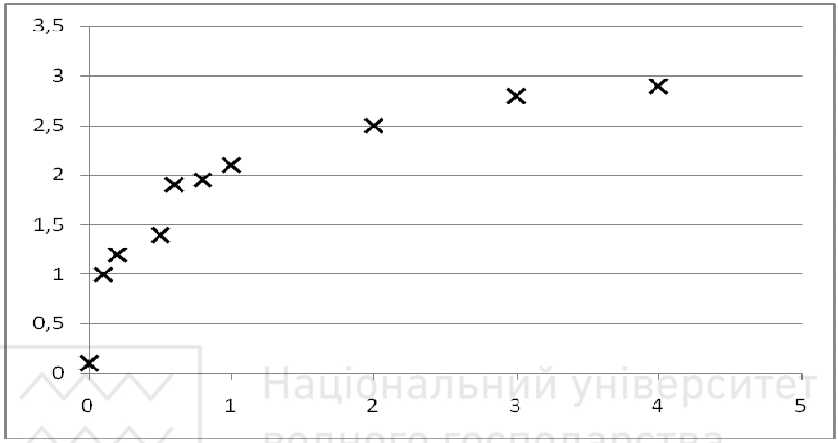

Рис.1.Експериментальні точки згідно з даними табл. 1

Як бачимо з рис.1 експериментальні точки наближено вкладаються на графік функції $y = b_0 + b_1\sqrt{x}$. Проведемо визначення коефіцієнів b_0, b_1 за методом найменших квадратів.

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left(y_j - y(x)\right)^2 = min,$$

$$F = \sum_{j=1}^{N} \left(y_j - b_o + b_1\sqrt{x_j}\right)^2 = min.$$

Знайдемо похідні по b_o, b_1 від функції F

$$\frac{\partial F}{\partial b_o} = 2\sum_{j=1}^{N}\left(y_j - b_o - b_1\sqrt{x_j}\right), \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 2\sum_{j=1}^{N}\left(y_j - b_o - b_1\sqrt{x_j}\right)\sqrt{x_j}$$

та прирівняємо до нуля:

$$\sum_{j=1}^{N} y_j = \sum_{j=1}^{n}\left(b_o + b_1\sqrt{x_j}\right), \quad \sum_{j=1}^{N} y_j\sqrt{x_j} = \sum_{j=1}^{n}\left(b_o\sqrt{x_j} + b_1 x_j\right).$$

Національний університет водного господарства та природокористування

Отже, будемо мати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{10} y_j = 10b_o + b_1 \sum_{j=1}^{10} \sqrt{x_j}, \\ \sum_{j=1}^{10} y_j \sqrt{x_j} = b_o \sum_{j=1}^{10} \sqrt{x_j} + b_1 \sum_{j=1}^{10} x_j. \end{cases}$$

Звідки знаходимо невідомі коефіцієнти b_0, b_1 лінії регресії

$$b_1 = \frac{10\sum y\sqrt{x} - \sum y \sum \sqrt{x}}{10\sum x - \left(\sum \sqrt{x}\right)^2}, \quad b_0 = \frac{\sum y - b_1 \sum \sqrt{x}}{10}.$$

Знайдемо значення наступних виразів

N=10;

$$\sum_{j=1}^{10} \sqrt{x_i} = 0 + \sqrt{0{,}1} + \sqrt{0{,}2} + \sqrt{0{,}5} + \sqrt{0{,}6} + \sqrt{0{,}8} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} = 9{,}286;$$

$$\sum_{j=1}^{10} y_j = 0{,}1 + 1 + 1{,}2 + 1{,}4 + 1{,}9 + 1{,}95 + 2{,}1 + 2{,}5 + 2{,}8 + 2{,}9 = 17{,}85;$$

$$\sum_{j=1}^{10} y_j \sqrt{x_j} = 0 * 0{,}1 + 1 * 0{,}316 + 1{,}2 * 0{,}447 + 1{,}4 * 0{,}707 +$$

$$+1{,}9 * 0{,}775 + 1{,}95 * 0{,}894 + 2{,}1 * 1 + +2{,}5 * 1{,}414 + 2{,}8 * 1{,}732 + 2{,}9 * 2 = 21{,}34;$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}5 + 0{,}6 + 0{,}8 + 1 + 2 + 3 + 4 = 12{,}2;$$

$$b_1 = \frac{10 * 21{,}34 - 17{,}85 * 9{,}286}{10 * 12{,}2 - 9{,}286^2} = \frac{213{,}4 - 165{,}75}{122 - 86{,}23} = \frac{47{,}69}{35{,}77} = 1{,}333;$$

$$b_0 = \frac{17{,}85 - 1{,}333 * 9{,}286}{10} = 0{,}547.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд: $y = b_0 + b_1\sqrt{x} = 0{,}547 + 1{,}333\sqrt{x}$.

Побудуємо графік лінії регресії.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

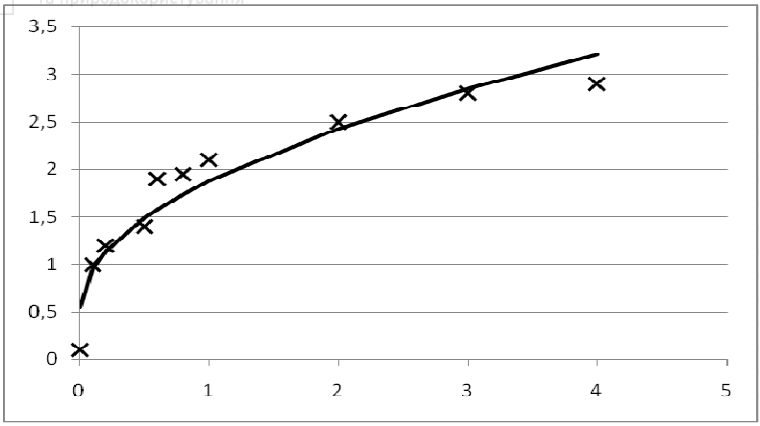

Рис. 2. Рівняння лінії регресії $y = 0{,}547 + 1{,}333\sqrt{x}$

Задача 2. Задано сукупність експериментальних даних (x_i, y_i) згідно з даними табл.2

Таблиця 2

x	0,05	0,11	0,15	0,20	0,50	0,70	1	1,5	2	2,5
y	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0,2	0,8	1,2	1,32

Необхідно встановити функціональний зв'язок між вхідним x та вихідним y сигналами, побудувавши лінію регресії.

Розв'язок.

Нанесемо експериментальні точки в систему координат (x, y)

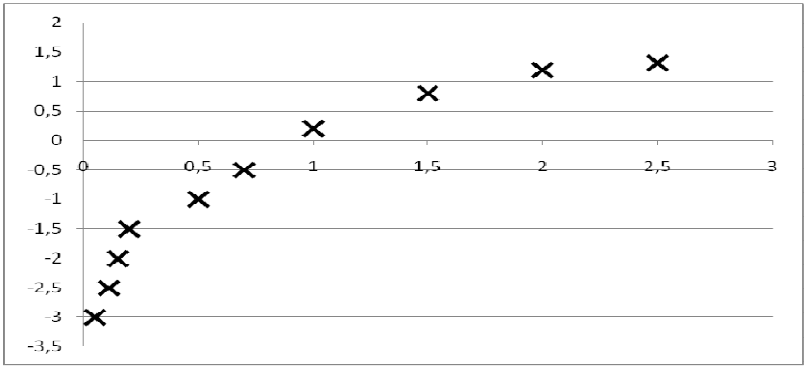

Рис.3.Експериментальні точки згідно даних табл.2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Як бачимо з рис. 3 експериментальні точки наближено вкладаються на графік функції: $y = b_0 + b_1 \ln x$. Проведемо визначення коефіцієнів b_0, b_1 за методом найменших квадратів.

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - y(x)\right)^2 = min,$$

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - b_o - b_1 \ln(x_i)\right)^2 = min.$$

Знайдемо похідні за b_o, b_1 від функції F

$$\frac{\partial F}{\partial b_o} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_o - b_1 \ln x_i\right), \quad \frac{\partial F}{\partial b_1} = 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - b_o - b_1 \ln(x_i)\right) \ln x_i$$

та прирівняємо до нуля

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \left(b_o + b_1 \ln x_i\right), \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(b_o \ln x_i + b_1 (\ln x_i)^2\right).$$

Отже, будемо мати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = N b_o + b_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i = b_o \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2. \end{cases}$$

Звідки знаходимо невідомі коефіцієнти b_0, b_1 лінії регресії

$$b_1 = \frac{N \sum y \ln x - \sum y \sum \ln x}{N \sum (\ln x)^2 - \left(\sum \ln x\right)^2}, \quad b_0 = \frac{\sum y - b_1 \sum \ln x}{N}.$$

Знайдемо значення наступних виразів:

N=10; $\sum_{i=1}^{10} \ln x_i = \ln(0{,}05) + \ln(0{,}11) + \ln(0{,}15) + \ln(0{,}2) + \ln(0{,}5) +$

$+ \ln(0{,}7) + \ln(1) + \ln(1{,}5) + \ln(2) + \ln(2{,}5) = -7{,}75;$

$\sum_{i=1}^{10} y_i = (-3) + (-2{,}5) + (-2) + (-1{,}5) + (-1) + (-0{,}5) + 0{,}2 + 0{,}8 + 1{,}2 + 1{,}32 = -6{,}98;$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\sum_{i=1}^{10} y_i \ln x_i = -3\ln(0{,}05) + (-2{,}3) * \ln(0{,}11) + (-2) * \ln(0{,}15) + (-1{,}5) * \ln(0{,}2) + (-1) * \ln(0{,}5) +$$

$$+(-0{,}5) * \ln(0{,}7) + 0{,}2 * \ln(1) + 0{,}8 * \ln(1) + 1{,}2 * \ln(1{,}5) + 1{,}32 * \ln(2) = 23{,}95;$$

$$\sum_{i=1}^{10} (\ln x_i)^2 = (\ln(0{,}05))^2 + (\ln(0{,}11))^2 + (\ln(0{,}15))^2 + (\ln(0{,}2))^2 + (\ln(0{,}5))^2 + (\ln(0{,}7))^2 +$$

$$+ (\ln(1))^2 + (\ln(1{,}5))^2 + (\ln(2))^2 + (\ln(2{,}5))^2 = 22{,}13;$$

$$b_1 = \frac{N \sum y \ln x - \sum y \sum \ln x}{N \sum (\ln x)^2 - (\sum \ln x)^2} = \frac{10 * 23{,}95 - 6{,}98 * 7{,}75}{10 * 22{,}13 - 7{,}75^2} = 1{,}15;$$

$$b_0 = \frac{\sum y - b_1 \sum \ln x}{N} = \frac{-6{,}98 - 4{,}5 * (-7{,}75)}{10} = 0{,}193.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд $y = b_0 + b_1 \ln x = 0{,}193 + 1{,}15 \ln x$.

Побудуємо графік лінії регресії.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

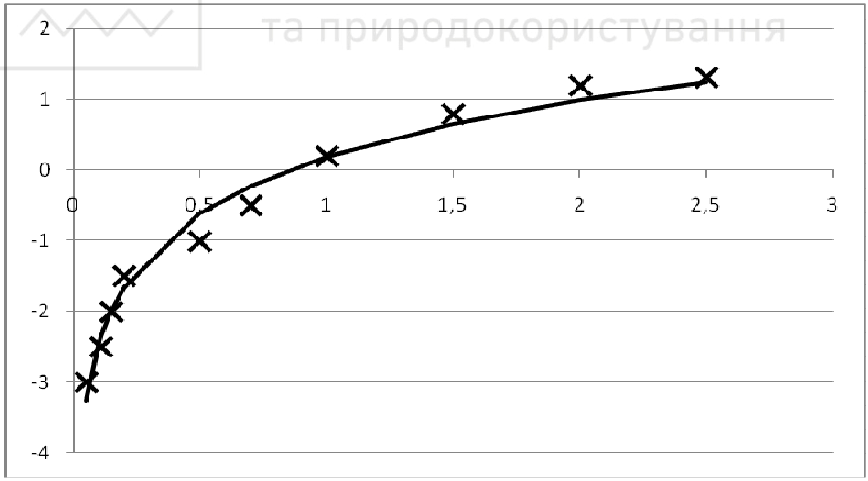

Рис.4. Лінія регресії $y = 0{,}193 + 1{,}15 \ln x$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

IV.Самостійна робота

Задача.

Використовуючи метод найменших квадратів побудувати лінію регресії у виді $I = b_0 + b_1 e^{\psi}$ згідно з експериментальними даними вебер-амперної характеристики $I(\psi)$ котушки з феромагнітним сердечником згідно з даними, наведеними в табл. 3.

Таблиця 3

ψ, Вб	0,0	0,01	0,03	0,05	0,06	0,08	0,10	0,11
I, А	0,0	0,08	0,1	0,15	0,18	0,5	1,2	1,4

Розв'язок.

Нанесемо експериментальні точки на систему координат (ψ, I)

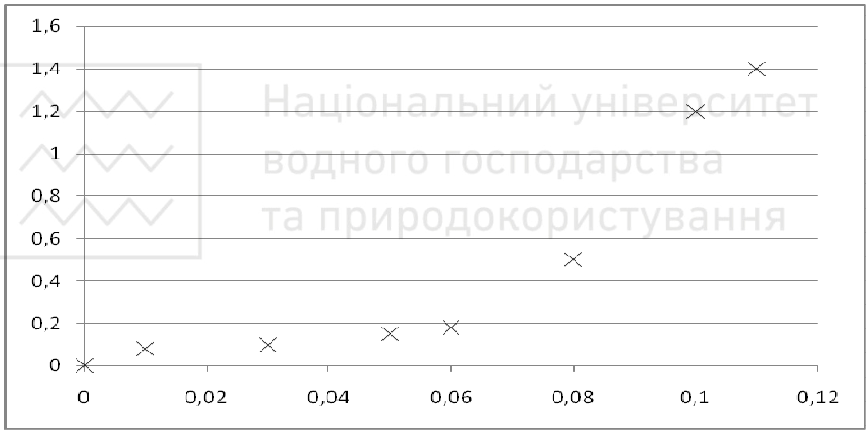

Рис.5.Експериментальні точки згідно з даними табл. 3

Проведемо визначення коефіцієнів b_0, b_1 за методом найменших квадратів

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(I_i - I(\psi)\right)^2 = min,$$

$$F = \sum_{i=1}^{N} \left(I_i - b_o - b_1 e^{\psi_i}\right)^2 = min.$$

Знайдемо похідні по b_o, b_1 від функції F

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{\partial F}{\partial b_o} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - b_o - b_1 e^{\psi_i}\right),\ \frac{\partial F}{\partial b_1} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(I_i - b_o - b_1 e^{\psi_i}\right)e^{\psi_i}$$

та прирівняємо до нуля:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \sum_{i=1}^{n}\left(b_o + b_1 e^{\psi_i}\right),\ \sum_{i=1}^{n} I_i e^{\psi_i} = \sum_{i=1}^{n}\left(b_o e^{\psi_i} + b_1\left(e^{\psi_i}\right)^2\right).$$

Отже, будемо мати наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{i=}^{n} I_i = Nb_o + b_1\sum_{i=1}^{n} e^{\psi_i}, \\ \sum_{i=1}^{n} I_i e^{\psi_i} = b_o\sum_{i=1}^{n} e^{\psi_i} + b_1\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\psi_i}\right)^2. \end{cases}$$

Звідки знаходимо невідомі коефіцієнти b_0, b_1 лінії регресії

$$b_1 = \frac{N\sum Ie^{\psi} - \sum I\sum e^{\psi}}{N\sum\left(e^{\psi}\right)^2 - \left(\sum e^{\psi}\right)^2},\ b_0 = \frac{\sum I - b_1\sum e^{\psi}}{N}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Знайдемо значення наступних виразів
N=8;

$$\sum_{i=1}^{8} e^{\psi_i} = e^0 + e^{0,01} + e^{0,03} + e^{0,05} + e^{0,06} + e^{0,08} + e^{0,1} + e^{0,11} = 8,46;$$

$$\sum_{i=1}^{8} I_i = 3,61;\ \sum_{i=1}^{8} I_i e^{\psi_i} = 3,96;\ \sum_{i=1}^{8}\left(e^{\psi_i}\right)^2 = 8,96;$$

$$b_1 = \frac{8\sum Ie^{\psi_i} - \sum I\sum e^{\psi_i}}{8\sum\left(e^{\psi_i}\right)^2 - \left(\sum e^{\psi_i}\right)^2} = \frac{8*3,96 - 3,61*8,46}{8*8,96 - 8,46^2} = 11,5;$$

$$b_0 = \frac{\sum I - b_1\sum e^{\psi}}{N} = \frac{3,61 - 11,5*8,46}{8} = -11,7.$$

Отже, рівняння регресії матиме вигляд $I = b_0 + b_1 e^{\psi} = -11,7 + 11,5e^{\psi}$.

Побудуємо графік лінії регресії.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

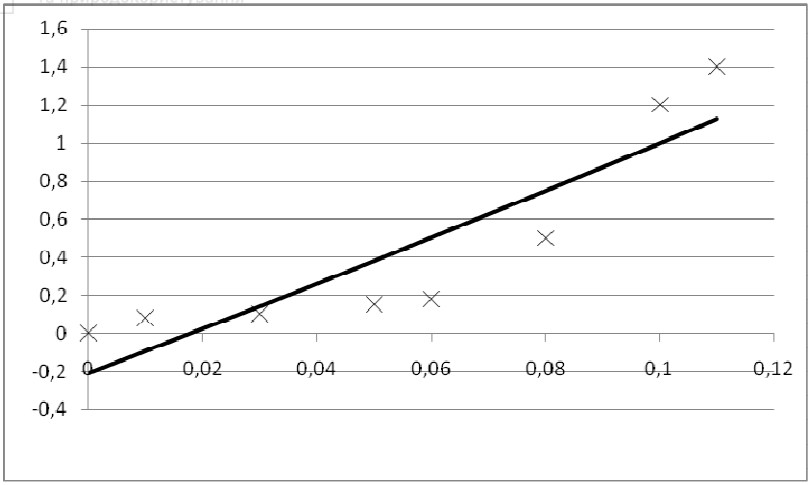

Рис.6. Лінія регресії $I = -11{,}7 + 11{,}5e^{\psi}$

V.Домашнє завдання

1. Для задачі з самостійної роботи засобами Matlab побудувати лінію регресії у виді $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$. Провести порівняння графіків, що побудовані за методом найменших квадратів та з допомогою Matlab та зробити відповідні висновки.

Розв'язок.

Завантажуємо программу Matlab. Для побудови лінії регресії вводимо наступні команди:

```
>> w=[0.01 0.03 0.05 0.06 0.08 0.1 0.11];
>> I=[0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.3 0.4 0.5];
>> polytool(w,I)
```

В результаті отримуємо наступний графік

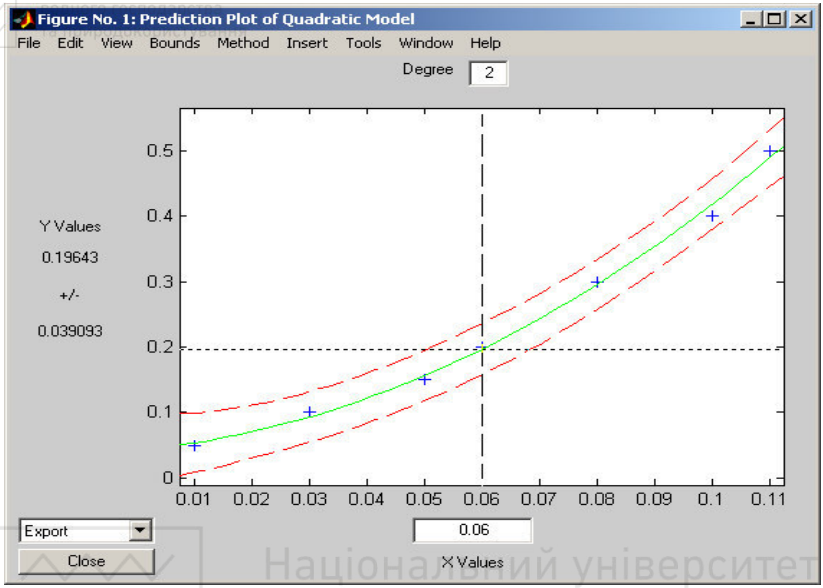

Рис.7. Лінія регресії $I = 0{,}0429 + 0{,}7738\psi + 29{,}76\psi^2$

У вікні, що відкрилося у полі Degree вводимо степінь полінома лінії регресії - 2. Далі у полі Export із списку вибираємо: parameters.

Далі переходимо в робочий простір і вводимо ім'я змінної betta. В результаті отримуємо

```
>> beta
beta =
   29.7619    0.7738    0.0429
```

Отже, значення коефіцієнтів $b_2 = 29{,}7619$, $b_1 = 0{,}7738$, $b_o = 0{,}0429$.

Отже, рівняння лінії регресії має вигляд

$$I = 0{,}0429 + 0{,}7738\psi + 29{,}76\psi^2.$$

Робимо висновок, що графік, побудований засобами Matlab більш точно апроксимує експериментальні дані. Отже, функція $I = 0{,}0429 + 0{,}7738\psi + 29{,}76\psi^2$ краще описує об'єкт дослідження у порівнянні з $I = b_0 + b_1 e^{\psi}$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

VI.Контрольні запитання

1. Для чого використовується метод найменших квадратів?
2. Як аналітично записується умова мінімізації суми квадратів відхилень вихідного параметра об'єкта від моделі?
3. Що називається лінією регресії?
4. Яка функція MatLab використовується для побудови кривої регресії?
5. Який найпростіший вигляд рівняння моделі об’єкта?
6. Якими стандартними функціями може бути задана лінія регресії?
7. Яким співвідношенням задається зв’язок між вхідними та вихідним параметром у випадку багатомірного об’єкта?
8. В чому полягає задача визначення коефіцієнтів регресійної моделі у випадку багатомірного об’єкта?
9. Якій умові повинен відповідати підбір коефіцієнтів регресійної моделі?
10. Як вибрати степінь полінома лінії регресії при її створенні засобами MatLab?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практичне заняття №4

Тема: Ідентифікація об'єктів на основі повного та дробового факторних експериментів

***Мета*:** *Навчитись будувати лінії регресії з використанням повного та дробового факторного експериментів*

Хід заняття

І. Усне опитування теоретичного матеріалу

Опитування теоретичного матеріалу згідно з контрольними запитаннями.

ІІ.Теоретичний матеріал

Планування експерименту – це процес вибору числа й умов здійснення дослідів, необхідних і достатніх для вирішення поставленої задачі з необхідною точністю. Один з найпростіших та найбільш розповсюджених методів планування експериментів є повний факторний експеримент. З використанням повного факторного експерименту можна отримати математичні моделі об'єктів.

Для опису об'єкта ідентифікації використовується математична модель у вигляді рівняння

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Вихідна змінна y – реакція об'єкта на вхідні впливи, називається функцією відгуку. Входи об'єкта $x_1, x_2, ..., x_n$ називаються факторами. Кожен фактор може приймати деяке число різних значень, що називаються рівнями.

Повний факторний експеримент будується наступним чином. На першому етапі вибирається центр досліджуваної області (центр плану) і в нього переноситься початок координат; вибирається інтервал варіювання по кожному фактору — відстань по даній осі від центра до експериментальної точки.

На наступному етапі роблять операцію приведення (кодування) змінних. Вона полягає в тому, що всі координати центра плану дорівнюють нулю, а інтервали варіювання приймають за одиницю.

+1-максимальне значення фактору x_i ;

Національний університет
водного господарства
-1-мінімальне значення фактору x_i .

Кодовані змінні зручні тим, що вся обробка результатів дослідів проводиться в стандартній формі, що не залежить від конкретних умов задачі; це істотно спрощує обчислення. Перехід від некодованих (натуральних) значень змінних x_i до кодованих z_i і назад виконується згідно з співвідношеннями

$z_i = (x_i - x_{i0})/\Delta i$ і відповідно $x_i = x_{i0} + z_i \Delta_i$.

де Δ_i - інтервал варіювання некодованої змінної x_i .

Розглянемо у приведених координатах найбільш часто застосовуваний план 1-го порядку для двох незалежних змінних x_1 і x_2 . Розташування дослідних кодованих точок показане на рис. 1. Точки розташовуються у вершинах квадрата, центр O якого збігається з центром плану, сторони паралельні осям і рівні 2.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

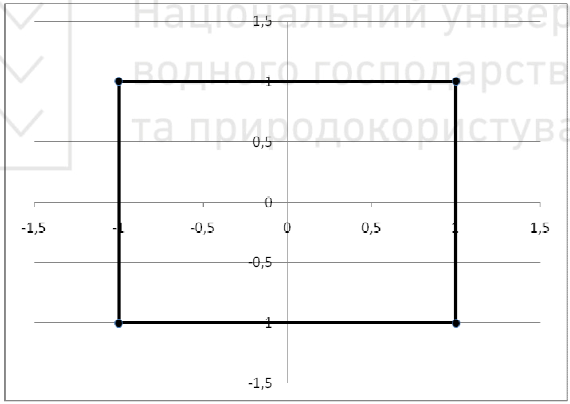

Рис.1.Розташування кодованих змінних

Матриця планування має наступний вигляд

№ досліду	z_1	z_2
1	+1	+1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	-1	-1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Важливим елементом розробки плану експерименту є вибір числа рівнів для кожного фактора. Найбільше поширення одержало планування факторів на двох рівнях, коли як рівні використовуються верхня і нижня границі інтервалу варіювання. Постановка експериментів за такими планами називається дворівневим повним факторним експериментом типу 2^n, де *n*— число факторів. Тоді для двох факторів число експериментів $2^2 = 4$, для трьох $2^3 = 8$ і т.д.

Після проведення експериментів згідно обраного плану, зв'язок між вхідними факторами та функцією відгуку вибирається у вигляді полінома першого степеня у виді

$$y = b_o + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n = b_o + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$$ - лінійна статична

модель, де коефіцієнти моделі $b_o, b_1, b_2, ..., b_n$ шукаються за наступними формулами

$$b_o = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j, \quad b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} z_{ij} y_j, \quad i = \overline{1,n}, \quad N$$ – кількість експериментів.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Дробовий факторний експеримент (ДФЕ).

Дворівневий план ефективний (особливо при *n* > 15), коли для перевірки адекватності моделі є достатня кількість ступенів свободи, тобто є перевищення числа дослідів *N* над числом коефіцієнтів моделі $(n+1)$, що визначаються.

У загальному випадку при наявності *n* параметрів і скороченні ПФЕ (повного факторного експерименту) на *k* ступенів вийде дробовий факторний експеримент об'ємом 2^{n-k}.

Для побудови дробових реплік використовують спеціальні алгебраїчні вирази. Їх називають генеруючими співвідношеннями або визначальними контрастами. *Генеруючим* називається співвідношення, яке показує, які взаємодіючі фактори замінені новими.

Генеруючимі співвідношення отримуються в результаті добутку факторів, наприклад

$z_3 = z_1 z_2$ або $z_3 = -z_1 z_2$.

Національний університет водного господарства та природокористування

Вигляд генеруючого співвідношення вибирається довільно.

Нормалізоване рівняння регресії записується у вигляді:

$$y_p = b_{o(i)} + \sum_{i=1}^{n} b_i z_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_i z_i z_k \ , \ k \neq i \ , \ p = 1,2,...,l \ , \qquad (1)$$

де $z_1,\ldots,\ z_n$ - кодовані змінні, $y_1,...,y_p$ - вихідні змінні.

Коефіцієнти b_i визначаються згідно з формулами

$$b_{op} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{pj} \ , \ p = \overline{1,l} \ ,$$

$$b_i = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{pj} z_{ij} \ , \ i = \overline{1,n} \ , \ p = \overline{1,l} \ , \qquad (2)$$

$$b_{ik} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_{pj} z_{ij} z_{kj} \ , \ i = \overline{1,n} \ , \ k \neq i \ , \ p = \overline{1,l} \ .$$

Планування експериментів засобами MatLab.

В склад програми MatLab входять функції, які забезпечують розробку основних видів плану експерименту

- повного факторного експерименту (ПФЕ);
- рандомізованого факторного експерименту (РФЕ);

Для створення ПФЕ використовується функція

ff2n(k)

де *k* – число факторів, які приймають участь в експерименті.

При введенні даної команди, отримаємо план експерименту.

Наприклад, при введенні команди

ff2n(3)

на екран виведеться наступна матриця планування

0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

де 0 , 1 – відповідно нижній та верхній рівні фактора.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Як бачимо, число дослідів $N = 2^k$ =8, де k - число факторів.

Для отримання рандомізованого плану використовується функція ***unidrnd(N,m,k),*** яка представляє собою генератор дискретної величини, рівномірно розподіленої на інтервалі [1:N].

При створенні плану експерименту величини ***N,m,k*** інтерпретуються наступним чином:

N – число рівнів факторів, які приймають участь в експерименті. Тобто передбачається, що число рівнів може бути більше двох і всі фактори будуть мати однакове число рівнів;

m – число експериментів, яке дослідник вибирає самостійно,

k – число факторів.

Наприклад, при виконанні команди: ***unidrnd(2,4,3)*** отримаємо наступну матрицю планування

2	1	2
1	2	2
2	2	2
2	1	2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

III. Розв'язування задач

Задача 1

Побудувати нормалізоване рівняння регресії математичної моделі деякої суміші, що формується із глини.

Найважливішими параметрами даної формувальної суміші, що визначають її якість, є міцність у сирому стані y_1, газопроникність y_2 і вологість y_3, тому математична модель повинна являти собою залежності цих властивостей від керованих змінних процесу. Основними факторами, що визначають якість суміші, вважається вміст у ній глини, кількість вологи, що вводиться в суміш і час перемішування.

Таблиця 1

Основні фактори, %		
Глина, x_1	Вода, x_2	Час перемішування, хв., x_3
20 10	5,8 4.2	10 5

Національний університет водного господарства та природокористування

Результати експериментів згідно повного факторного експерименту (ПФЕ) зведені в наступну таблицю

Таблиця 2

№ досліду	Основні фактори			Параметри суміші		
	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1	20	5.8	10	1,52	92	6,38
2	10	5.8	10	0,52	163	5,48
3	20	4.2	10	0,96	110	4,76
4	10	4.2	10	0,68	142	3,4
5	20	5.8	5	1,16	77	6,66
6	10	5.8	5	0,32	152	5,78
7	20	4.2	5	0,40	105	5,12
8	10	4.2	5	0,28	143	3,96

Розв'язок.

Введемо кодовані змінні

Таблиця 3

Рівень:	Основні фактори		
	Глина, z_1	Вода, z_2	Час перемішування, z_3
Верхній	+1	+1	+1
Нижній	-1	-1	-1

Побудуємо зведену таблицю кодованих змінних та параметрів суміші (згідно вихідної таблиці) та розрахуємо коефіцієнти $b_{op}, p = 1,2,3.$

Таблиця 4

№ досліду	Основні фактори (кодовані змінні)			Параметри суміші		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	1,52	92	6,38
2	-1	+1	+1	0,52	163	5,48
3	+1	-1	+1	0,96	110	4,76
4	-1	-1	+1	0,68	142	3,4
5	+1	+1	-1	1,16	77	6,66
6	-1	+1	-1	0,32	152	5,78
7	+1	-1	-1	0,40	105	5,12
8	-1	-1	-1	0,28	143	3,96

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл. 4

$\sum_{j=1}^{8} y_{pj}$	5,84	984	41,54
$b_{op} = \frac{1}{8}\sum_{j=1}^{8} y_{pj}, p = 1,2,3$	0,73	123	5,193

Згідно з рівняннями 2 розраховуємо коефіцієнти нормалізованого рівняння регресії.

Таблиця 5

№	*y1*z1*	*y1*z2*	*y1*z3*
1	1,52	1,52	1,52
2	-0,52	0,52	0,52
3	0,96	-0,96	0,96
4	-0,68	-0,68	0,68
5	1,16	1,16	-1,16
6	-0,32	0,32	-0,32
7	0,4	-0,4	-0,4
8	-0,28	-0,28	-0,28
$\sum_{j=1}^{8} y_{1j} z_{ij}$	**2,24**	**1,2**	**1,52**
$b_i, \overline{i = 1,3},\ p = 1$	**0,28**	**0,15**	**0,19**

Таблиця 6

№	*y2 * z1*	*y2 * z2*	*y2 * z3*
1	92	92	92
2	-163	163	163
3	110	-110	110
4	-142	-142	142
5	77	77	-77
6	-152	152	-152

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.6

7	105	-105	-105
8	-143	-143	-143
$\sum_{j=1}^{8} y_{2j} z_{ij}$	**-216**	**-16**	**30**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=2$	**-27**	**-2**	**3,75**

Таблиця 7

№	*y3*z1*	*y3*z2*	*y3*z3*
1	6,38	6,38	6,38
2	-5,48	5,48	5,48
3	4,76	-4,76	4,76
4	-3,4	-3,4	3,4
5	6,66	6,66	-6,66
6	-5,78	5,78	-5,78
7	5,12	-5,12	-5,12
8	-3,96	-3,96	-3,96
$\sum_{j=1}^{8} y_{2j} z_{ij}$	**4,3**	**7,06**	**-1,5**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=3$	**0,5375**	**0,8825**	**-0,1875**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 8

№	*y1 * z1 * z2*	*y1 * z1 * z3*	*y1 * z2 * z3*
1	1,52	1,52	1,52
2	-0,52	-0,52	0,52
3	-0,96	0,96	-0,96
4	0,68	-0,68	-0,68
5	1,16	-1,16	-1,16
6	-0,32	0,32	-0,32
7	-0,4	-0,4	0,4

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.8

8	0,28	0,28	0,28
$\sum_{j=1}^{8} y_{1j} z_{ij} z_{kj}$	**1,44**	**0,32**	**-0,4**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=1$	**0,18**	**0,04**	**-0,05**

Таблиця 9

№	*y2 * z1 * z2*	*y2 * z1 * z3*	*y2 * z2 * z3*
1	92	92	92
2	-163	-163	163
3	-110	110	-110
4	142	-142	-142
5	77	-77	-77
6	-152	152	-152
7	-105	-105	105
8	143	143	143
$\sum_{j=1}^{8} y_{2j} z_{ij} z_{kj}$	**-76**	**10**	**22**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=2$	**-9,5**	**1,25**	**2,75**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 10

№	*y3 * z1 * z2*	*y3 * z1 * z3*	*y3 * z2 * z3*
1	6,38	6,38	6,38
2	-5,48	-5,48	5,48
3	-4,76	4,76	-4,76
4	3,4	-3,4	-3,4
5	6,66	-6,66	-6,66
6	-5,78	5,78	-5,78
7	-5,12	-5,12	5,12
8	3,96	3,96	3,96

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.10

$\sum_{j=1}^{8} y_{3j} z_{ij} z_{kj}$	**-0,74**	**0,22**	**0,34**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=3$	**-0,0925**	**0,0275**	**0,0425**

Зведемо всі коефіцієнти нормалізованого рівняння регресії в таблицю 11.

Таблиця 11

Параметри суміші	Коефіцієнти регресії						
	b_o	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}
y_1	0,73	0,28	0,15	0,19	0,18	0,04	-0,05
y_2	123	-27	-2	3,75	-9,5	1,25	2,75
y_3	5,19	0,54	0,88	-0,19	-0,09	0,03	0,04

Згідно з рівняннями 1 записуємо нормалізовані рівняння регресії

$$y_1 = 0.73 + 0.28z_1 + 0.15z_2 + 0.19z_3 + 0.18z_1z_2 + 0.04z_1z_3 - 0.05z_2z_3.$$

$$y_2 = 123 - 27z_1 - 2z_2 + 3.75z_3 - 9.5z_1z_2 + 1.25z_1z_3 + 2.75z_2z_3.$$

$$y_3 = 5.19 + 0.54z_1 + 0.88z_2 - 0.19z_3 - 0.09z_1z_2 + 0.03z_1z_3 + 0.04z_2z_3.$$

IV. Самостійна робота

Для задачі 1 побудувати нормалізоване рівняння регресії у випадку, коли були проведені експерименти згідно дробового факторного експерименту (ДФЕ). При цьому ввести наступне генеруюче співвідношення

$$x_3 = x_1 x_2.$$

Розв'язок:

Побудуємо зведену таблицю кодованих змінних та параметрів суміші для ДФЕ.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 12

№ досліду	Основні фактори (кодовані змінні)			Параметри суміші		
	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3
1	+1	+1	+1	1,52	92	6,38
2	-1	-1	+1	0,68	142	3,4
3	-1	+1	-1	0,32	152	5,78
4	+1	-1	-1	0,40	105	5,12
$\sum_{j=1}^{4} y_{pj}$				2,92	491	20,68
$b_{op} = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{4} y_{pj}, p = 1,2,3$				0,73	122,7	5,17

Згідно рівнянь 2 розраховуємо коефіцієнти нормалізованого рівняння регресії

Таблиця 13

№	*y1*z1*	*y1*z2*	*y1*z3*
1	1,52	1,52	1,52
2	-0,68	-0,68	0,68
3	-0,32	0,32	-0,32
4	0,4	-0,4	-0,4
$\sum_{j=1}^{4} y_{1j} z_{ij}$	**0,92**	**0,76**	**1,48**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=1$	**0,23**	**0,19**	**0,37**

Таблиця 14

№	*y2* z1*	*y2* z2*	*y2* z3*
1	92	92	92
2	-142	-142	142
3	-152	152	-152
4	105	-105	-105

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.14

$\sum_{j=1}^{4} y_{2j} z_{ij}$	**-97**	**-3**	**-23**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=2$	**-24,25**	**-0,75**	**-5,75**

Таблиця 15

№	*y3*z1*	*y3*z2*	*y3*z3*
1	6,38	6,38	6,38
2	-3,4	-3,4	3,4
3	-5,78	5,78	-5,78
4	5,12	-5,12	-5,12
$\sum_{j=1}^{4} y_{2j} z_{ij}$	**2,32**	**3,64**	**-1,12**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=3$	**0,58**	**0,91**	**-0,28**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Таблиця 16

№	*y1 * z1*z2*	*y1 * z1 * z3*	*y1 * z2 * z3*
1	1,52	1,52	1,52
2	0,68	-0,68	-0,68
3	-0,32	0,32	-0,32
4	-0,4	-0,4	0,4
$\sum_{j=1}^{4} y_{1j} z_{ij} z_{kj}$	**1,48**	**0,76**	**0,92**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=1$	**0,37**	**0,19**	**0,23**

Таблиця 17

№	*y2 * z1 * z2*	*y2 * z1 * z3*	*y2 * z2 * z3*
1	92	92	92
2	142	-142	-142
3	-152	152	-152

Національний університет
водного господарства
та природокористування

продовження табл.17

4	-105	-105	105
$\sum_{j=1}^{4} y_{2j} z_{ij} z_{kj}$	**-23**	**-3**	**-97**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=2$	**-5,75**	**-0,75**	**-24,25**

Таблиця 18

№	*y3 * z1 * z2*	*y3 * z1 * z3*	*y3 * z2 * z3*
1	6,38	6,38	6,38
2	3,4	-3,4	-3,4
3	-5,78	5,78	-5,78
4	-5,12	-5,12	5,12
$\sum_{j=1}^{4} y_{3j} z_{ij} z_{kj}$	**-1,12**	**3,64**	**2,32**
$b_i, \overline{i=1,3},\ p=3$	**-0,28**	**0,91**	**0,58**

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Зведемо всі коефіцієнти нормалізованого рівняння регресії в таблицю 19.

Таблиця 19

Параметри суміші	Коефіцієнти регресії						
	b_o	b_1	b_2	b_3	b_{12}	b_{13}	b_{23}
y_1	0,73	0,23	0,19	0,37	0,37	0,19	0,23
y_2	122,75	-24,25	-0,75	-5,75	-5,75	-0,75	-24,25
y_3	5,17	0,58	0,91	-0,28	-0,28	0,91	0,58

Згідно з рівняннями 1 записуємо нормалізовані рівняння регресії

$$y_1 = 0{,}73 + 0{,}23z_1 + 0{,}19z_2 + 0{,}37z_3 + 0{,}37z_1z_2 + 0{,}19z_1z_3 + 0{,}23z_2z_3,$$

$$y_2 = 122{,}75 - 24{,}25z_1 - 0{,}75z_2 - 5{,}75z_3 - 5{,}75z_1z_2 - 0{,}75z_1z_3 - 24{,}25z_2z_3,$$

$$y_3 = 5{,}17 + 0{,}58z_1 + 0{,}91z_2 - 0{,}28z_3 - 0{,}28z_1z_2 + 0{,}91z_1z_3 + 0{,}58z_2z_3.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

V.Домашнє завдання

1.Вивчити теоретичний матеріал по наступній темі практичного завдання.

2.Побудувати повний та рандомізований факторні експерименти засобами MatLab для трьох спостережуваних параметрів, кожен з яких має два рівні. При побудові рандомізованого факторного експерименту встановити кількість експериментів $k = p$, де p - порядковий номер студента в журналі.

Розв'язок домашнього завдання 2.

Завантажуємо программу Matlab. Для побудови повного та рандомізованого факторного експериментів засобами MatLab вводимо наступні команди:

```
>> k=3;
>> ff2n(k)
ans =
     0     0     0
     0     0     1
     0     1     0
     0     1     1
     1     0     0
     1     0     1
     1     1     0
     1     1     1
>> k=3;
>> n=2;
>> unidrnd(n,5,k)
ans =
     1     1     1
     1     1     2
     2     2     1
     1     1     2
     1     1     1
```

Національний університет
водного господарства
та природокористування

VI.Контрольні запитання

1. В чому полягає процесс планування експерименту?
2. Для чого використовується побудова повного факторного експерименту?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3. Які величини називаються факторами?
4. Що називається центром плану факторного експерименту?
5. Як відбувається побудова повного факторного експерименту?
6. В чому полягає операція кодування змінних?
7. Що називається дворівневим повним факторним експериментом?
8. Яка кількість експериментів згідно повного факторного експерименту?
9. Що називається генеруючим співвідношенням?
10. Яка кількість експериментів згідно дробового факторного експерименту?

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практичне заняття №5

Тема : Побудова моделей за методом Брандона

***Мета*:** *Навчитись будувати моделі об'єктів за методом Брандона*

Хід заняття

I. Усне опитування теоретичного матеріалу

Опитування матеріалу здійснити за контрольними запитаннями.

II.Теоретичний матеріал

Метод призначений для отримання моделей виду

$$\tilde{y}(x_1,...,x_k) = b_o \prod_{j=1}^{k} f_j(x_j) \qquad (1)$$

де $f_j(x_j)$ - довільна одномірна функція, k - кількість вхідних сигналів x.

Розглянемо алгоритм методу для отримання моделей у вигляді (1).

Нехай маємо деяку сукупність експериментальних даних (x_{ji}, y_i), $j=\overline{1,k}$, $i=\overline{1,n}$ - кількість експериментів, x_{ji} - експериментальне значення вхідної змінної x_j в i-ому досліді, y_i - експериментальні значення вихідної змінної в i-ому досліді.

1. Обчислюється середнє значення вихідної змінної

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

2. Вводиться нова фіктивна змінна y_o, а саме виконуються перетворення

$$y_{0i} = \frac{y_i}{\bar{y}}, \quad i=\overline{1,n}.$$

3. За даними $(x_{1i}, y_{0i}), i=\overline{1,n}$ будується емпірична лінія регресії $\tilde{y}_0 = f_1(x_1)$. По її виду визначають структуру $f_1(x_1)$ і за

Національний університет водного господарства та природокористування

методом найменших квадратів розраховуються коефіцієнти рівняння регресії (параметри моделі).

4.За отриманим рівнянням регресії для $x_{1i}, i=\overline{1,n}$ знаходяться відповідні значення $\tilde{y}_{0i}$.

5.Виконується перетворення:

$$y_{1i}=\frac{y_{0i}}{\tilde{y}_{0i}},\ \ i=\overline{1,n}.$$

6. Аналогічно до п.3 за даними $(x_{2i}, y_{1i}), i=\overline{1,n}$ будується емпірична лінія регресії $\tilde{y}_1=f_2(x_2)$. По її виду визначають структуру $f_2(x_2)$ і за методом найменших квадратів розраховують коефіцієнти рівняння регресії (параметри моделі).

Процес продовжується поки не будуть використані всі вхідні змінні $x_j, j=\overline{1,k}$, тобто до визначення останньої лінії регресії $\tilde{y}_{k-1}=f_k(x_k)$.

7.Після цього будуємо загальну модель у вигляді:

$$\tilde{y}=\bar{y}\prod_{j=1}^{k}\tilde{y}_{j-1}=\bar{y}\prod_{j=1}^{k}f_j(x_j).$$

Для визначення середньої відносної похибки апроксимації ε при отриманої моделі обчислюється коефіцієнт

$$\eta=\sqrt{1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y}\ )^2}}.$$

$$\varepsilon=(1-\eta)*100\%.$$

III. Розв'язування задач

Задача 1.

Необхідно побудувати модель за методом Брандона процесу утворення герметика у виді функції $\tilde{y}(x_1,x_2)=b_o\prod_{j=1}^{2}f_j(x_j)$, де y

— межа міцності герметика на розрив, яка залежить від вмісту у суміші парахиноцдиоксиму, двоокису марганцю, цементу і розчинника. Розглянемо ідентифікацію моделі, прийнявши, що вміст у суміші двоокису марганцю та розчинника є сталими величинами, а тому за вхідні величини будемо приймати вміст у суміші парахиноцдиоксиму x_1 та цементу x_2.

В результаті проведення експериментів на об'єкті, отримані наступні значення (табл.1)

Таблиця 1

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i
1	1	5	53,3
2	3	8	62,5
3	7	12	82,6
4	8	15	95,4
5	9	20	111,3

де $i = \overline{1,5}$ - номер експерименту.

Розв'язок.

1.Обчислюється середнє значення вихідної змінної

$$\overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} y_i = 81{,}02 .$$

2.Вводимо нову змінну y_0: $y_{0i} = \frac{y_i}{\overline{y}}$, $i = \overline{1,5}$ і доповнюємо вихідну табл.1, а саме

$$y_{01} = \frac{y_1}{\overline{y}} = \frac{53{,}3}{81{,}02} = 0{,}658,\quad y_{02} = \frac{y_2}{\overline{y}} = \frac{62{,}5}{81{,}02} = 0{,}771,\quad y_{03} = \frac{y_3}{\overline{y}} = \frac{82{,}6}{81{,}02} = 1{,}020,$$

$$y_{04} = \frac{y_4}{\overline{y}} = \frac{95{,}4}{81{,}02} = 1{,}177,\quad y_{05} = \frac{y_5}{\overline{y}} = \frac{111{,}3}{81{,}02} = 1{,}374 .$$

Таблиця 2

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i	y_{0i}
1	1	5	53,3	0,658
2	3	8	62,5	0,771
3	7	12	82,6	1,020
4	8	15	95,4	1,177
5	9	20	111,3	1,374

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3. Згідно даних $(x_{1i}, y_{0i}), i=\overline{1,5}$ будуємо емпіричну лінію регресії $\tilde{y}_0 = f_1(x_1)$ (або лише наносимо точки $(x_{1i}, y_{0i}), i=\overline{1,5}$ в систему координат).

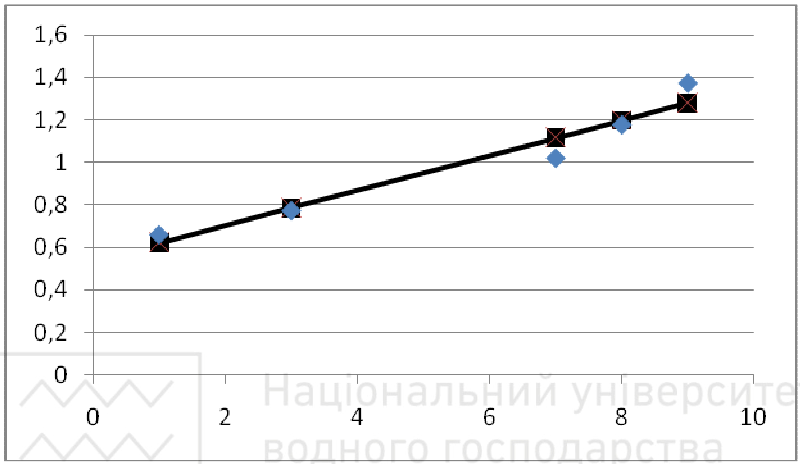

Рис.1. Лінія регресії $\tilde{y}_0 = 0{,}541 + 0{,}082x_1$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

По виду емпіричної лінії регресії (або згідно розподілу точок $(x_{1i}, y_{0i}), i=\overline{1,5}$) приймаємо наступну структуру лінії регресії $f_1(x_1)$: $\tilde{y}_0 = b_{01} + b_{11}x_1$.

За методом найменших квадратів розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} y_{0i} = 5b_{01} + b_{11}\sum_{i=1}^{5} x_{1i} \\ \sum_{i=1}^{5} y_{0i}x_{1i} = b_{01}\sum_{i=1}^{5} x_{1i} + b_{11}\sum_{i=1}^{5} x_{1i}^2 \end{cases}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$b_{11} = \frac{5\sum_{i=1}^{5} y_{0i}x_{1i} - \sum_{i=1}^{5} y_{0i}\sum_{i=1}^{5} x_{1i}}{5\sum_{i=1}^{5} x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{5} x_{1i}\right)^2}, \quad b_{01} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_{0i} - b_1\sum_{i=1}^{5} x_{1i}}{5}.$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_{0i}x_{1i} = (1*0{,}658)+(3*0{,}771)+(7*1{,}020)+(8*1{,}177)+(9*1{,}374) = 31{,}892;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_{0i} = 0{,}658 + 0{,}771 + 1{,}020 + 1{,}177 + 1{,}374 = 5{,}0;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{1i} = 1 + 3 + 7 + 8 + 9 = 28;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_{1i}^2 = 1^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 = 204;$$

$$b_{11} = \frac{5*31{,}892 - 5*28}{5*204 - 28^2} = 0{,}082; \; b_{01} = \frac{5 - 0{,}082*28}{5} = 0{,}541.$$

Отже, лінія регресії $f_1(x_1)$ матиме вигляд $\tilde{y}_0 = 0{,}541 + 0{,}082x_1$ (рис. 1.).

4. За отриманим рівнянням регресії для $x_{1i}, i = \overline{1,n}$ знаходимо відповідні значення $\tilde{y}_{0i}$

$\tilde{y}_{01} = 0{,}541 + 0{,}082*1 = 0{,}624;$ $\tilde{y}_{02} = 0{,}541 + 0{,}082*3 = 0{,}789;$

$\tilde{y}_{03} = 0{,}541 + 0{,}082*7 = 1{,}119;$ $\tilde{y}_{04} = 0{,}541 + 0{,}082*8 = 1{,}201;$

$\tilde{y}_{05} = 0{,}541 + 0{,}082*9 = 1{,}284.$

Доповнимо табл. 2

Таблиця 3

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i	y_{0i}	$\tilde{y}_{0i}$
1	1	5	53,3	0,658	0,624
2	3	8	62,5	0,771	0,789
3	7	12	82,6	1,020	1,119
4	8	15	95,4	1,177	1,201
5	9	20	111,3	1,374	1,284

Національний університет
водного господарства
та природокористування

5. Вводимо нову змінну y_1

$y_{1i} = \dfrac{y_{0i}}{\tilde{y}_{0i}}$, $i = \overline{1,5}$ і доповнюємо табл.3, а саме

$y_{11} = \dfrac{y_{01}}{\tilde{y}_{01}} = \dfrac{0,658}{0,624} = 1,054$, $y_{12} = \dfrac{y_{02}}{\tilde{y}_{02}} = \dfrac{0,771}{0,789} = 0,977$,

$y_{13} = \dfrac{y_{03}}{\tilde{y}_{03}} = \dfrac{1,02}{1,119} = 0,912$, $y_{14} = \dfrac{y_{04}}{\tilde{y}_{04}} = \dfrac{1,177}{1,201} = 0,980$,

$y_{15} = \dfrac{y_{05}}{\tilde{y}_{05}} = \dfrac{1,374}{1,284} = 1,070$.

Таблиця 4

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i	y_{0i}	$\tilde{y}_{0i}$	y_{1i}
1	1	5	53,3	0,658	0,624	1,054
2	3	8	62,5	0,771	0,789	0,977
3	7	12	82,6	1,020	1,119	0,912
4	8	15	95,4	1,177	1,201	0,980
5	9	20	111,3	1,374	1,284	1,070

6. Наносимо точки $(x_{2i}, y_{1i}), i = \overline{1,5}$ на систему координат (рис. 2).

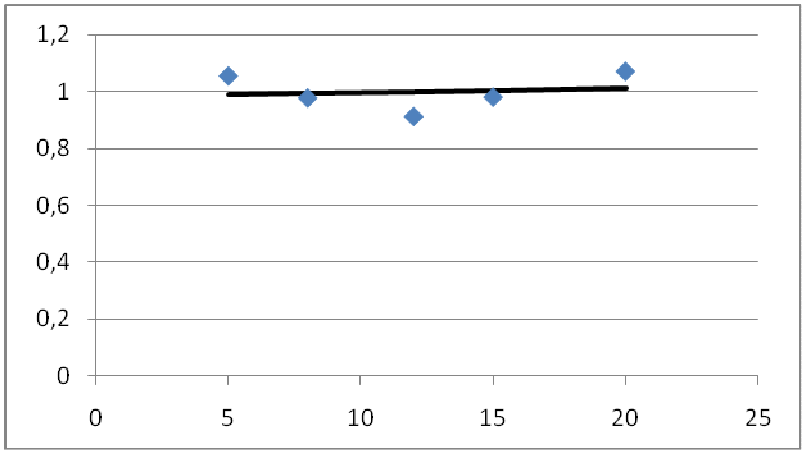

Рис.2. Лінія регресії $\tilde{y}_1 = 0,975 + 0,00013x_2^2$

Національний університет водного господарства та природокористування

За видом експериментальних даних приймаємо наступну структуру лінії регресії $f_2(x_2)$

$$\tilde{y}_1 = b_{02} + b_{12}x_2^2.$$

За методом найменших квадратів розраховуємо коефіцієнти рівняння регресії

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{5} y_{1i} = 5b_{02} + b_{12}\sum_{i=1}^{5} x_2^2 \\ \sum_{i=1}^{5} y_{1i}x_{2i}^2 = b_{02}\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^2 + b_{12}\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^4 \end{cases}$$

$$b_{12} = \frac{5\sum_{i=1}^{5} y_{1i}x_{2i}^2 - \sum_{i=1}^{5} y_{1i}\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^2}{5\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^4 - \left(\sum_{i=1}^{5} x_{2i}^2\right)^2} = 0{,}000134,$$

$$b_{02} = \frac{\sum_{i=1}^{5} y_{1i} - b_{12}\sum_{i=1}^{5} x_{2i}}{5} = 0{,}975.$$

Отже, лінія регресії $f_2(x_2)$ матиме вигляд $\tilde{y}_1 = 0{,}975 + 0{,}00013x_2^2$ (рис. 2).

7.Після цього будуємо загальну модель у вигляді:

$$\tilde{y} = \bar{y}\prod_{j=1}^{2} f_j(x_j) = \bar{y} * (b_{01} + b_{11}x_1)\left(b_{02} + b_{12}x_2^2\right),$$

$$\tilde{y} = 81{,}02\,(\,0{,}541 + 0{,}082x_1\,) * (0{,}975 + 0{,}00013x_2^2).$$

Доповнимо табл.4 даними, що розраховані згідно з моделлю:

Таблиця 5

i	x_{1i}	x_{2i}	y_i	y_{0i}	$\tilde{y}_{0i}$	y_{1i}	$\tilde{y}_i$
1	1	5	53,3	0,658	0,624	1,054	55,38
2	3	8	62,5	0,771	0,789	0,977	71,6
3	7	12	82,6	1,020	1,119	0,912	102,1
4	8	15	95,4	1,177	1,201	0,980	111,68
5	9	20	111,3	1,374	1,284	1,070	123,22

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Визначимо середню відносну похибку апроксимації ε при отриманої моделі

$$\eta = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^{5}(y_i - \tilde{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{5}(y_i - \bar{y})^2}} = \sqrt{1 - \frac{3467{,}86}{43792{,}04}} = 0{,}96,$$

$$\varepsilon = (1 - \eta) * 100\% = 4\%.$$

IV.Контрольні запитання

1. Для чого призначений метод Брандона?
2. Скільки вхідних параметрів може мати об'єкт при побудові його моделі за методом Брандона?
3. Які є методи побудови моделі об'єкта у виді функціональної залежності між вхідними та вихідним параметрами?
4. Як будується емпірична лінія регресії?
5. Які є способи побудови лінії регресії об'єкта?
6. Як визначаються коефіцієнти лінії регресії, побудованої за методом найменших квадратів?
7. За яким методом розраховуються коефіцієнти моделі, побудованої за методом Брандона?
8. Який вигляд має загальна модель, побудована за методом Брандона?
9. За яким співвідношенням розраховується похибка при побудові моделі за методом Брандона?
10. У чому полягає суть алгоритму для побудови моделі за методом Брандона?

Національний університет водного господарства та природокористування

Навчально – методична література

1. Мирошник И.В. Теория автоматического управления. Линейные системы. – СПб.: Питер, 2005- 336с .

2. Черноруцкий И.Г. Методы оптимизации в теории управления : Учебное пособие. – СПб.: Питер, 2004. – 256 с.

3. Мирахмедов Д.А., Рахимов Т.Н. Идентификация в АСУ технологическими процессами. Ташкент, из-ство «Фан» УзССР, 1977. – 168с.

4. Сильвестров А.Н., Чинаев П.И. Идентификация и оптимизация автоматических систем. – М.: Энергоатомиздат, 1987с. – 200с.

5. Гришин В.Н. и др. Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. – Л.: Энергоатомиздат. – 1985. – 104с.

6. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984. – 320с.

7. Гультяев А.К. Имитационное моделирование в среде Windows. – Санки-Петербург., 2001.- 400с.

8. Джон Г.Метьюз, Куртин Д.Финк. Численные методы. Использование MatLab. 3 –е издание: Пер. с англ.. – М: Издательский дом «Вільямс», 2001. – 720с.

9. Лазарев Ю. Моделирование процес сов и систем в Matlab. Учебный курс. – СПБ.: Питер, Киев: Издательская группа BHV, 2005. – 512с.

10. Герман – Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в Matlab 6.0.: Учебное пособие. – СПб.: Корона принт. – 2001. – 320с.

11. Новгородцев А. Расчет электрических цепей в Matlab : Учебный курс.- СПб.: Питер 2004.- 250с.

12. Мокін Б.І., Мокін В.Б., Мокін О.Б. Математичні методи ідентифікаційї електромеханічних процесів. Навчальний посібник. – Вінниця, 2005.- 300с.