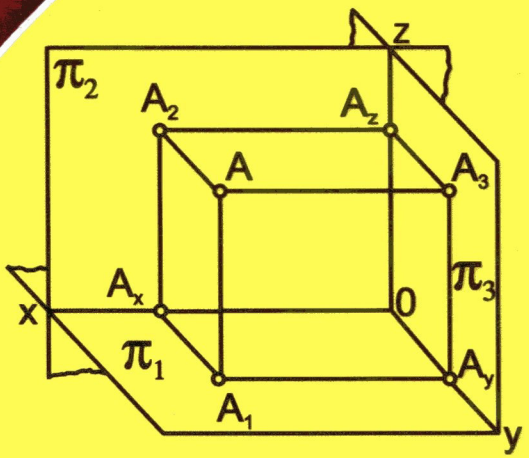
В. В. Крівцов, І. О. Тимощук, С. А. Приймак

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

(з використанням іноземних мов)

Навчальний посібник



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

В.В. Крівцов, І.О. Тимощук, С.А. Приймак

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

(*з використанням іноземних мов*)

Навчальний посібник

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рівне 2016

Національний університет
водного господарства
та природокористування

УДК 514.18:004(075.8)
ББК 22.151.3я73
К82

Рекомендовано вченою радою Національного університету водного господарства та природокористування.
(Протокол № 8 від 30 червня 2015 р.)

Рецензенти:
Козяр М.М., доктор пед. наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне);
Тадеєва М.І., доктор пед. наук, професор Національного університету водного господарства та природокористування (м. Рівне).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Крівцов В.В., Тимощук І.О., Приймак С.А.
К82 Нарисна геометрія (з використанням іноземних мов): Навчальний посібник. – Рівне : НУВГП, 2016. – 280 с.

Посібник призначено для іноземних студентів, які приступають до вивчення нарисної геометрії, і слугуватиме для них базою для опанування повного курсу даної дисципліни. Переклад з української мови виконано російською, англійською та французькою мовами.

УДК 514.18:004(075.8)
ББК 22.151.3я73

© Крівцов В.В., Тимощук І.О., Приймак С.А. 2016
© Національний університет
водного господарства
та природокористування, 2016

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЗМІСТ

Вступ……..6
Українсько-російська частина навчального посібника……..8
Розділ 1. Метод проекцій. Проекціювання точки……9
1.1. Завдання нарисної геометрії……...9
1.2. Метод проекцій……9
1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві перпендикулярні площини проекцій. Епюр точки……11
1.4. Проекціювання точки на три площини проекцій……...16
1.5. Класифікація точок……19
Розділ 2. Проекціювання прямої……26
2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення……..26
2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення……29
2.3. Прямі часткового положення……33
2.4. Взаємне положення двох прямих……43
2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих……50
Розділ 3. Площина……53
3.1. Задання площини на епюрі……...53
3.2. Площини загального та часткового положення……..57
3.3. Точка і пряма в площині……68
3.4. Головні лінії площини……...73
Розділ 4. Поверхні. Точка на поверхні…….....82
4.1. Багатогранники та їх зображення…….....82
4.2. Криві поверхні та їх зображення……..85
4.2.1. Конічна поверхня……85
4.2.2. Циліндрична поверхня……88
4.2.3. Поверхня кулі (сфера)…….....89
4.2.4. Поверхня прямого кругового конуса…….....92
Короткий українсько-російський словник……..95
Українсько-англійська частина навчального посібника……99
Розділ 1. Метод проекцій. Проекціювання точки……100
1.1. Завдання нарисної геометрії……...100
1.2. Метод проекцій……100

Національний університет водного господарства та природокористування

1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві перпендикулярні площини проекцій. Епюр точки……..102
1.4.Проекціювання точки на три площини проекцій……..107
1.5. Класифікація точок……..110
Розділ 2. Проекціювання прямої……..117
2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення……117
2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення……..120
2.3. Прямі часткового положення……..124
2.4. Взаємне положення двох прямих……...134
2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих…….....141
Розділ 3. Площина……...144
3.1. Задання площини на епюрі……144
3.2. Площини загального та часткового положення……148
3.3. Точка і пряма в площині……..159
3.4. Головні лінії площини……164
Розділ 4. Поверхні. Точка на поверхні…….....173
4.1. Багатогранники та їх зображення…….....173
4.2. Криві поверхні та їх зображення……176
4.2.1. Конічна поверхня…….....176
4.2.2. Циліндрична поверхня……..179
4.2.3. Поверхня кулі (сфера)…….....180
4.2.4. Поверхня прямого кругового конуса…….....183
Короткий українсько-англійський словник……186
Українсько-французька частина навчального посібника……190
Розділ 1. Метод проекцій. Проекціювання точки……191
1.1. Завдання нарисної геометрії……...191
1.2. Метод проекцій……191
1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві перпендикулярні площини проекцій. Епюр точки……..193
1.4.Проекціювання точки на три площини проекцій……..198
1.5. Класифікація точок……..201
Розділ 2. Проекціювання прямої……..208
2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення……208
2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення……..211

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2.3. Прямі часткового положення……..215
2.4. Взаємне положення двох прямих……...225
2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих…….....232
Розділ 3. Площина……...235
3.1. Задання площини на епюрі…….235
3.2. Площини загального та часткового положення……239
3.3. Точка і пряма в площині……..250
3.4. Головні лінії площини…….255
Розділ 4. Поверхні. Точка на поверхні…….....264
4.1. Багатогранники та їх зображення…….....264
4.2. Криві поверхні та їх зображення……267
4.2.1. Конічна поверхня…….....267
4.2.2. Циліндрична поверхня……..270
4.2.3. Поверхня кулі (сфера)…….....271
4.2.4. Поверхня прямого кругового конуса…….....274
Короткий українсько-французький словник……..277

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Вступ

Іноземні студенти під час навчання у вищому технічному закладі вивчають на першому курсі таку складну для опанування дисципліну, якою є нарисна геометрія. Складність вивчення полягає, по-перше, в тому, що переважна більшість першокурсників не знайомі навіть з основами утворення та читання креслень, а, по-друге, ця дисципліна використовує специфічну термінологію, без розуміння сутності якої неможливо якісно оволодіти положеннями нарисної геометрії.

Щоб звести до мінімуму зазначені труднощі, авторами детально розглядаються основи проекціювання об'єктів. Наведені в посібнику завдання спочатку розв'язуються на наочному зображенні, а потім подається побудова комплексного креслення (епюра). Це дозволяє студентам краще сприймати навчальний матеріал, свідомо та глибше його засвоювати.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Дане навчальне видання не охоплює всі теми нарисної геометрії, але в цьому немає потреби, оскільки основна його мета – допомогти іноземним студентам оволодіти термінологією дисципліни, отримати початкові знання, які слугуватимуть базою для вивчення повного курсу нарисної геометрії.

Засновник нарисної геометрії, французький вчений Гаспар Монж зазначав, що той, хто буде знати проекціювання точки, прямої та площини, не зустріне труднощів у вивчення нарисної геометрії. Тому у навчальному посібнику в перших трьох розділах розглянуто зазначені теми. В цих розділах наведено основні терміни, які використовуються при вивченні нарисної геометрії, детально описано сутність прямокутного проекціювання об'єктів та розв'язування задач за їх участю на епюрах. Це дозволяє іноземним студентам легше адаптуватися до україномовних

Національний університет
водного господарства
та природокористування

підручників та посібників, самостійно вивчати теми на взаємне положення площин, прямої та площини, способи перетворення проекцій, які не висвітлюються в даному посібнику.

В розділі 4 розглянуто також тему «Поверхні. Точка на поверхні». Це обумовлено тим, що при вивченні способів утворення та зображення поверхонь використовується специфічна термінологія, оволодіння сутністю якої дозволить студентам самостійно вивчати теми на перетин поверхонь площиною та прямою лінією, на взаємний перетин поверхонь.

Матеріал навчального посібника включає багато ілюстрацій і викладений так, що допомагає студентам самостійно оволодіти темами, що розглядаються у посібнику, здобути практичні вміння з виконання завдань.

Переклад з української мови виконано російською, англійською та французькою мовами, якими більшість іноземних студентів, що навчаються в НУВГП, володіють на достатньому рівні для опанування дисципліни.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

У посібнику наведено українсько-російський, українсько-англійський, українсько-французький словник основних термінів, що використовуються у нарисній геометрії.

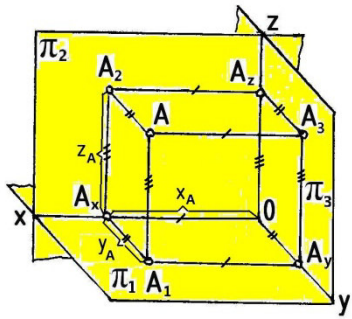
Навчальне видання допомагатиме студентам не тільки при опануванні нарисною геометрією, а також при вивченні математики, фізики та інших дисциплін.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

УКРАЇНСЬКО-РОСІЙСЬКА ЧАСТИНА НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА

Національний університет
водного господарства
та природокористування

УКРАИНСКО-РУССКАЯ ЧАСТЬ УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Нарисна геометрія. Розділ 1 **Метод проекцій** **Проекціювання точки**	**Начертательная геометрия** **Раздел 1. Метод проекций** **Проецирование точки**
1.1. Завдання нарисної геометрії	1.1. Задания начертательной геометрии
Основне завдання нарисної геометрії полягає у визначенні способів зображення просторових об'єктів на площині (аркуші паперу або екрані комп'ютера).	Основное задание начертательной геометрии состоит в определении способов изображения пространственных объектов на плоскости (листке бумаги или экране компьютера).
Ще одним завданням нарисної геометрії є вивчення способів, що дозволяють уявити форми геометричних об'єктів за їх плоскими зображеннями, тобто опанування правилами читання креслень.	Еще одним заданием начертательной геометрии является изучение способов, которые позволяют представить формы геометрических объектов по их плоским изображениям, то есть овладение правилами чтения чертежей.
В основу нарисної геометрії покладено метод проекцій.	В основе начертательной лежит метод проекций.
1.2. Метод проекцій. Ортогональні проекції	1.2. Метод проекций. Ортогональные проекции
Апарат відображення просторових фігур на площині (рис. 1.1) включає об'єкт, що проекціюється (точка А), площину проекцій, на яку проекціюється точка А (на рис. 1.1 це π_1 – горизонтальна площина проекцій).	Аппарат отображения пространственных фигур на плоскости (рис. 1.1) включает объект, который проецируется (точка А), плоскость проекций, на которую проектируется точка А (на рис. 1.1 это π_1 – горизонтальная плоскость проекций).
Третім елементом апарата відображення є спосіб проекціювання. Застосовуємо спосіб ортогонального або прямокутного проекціювання. За цим способом для отримання	Третьим элементом аппарата отображения является способ проектирования. Применяем способ ортогонального или прямоугольного проецирования. Используя этот способ для

Національний університет
водного господарства
та природокористування

зображення точки А на площині π_1 потрібно через точку А (рис. 1.2) провести пряму перпендикулярно до площини проекцій π_1. Точка перетину цієї прямої з площиною π_1 (це точка A_1) і буде зображенням точки А на площині π_1. В нарисній геометрії зображення об'єктів, що отримані описаним чином, називаються проекціями об'єкта. Отже, точка A_1– це ортогональна проекція точки А на площині π_1. Оскільки площина π_1 розміщена горизонтально, проекцію A_1 називають горизонтальною проекцією точки А.	получения изображения точки А на плоскости π_1, необходимо через точку А (рис. 1.2) провести прямую перпендикулярно к плоскости проекций π_1. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π_1 (это точка A_1) и будет изображением точки А на плоскости π_1. В начертательной геометрии изображения объектов, полученные описанным способом, называются проекциями объекта. Таким образом, точка A_1 – это ортогональная проекция точки А на плоскости π_1. Поскольку плоскость π_1 размещена горизонтально, проекцию A_1 называют горизонтальной проекцией точки А.
Пряму AA_1, за допомогою якої знайдено проекцію A_1, називають проекціюючою прямою ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).	Прямую AA_1, с помощью которой найдена проекция A_1, называют проецирующей прямой ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).
Якщо точка С належить площині π_1 (рис. 1.3), то її горизонтальна проекція C_1 збігається з самою точкою С ($C_1 \equiv C$). На рис. 1.3 точкам простору В і D відповідають єдині горизонтальні проекції B_1 і D_1 . Проте, одній горизонтальній проекції F_1 відповідає безліч точок простору (F, F`, F`` і т.д.), що знаходяться на одній проекціюючій прямій. Відзначимо, що точки, які лежать на одній проекціюючій прямій, називаються конкуруючими. Точки F, F`, F``, що зображені на рис. 1.3, це конкуруючі точки.	Если точка С принадлежит плоскости π_1 (рис. 1.3), то ее горизонтальная проекция C_1 совпадает с самой точкой С ($C_1 \equiv C$). На рис. 1.3 точкам пространства В и D соответствуют единственные горизонтальные проекции B_1 и D_1. Однако, одной горизонтальной проекции F_1 соответствуют множество точек пространства (F, F`, F`` и т.д.), которые находятся на одной проецирующей прямой. Отметим, что точки, которые лежат на одной проецирующей прямой, называются конкурирующими точками. Точки F, F`, F``, которые изображены на

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Отже, судити про положення точки в просторі за однією її проекцією неможливо, а креслення з однією проекцією об'єкта є невизначеним, неоднозначним.

1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві перпендикулярні площини проекцій. Епюр точки

Французький вчений Гаспар Монж, засновник нарисної геометрії, запропонував для усунення неоднозначності креслення ортогональне проекціювання здійснювати не на одну, а на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій.

На рис. 1.4 дано наочне зображення точки А в системі двох площин проекцій π_1 і π_2. Віднесемо до площин проекцій просторову прямокутну систему координат O*xyz*, де вісь *x* збігається з лінією перетину площин проекцій π_1 і π_2. Точка О – початок координат. Наочне зображення виконано у фронтальній диметрії. Площину π_2 називають фронтальною площиною проекцій. Лінію перетину площин проекцій називають віссю проекцій. Лінія перетину площин π_1 і π_2 – це вісь проекцій *x*, яка збігається з координатною віссю *x* ($x = \pi_1 \cap \pi_2$

рис. 1.3 – это конкурирующие точки.

Таким образом, судить о положении точки в пространстве по одной ее проекции невозможно, а чертеж с одной проекцией объекта является неопределенным, неоднозначным.

1.3. Метод Монжа – проецирование точки на две перпендикулярные плоскости проекций. Эпюр точки

Французский ученый Гаспар Монж, основатель начертательной геометрии, предложил для устранения неоднозначности чертежа ортогональное проецирование осуществлять не на одну, а на две взаимно перпендикулярные плоскости проекций.

На рис. 1.4 дано наглядное изображение точки А в системе двух плоскостей проекций π_1 и π_2. Отнесем к плоскостям проекций пространственную прямоугольную систему координат O*xyz*, где ось *x* совпадает с линией пересечения плоскостей проекций π_1 и π_2. Точка 0 – начало координат. Наглядное изображение выполнено во фронтальной диметрии. Плоскость π_2 называют фронтальной плоскостью проекций. Линию пересечения плоскостей проекций называют осью проекций. Линия пересечения плоскостей π_1 и π_2 – это ось

Національний університет
водного господарства
та природокористування

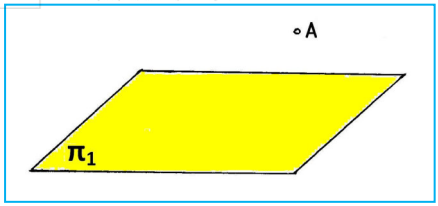


Рис. 1.1. Апарат відображення об'єктів на площині (А – точка простору , що не належить π_1; π_1 – горизонтальна площина проекцій)
Рис. 1.1. Аппарат отображения объектов на плоскости (А – точка пространства, которая не принадлежит π_1; π_1 – горизонтальная плоскость проекций)

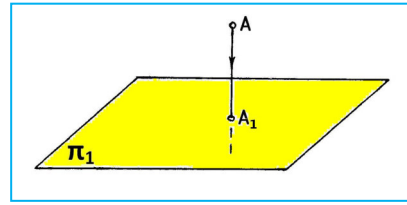


Рис. 1.2. Апарат відображення об'єктів на площині (AA_1 – проекціююча пряма, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 – горизонтальна проекція точки А, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)
Рис. 1.2. Аппарат отображения объектов на плоскости (AA_1 – проектирующая прямая, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 – горизонтальная проекция точки А, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)

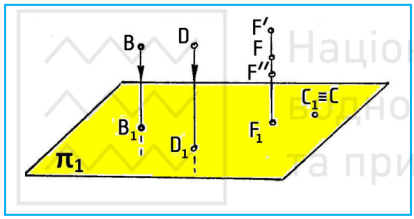


Рис. 1.3. Проекціювання точок на площину проекцій π_1
Рис. 1.3. Проектирование точек на плоскость проекций π_1

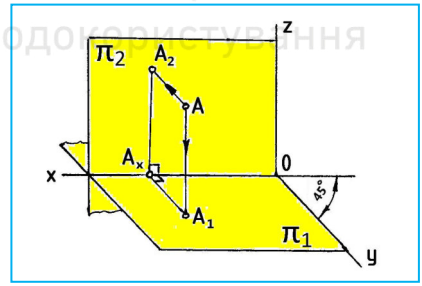


Рис. 1.4. Проекціювання точки на дві площини проекцій (π_2 – фронтальна площина проекцій, A_2 – фронтальна проекція точки А)
Рис. 1.4. Проектирование точки на две плоскости проекций (π_2 – фронтальная плоскость проекций, A_2 – фронтальная проекция точки А)

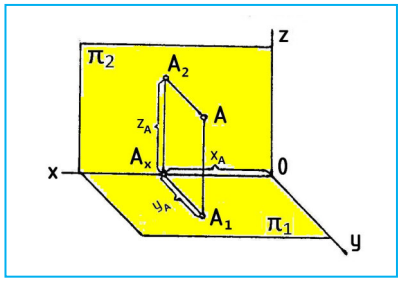


Рис. 1.5. Проекціювання точки на дві площини проекцій
Рис. 1.5. Проектирование точки на две плоскости проекций

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Фронтальна проекція A_2 визначається таким чином. З точки А проводиться пряма перпендикулярно до площини π_2. Точка перетину цієї прямої з площиною π_2 (це точка A_2) і буде фронтальною проекцією точки А на площині π_2.

Дві проекції A_1, A_2 однозначно вказують на положення точки А відносно системи площин проекцій π_1 і π_2.

Положення точки в просторі визначається трьома координатами. На рис. 1.5 показано всі три координати точки А. Таким чином, маючи дві проекції точки, можна визначити її положення в просторі відносно площин проекцій, тобто креслення з двома проекціями, на відміну від креслення з однією проекцією, є визначеним, однозначним.

На рис. 1.4, 1.5 отримані проекції точки А на двох взаємно перпендикулярних площинах проекцій π_1 та π_2. Для того, щоб сумістити площини проекцій π_1 і π_2 в одну спільну площину креслення, обертаємо площину π_1 навколо осі x до її суміщення з фронтальною площиною проекцій π_2 в одну спільну площину. Обертання проводиться в напрямку, що вказаний на рис. 1.6. Після суміщення площин отримаємо епюр двох площин проекцій x, которая совпадает с координатной осью x ($x = \pi_1 \cap \pi_2$).

Фронтальная проекция A_2 определяется таким образом. Из точки А проводится прямая перпендикулярно к плоскости π_2. Точка пересечения этой прямой с плоскостью π_2 (это точка A_2) и будет фронтальной проекцией точки А на плоскости π_2.

Две проекции A_1 и A_2 однозначно указывают на положение точки А относительно системы плоскостей проекций π_1 і π_2.

Положение точки в пространстве определяется тремя координатами. На рис. 1.5 показано все три координаты точки А. Таким образом, имея две проекции точки, можно определить ее положение в пространстве относительно плоскостей проекций, то есть чертеж с двумя проекциями, в отличии от чертежа с одной проекцией, является определенным, однозначным.

На рис. 1.4, 1.5 получены проекции точки А на двух взаимно перпендикулярных плоскостях проекций π_1 и π_2. Для того, чтобы совместить плоскости проекций π_1 и π_2 в одну общую плоскость чертежа, вращаем плоскость π_1 вокруг оси x до ее совмещения с фронтальной плоскостью проекций π_2 в одну общую плоскость. Вращение производится в направлении, которое указано на рис. 1.6. После совмещения плоскостей получим

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцій (рис. 1.7) або так, як зображено на рис. 1.8 – без нанесення обмежень площин проекцій.

Для отримання епюра точки в системі двох площин проекцій також обертаємо площину π_1, але разом з розміщеною на ній горизонтальною проекцією A_1, до суміщення з площиною π_2 в одну спільну площину креслення (рис. 1.9). Після суміщення отримаємо епюр точки А в системі двох площин проекцій (рис. 1.10).

Епюром називається креслення, що отримане при уявному суміщенні площин проекцій разом із розміщеними на них проекціями об'єкта в одну спільну площину креслення.

На епюрі проекції точки з'єднані між собою прямою лінією, що називається лінією проекційного зв'язку. Вона завжди перпендикулярна до осі проекцій: A_1A_2 – вертикальна лінія проекційного зв'язку, що з'єднує горизонтальну та фронтальну проекції точки, причому $A_1A_2 \perp x$ (рис. 1.10).

На епюрі точки А (рис. 1.11) позначено відрізки, які дорівнюють координатам x, y і z точки А. Це дозволяє за епюром, маючи тільки дві проекції точки, визначити положення точки у

эпюр двух плоскостей проекций (рис. 1.7) или так, как изображено на рис. 1.8 – без нанесения ограничений плоскостей проекций.

Для получения эпюра точки в системе двух плоскостей проекций также вращаем плоскость π_1, но вместе с размещенной на ней горизонтальной проекцией A_1, до совмещения с плоскостью π_2 в одну общую плоскость чертежа (рис. 1.9). После совмещения получим эпюр точки А в системе двух плоскостей проекций (рис. 1.10).

Эпюром называется чертеж, который получен при воображаемом совмещении плоскостей проекций вместе с размещенными на них проекциями объекта в одну общую плоскость чертежа.

На эпюре проекции точки соединены между собой прямой линией, которая называется линией проекционной связи. Она всегда перпендикулярна к оси проекций: A_1A_2 – вертикальная линия проекционной связи, которая соединяет горизонтальную и фронтальную проекции точки, при этом $A_1A_2 \perp x$ (рис. 1.10).

На эпюре точки А (рис. 1.11) отмечены отрезки, которые равны координатам x, y и z точки А. Это позволяет по эпюру, имея только две проекции точки, определить положение точки

Національний університет
водного господарства
та природокористування

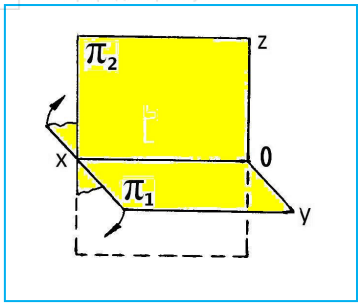


Рис. 1.6. Утворення епюра двох площин проекцій
Рис. 1.6. Образование епюра двух плоскостей проекций

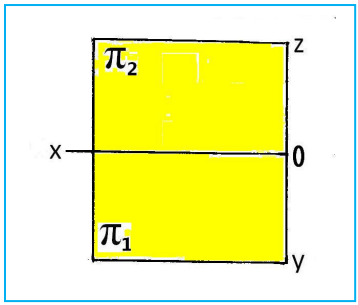


Рис. 1.7. Епюр двох площин проекцій
Рис. 1.7. Эпюр двух плоскостей проекций

Рис. 1.8. Епюр двох площин проекцій
Рис. 1.8. Эпюр двух плоскостей проекций

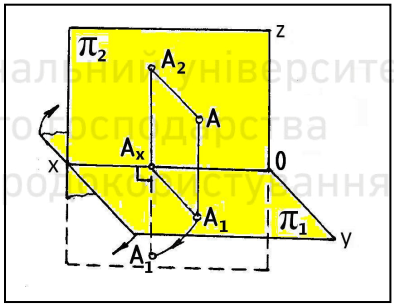


Рис. 1.9. Утворення епюра точки в системі двох площин проекцій
Рис. 1.9. Образование эпюра точки в системе двух плоскостей проекций

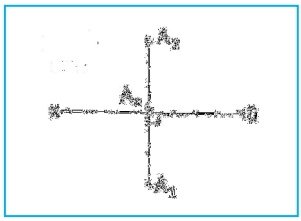


Рис. 1.10. Епюр точки в системі двох площин проекцій
Рис. 1.8. Эпюр точки в системе двух плоскостей проекций

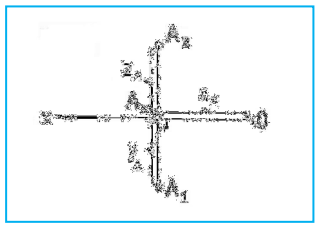


Рис. 1.11. Епюр точки в системі двох площин проекцій
Рис. 1.11. Эпюр точки в системе двух плоскостей проекций

просторі відносно площин проекцій. Дійсно, відрізок AA_1 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки А до площини π_1, причому $A_1A = A_2A_x$, а, отже, координата z точки А визначає відстань точки А до площини π_1. Відрізок AA_2 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки А до площини π_2, причому $AA_2 = A_1A_x$, а, отже, координата y точки А визначає відстань точки А до площини π_1.

Таким чином, двом проекціям точки відповідає єдина точка простору, і креслення з двома проекціями (зображеннями) є однозначним, визначеним.

1.4. Проекціювання точки на три площини проекцій

На рис. 1.12 дано наочне зображення системи трьох площин проекцій, де π_3 – профільна площина проекцій, y і z – осі проекцій ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

На рис. 1.13 показано проекції точки А на три площини проекцій, де A_3 – профільна проекція точки А, а на рис. 1.14 зазначено відрізки, які дорівнюють координатам x, y і z точки А. З рис. 1.14 випливає, що координата x точки А дорівнює відстані точки А до площини π_3, координата y точки А дорівнює відстані точки А до площини π_2, а координата z точки А дорівнює

в пространстве относительно плоскостей проекций. Действительно, отрезок AA_1 (рис. 1.5) равен расстоянию точки А до плоскости π_1, при этом $A_1A = A_2A_x$, а, следовательно, координата z точки А определяет расстояние точки А до плоскости π_1. Отрезок AA_2 (рис. 1.5) равен расстоянию точки А до плоскости π_2, при этом $AA_2 = A_1A_x$, а, следовательно, координата y точки А определяет расстояние точки А до плоскости π_1.

Таким образом, двум проекциям точки соответствует единственная точка пространства, и чертеж с двумя проекциями (изображениями) является однозначным, определенным.

1.4. Проецирование точки на три плоскости проекций

На рис. 1.12 дано наглядное изображение системы трех плоскостей проекций, где π_3 – профильная плоскость проекций, y и z – оси проекций ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

На рис. 1.13 показано проекции точки А на три плоскости проекций, где A_3 – профильная проекция точки А, а на рис. 1.14 отмечено отрезки , которые равны координатам x, y и z точки А. Из рис. 1.14 следует, что координата x точки А равна расстоянию точки А до плоскости π_3, координата y точки А равна расстоянию точки А до плоскости π_2, а координата z точки А равна

Національний університет
водного господарства
та природокористування

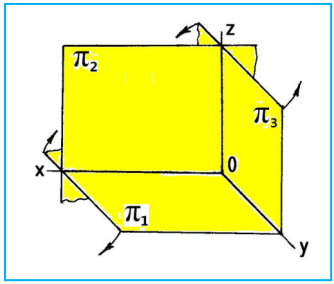


Рис. 1.12. Просторова система трьох площин проекцій (π_3 – профільна площина проекцій) та утворення епюра трьох площин проекцій
Рис. 1.12. Пространственная система трех плоскостей проекций (π_3 – профильная плоскость проекций)

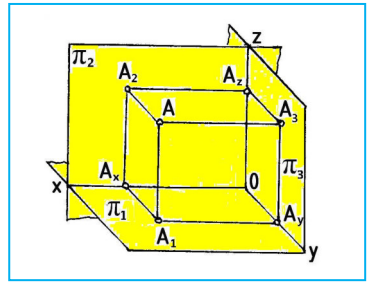


Рис. 1.13. Проекціювання точки на три площини проекцій (A_3 – профільна проекція точки А)
Рис. 1.13. Проектирование точки на три плоскости проекций (A_3 – профильная проекция точки А)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

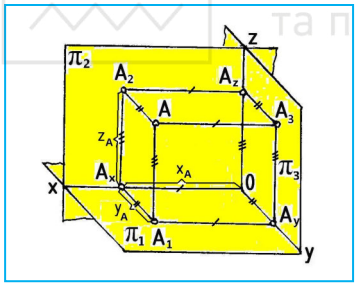


Рис. 1.14. Проекціювання точки на три площини проекцій
Рис. 1.14. Проектирование точки на три плоскости проекций

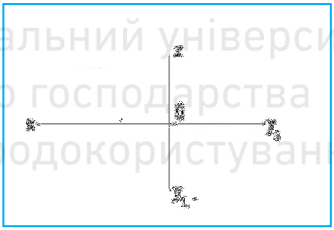


Рис. 1.15. Епюр системи трьох площин проекцій
Рис. 1.15. Эпюр системы трех плоскостей проекций

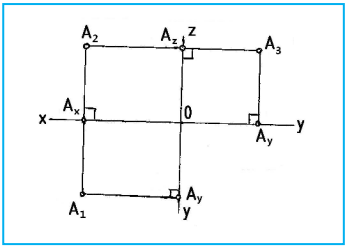


Рис. 1.16. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Рис. 1.16. Эпюр точки в системе трех плоскостей проекций

Національний університет водного господарства та природокористування

відстані точки А до площини π_1.	расстоянию точки А до плоскости π_1.
Утворення епюра системи трьох площин проекцій досягається таким чином (рис. 1.12). Площина π_2 залишається нерухомою, обертанням навколо осей x і z з нею суміщаються площини π_1 і π_3. Для того, щоб площини π_1 і π_3 могли обертатися, їх умовно роз'єднують, розрізаючи площини по осі y. На рис. 1.15 дано епюр системи трьох площин проекцій. При утворенні епюра вісь y розпалася на два променя:один промінь (y_1) залишився на площині π_1, а другий промінь (y_3) – на площині π_3.	Образование эпюра системы трех плоскостей проекций осуществляется таким образом (рис. 1.12). Плоскость π_2 остается неподвижной, вращением вокруг осей x и z с ней совмещаются плоскости π_1 и π_3. Для того, чтобы плоскости π_1 и π_3 могли вращаться, их условно разъединяют, разрезая плоскости по оси y. На рис. 1.15 дано эпюр системы трех плоскостей проекций. При образовании эпюра ось y распалась на два луча: один луч (y_1) остался на плоскости π_1, а второй луч (y_3) – на плоскости π_3.
На рис. 1.16 дано епюр точки А в системі трьох площин проекцій, який утворений в результаті суміщення площин проекцій в одну спільну площину креслення. Проекції A_1 і A_2 розміщені на вертикальній лінії проекційного зв'язку ($A_1A_2 \perp x$), проекції A_2 і A_3 – на горизонтальній лінії проекційного зв'язку ($A_2A_3 \perp z$), а проекції A_1 і A_3 – на горизонтально-вертикальній лінії проекційного зв'язку ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), яка розпалася на два відрізки A_1A_y і A_3A_y, оскільки на два променя y_1 і y_3 розпалася при суміщенні площин проекцій і сама вісь проекції y.	На рис. 1.16 дано эпюр точки А в системе трех плоскостей проекций, который образован в результате совмещения плоскостей проекций в одну общую плоскость чертежа. Проекции A_1 и A_2 размещены на вертикальной линии проекционной связи ($A_1A_2 \perp x$), проекции A_2 и A_3 – на горизонтальной линии проекционной связи ($A_2A_3 \perp z$), а проекции A_1 и A_3 – на горизонтально-вертикальной линии проекционной связи ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), которая распалась на два отрезка A_1A_y и A_3A_y, поскольку на два луча y_1 и y_3 распалась при совмещении плоскостей проекций и сама ось проекций y.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 1.17 зазначено відрізки, які дорівнюють координатам *x*, *y* і *z* точки А, що дозволяє, вибравши величину одиниці масштабу, побудувати проекції точки, тобто епюр точки, за заданими чисельними значеннями її координат.

На рис. 1.18-1.20 побудований епюр точки В за її координатами: В (40,20,30).

Третю проекцію (профільну B_3) за двома заданими проекціями B_1 і B_2 точки В можна побудувати координатним або проекційним способами (рис. 1.21-1.23).

На рис. 1.24 дано епюр точки В в системі трьох площин проекцій.

1.5. Класифікація точок

Точки ділять на точки простору, що не належать площинам проекцій, і точки, що належать площинам проекцій.

На рис. 1.25 дано наочне зображення точки С, що належить площині проекцій π_1. Координата *z* цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_1. На рис. 1.26 дано епюр точки С, що належить площині π_1.

На рис. 1.27 дано наочне зображення точки D, що належить площині проекцій π_2. Координата *y* цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_2. На рис. 1.28 дано епюр точки

На рис. 1.17 отмечены отрезки, которые равны координатам *x*, *y* и *z* точки А, что позволяет, выбрав величину единицы масштаба, построить проекции точки, то есть эпюр точки, по заданным числовым значениям ее координат.

На рис. 1.18-1.20 построен эпюр точки В по ее координатам: В (40,20,30).

Третью проекцию (профильную B_3) по двум заданным проекциям B_1 и B_2 точки В можно построить координатным или проектирующим способами (рис. 1.21-1.23).

На рис. 1.24 дано эпюр точки В в системе трех плоскостей проекций.

1.5. Классификация точек

Точки делятся на точки пространства, которые не принадлежат плоскостям проекций, и точки, которые принадлежат плоскостям проекций.

На рис. 1.25 дано наглядное изображение точки С, которая принадлежит плоскости проекций π_1. Координата *z* этой точки равна нулю, поскольку точка лежит на плоскости π_1. На рис. 1.26 дано эпюр точки С, которая принадлежит плоскости π_1.

На рис. 1.27 дано наглядное изображение точки D, которая принадлежит плоскости проекций π_2. Координата *y* этой точки равна нулю, поскольку точка лежит на плоскости π_2. На рис. 1.28 дано

Національний університет
водного господарства
та природокористування

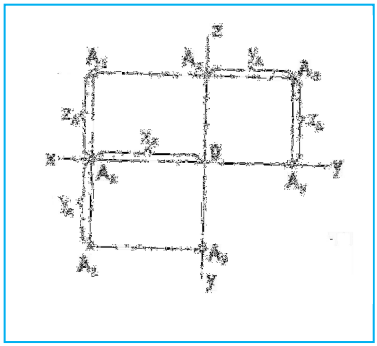


Рис. 1.17. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Рис. 1.17. Эпюр точки в системе трех плоскостей проекций

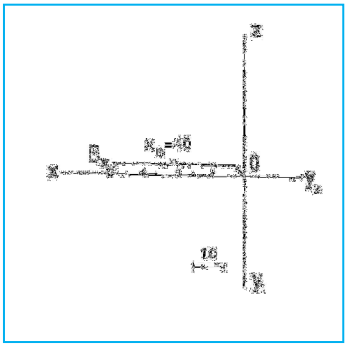


Рис. 1.18. Побудова епюра точки В за її координатами (1 дія)
Рис. 1.18. Построение эпюра точки В по ее координатами (1 действие)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

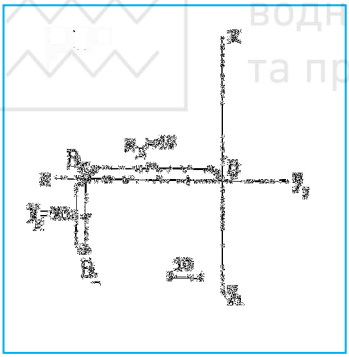


Рис. 1.19. Побудова епюра точки В за її координатами (2 дія)
Рис. 1.19. Построение эпюра точки В по ее координатами (2 действие)

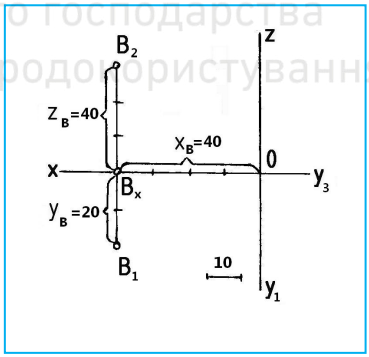


Рис. 1.20. Побудова епюра точки В за її координатами (3 дія)
Рис. 1.20. Построение эпюра точки В по ее координатами (3 действие)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

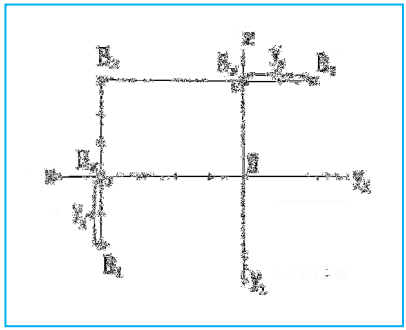


Рис. 1.21. Побудова профільної проекції точки В координатним способом
Рис. 1.21. Построение профильной проекции точки В координатным способом

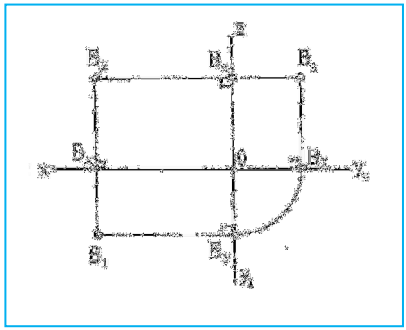


Рис. 1.22. Побудова профільної проекції точки В проекційним способом (за допомогою дуги)
Рис. 1.22.Построение профильной проекции точки В проектирующим способом (с помощью дуги)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

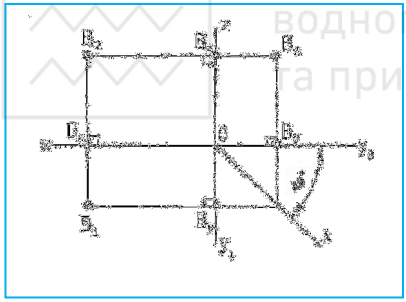


Рис. 1.23. Побудова профільної проекції точки В проекційним способом (за допомогою сталої прямої креслення)
Рис. 1.23. Построение профильной проекции точки В проектирующим способом (с помощью постоянной прямой чертежа)

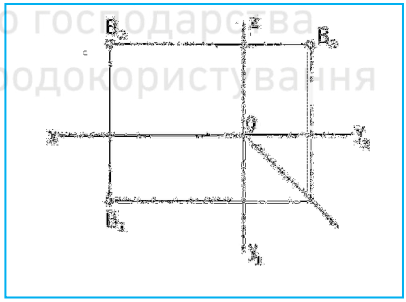


Рис. 1.24. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Рис. 1.24. Эпюр точки в системе трех плоскостей проекций

Національний університет
водного господарства
та природокористування

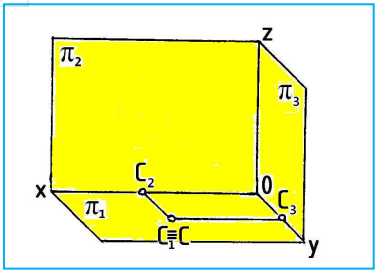


Рис. 1.25. Наочне зображення точки С та її проекцій (С Є π1, zC = 0)
Рис. 1.25. Наглядное изображение точки С и ее проекций (С Є π1, zC = 0)

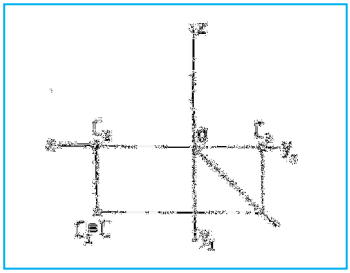


Рис. 1.26. Епюр точки С (С Є π1, zC = 0)
Рис. 1.26. Эпюр точки С (С Є π1, zC = 0)

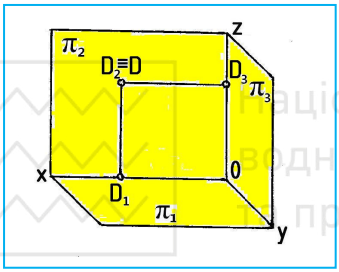


Рис. 1.27. Наочне зображення точки D та її проекцій (D Є π2, yD = 0)
Рис. 1.27. Наглядное изображение точки D и ее проекций (D Є π2, yD = 0)

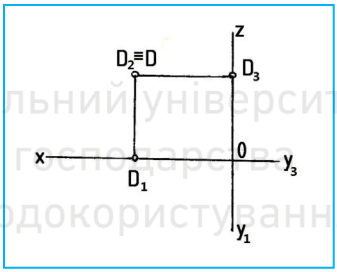


Рис. 1.28. Епюр точки D (D Є π2, yD = 0)
Рис. 1.28. Эпюр точки D (D Є π2, yD = 0)

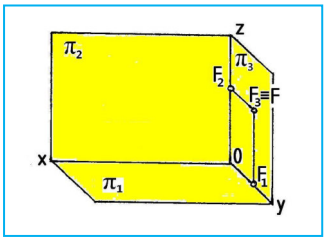


Рис. 1.29. Наочне зображення точки F та її проекцій (F Є π3, xF = 0)
Рис. 1.29. Наглядное изображение точки F и ее проекций (F Є π3, xF = 0)

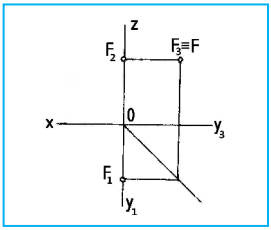


Рис. 1.30. Епюр точки F (F Є π3, xF = 0)
Рис. 1.30. Эпюр точки F (FЄ π3, xF = 0)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

D, що належить площині π_2. На рис. 1.29 дано наочне зображення точки F, що належить площині проекцій π_3. Координата z цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площини π_3. На рис. 1.30 дано епюр точки F, що належить площині π_3. Таким чином, у точки, що належить одній площині проекцій, дві проекції знаходяться на осях проекцій, а третя збігається з самою точкою. У точки, що належить одній площині проекцій, одна координата дорівнює нулю; це саме та, яка вказує на віддаленість точки до тієї площини проекцій, де знаходиться дана точка. Розглянемо точки, які лежать на осях проекцій, а, отже, належать двом площинам проекцій водночас. На рис. 1.31 дано наочне зображення точки E, яка лежить на осі x, тобто належить двом площинам проекцій π_1 і π_2 водночас ($x = \pi_2 \cap \pi_1$). У цієї точки координати y і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1, і площині π_2, то горизонтальна E_1 і фронтальна E_2 проекції точки E збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.32 дано епюр точки E, що лежить на осі проекцій x.	эпюр точки D, которая принадлежит плоскости π_2. На рис. 1.29 дано наглядное изображение точки F, которая принадлежит плоскости проекций π_3. Координата z этой точки равна нулю, поскольку точка лежит на плоскости π_3. На рис. 1.30 дано эпюр точки F, которая принадлежит плоскости π_3. Таким образом, у точки, которая принадлежит одной плоскости проекций, две проекции находятся на осях проекций, а третья совпадает с самой точкой. У точки, которая принадлежит одной плоскости проекций, одна координата равна нулю; это именно та, которая указывает на удаленность точки к той плоскости проекций, где находится данная точка. Рассмотрим точки, которые лежат на осях проекций, а, следовательно, принадлежат двум плоскостям проекций. На рис. 1.31 дано наглядное изображение точки E, которая лежит на оси x, то есть принадлежит двум плоскостям проекций π_1 и π_2 одновременно ($x = \pi_2 \cap \pi_1$). У этой точки координаты y и z равны нулю. Поскольку точка принадлежит и плоскости π_1, и плоскости π_2, то горизонтальная E_1 и фронтальная E_2 проекции точки E совпадают между собой и с самой точкой. На рис. 1.32 дано эпюр точки E, которая лежит на оси проекций x.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

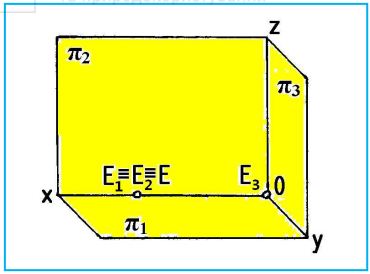


Рис. 1.31. Наочне зображення точки Е та її проекцій (Е ∈ x)
Рис. 1.31. Наглядное изображение точки Е и ее проекций (Е ∈ x)

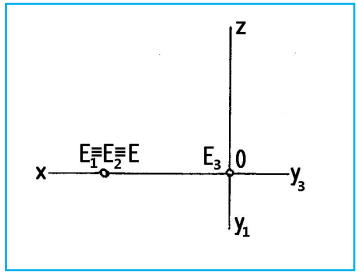


Рис. 1.32. Епюр точки Е (Е ∈ x)
Рис. 1.32. Эпюр точки Е (Е ∈ x)

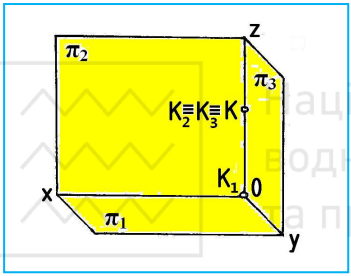


Рис. 1.33. Наочне зображення точки К та її проекцій (Е ∈ z)
Рис. 1.33. Наглядное изображение точки К и ее проекций (Е ∈ z)

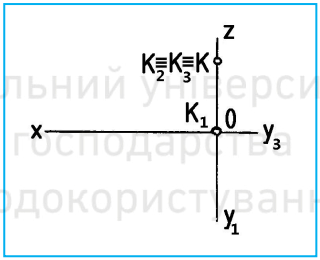


Рис. 1.34. Епюр точки К (К ∈ z)
Рис. 1.34. Эпюр точки К (К ∈ z)

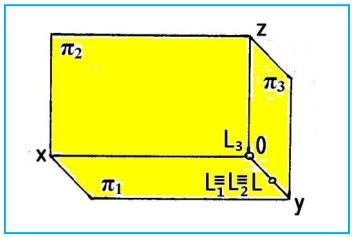


Рис. 1.35. Наочне зображення точки L та її проекцій (L ∈ y)
Рис. 1.35. Наглядное изображение точки L и ее проекций (L ∈ y)

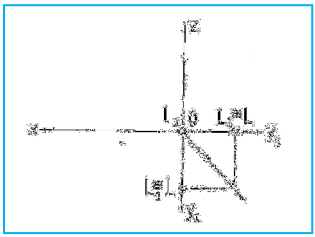


Рис. 1.36. Епюр точки L (L ∈y)
Рис. 1.36. Эпюр точки L (L ∈ y)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 1.33 дано наочне зображення точки К, яка лежить на осі z, тобто належить двом площинам проекцій π_2 і π_3 водночас ($z = \pi_2 \cap \pi_3$). У цієї точки координати x і y дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_2, і площині π_3, то фронтальна K_2 і профільна K_3 проекції точки К збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.34 дано епюр точки К, що лежить на осі проекцій z.

На рис. 1.35 дано наочне зображення точки L, яка лежить на осі y, тобто належить двом площинам проекцій π_1 і π_3 водночас ($y = \pi_1 \cap \pi_3$). У цієї точки координати x і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1, і площині π_3, то горизонтальна L_1 і профільна L_3 проекції точки L збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.36 дано епюр точки L, що лежить на осі проекцій y.

Таким чином, у точок, що лежать на осях проекцій, тобто належать двом площинам проекцій водночас, дві координати дорівнюють нулю; це саме ті, які вказують на віддаленість точок від тих площин проекцій, на яких водночас лежать ці точки, при цьому дві з трьох проекцій даних точок збігаються між собою і з самою точкою.

На рис. 1.33 дано наглядное изображение точки К, которая лежит на оси z, то есть принадлежит двум плоскостям проекций π_2 и π_3 одновременно ($z = \pi_2 \cap \pi_3$). У этой точки координаты x и y равны нулю. Поскольку точка принадлежит и плоскости π_2, и плоскости π_3, то горизонтальная K_2 и профильная K_3 проекции точки К совпадают между собой и с самой точкой. На рис. 1.34 дано эпюр точки К, которая лежит на оси проекций z.

На рис. 1.35 дано наглядное изображение точки L, которая лежит на оси y, то есть принадлежит двум плоскостям проекций π_1 и π_3 одновременно ($y = \pi_1 \cap \pi_3$). У этой точки координаты x и z равны нулю. Поскольку точка принадлежит и плоскости π_1, и плоскости π_3, то горизонтальная L_1 и профильная L_3 проекции точки L совпадают между собой и с самой точкой. На рис. 1.36 дано эпюр точки L, которая лежит на оси проекций y.

Таким образом, у точек, которые лежат на осях проекций, то есть принадлежат двум плоскостям проекций одновременно, две координаты равны нулю; это именно те, которые указывают на удаленность точек от тех плоскостей проекций, на которых одновременно лежат эти точки, при этом две из трех проекций данных точек совпадают между собой и с самой точкой.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Нарисна геометрія.
Розділ 2. Проекціювання прямої

2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення

Пряма – найкоротша відстань між двома точками.

Проекцією прямої лінії в загальному випадку є також пряма лінія. Так, на рис. 2.1 дано наочне зображення прямої l і її проекцій – горизонтальної l_1 та фронтальної l_2 – в системі двох площин проекцій π_1 і π_2.

На рис. 2.2 дано епюр прямої l у вигляді прямих ліній – проекцій l_1 і l_2. Якщо пряма зображена прямими лініями, то вона сама і її проекції позначаються малими літерами латинського алфавіту – l, b, k тощо.

Пряма в просторі може бути визначена двома нетотожними точками. На рис. 2.3 дано наочне зображення прямої, що проходить через точки А і В простору. Отримавши горизонтальні (A_1, B_1) та фронтальні (A_2, B_2) проекції цих точок та провівши пряму через точки A_1 і B_1, дістанемо горизонтальну проекцію A_1B_1 прямої АВ, а провівши пряму через точки A_2 і B_2 – фронтальну проекцію A_2 B_2 прямої АВ.

На рис. 2.4 дано епюр прямої АВ. Якщо пряма визначена двома

Начертательная геометрия
Раздел 2. Проецирование прямой

2.1. Проекции прямой. Прямые общего положения

Прямая – это самое короткое расстояние между двумя точками.

Проекцией прямой линии в общем случае является также прямая линия. Так, на рис. 2.1 дано наглядное изображение прямой l и ее проекций – горизонтальной l_1 и фронтальной l_2 – в системе двух плоскостей проекций π_1 и π_2.

На рис. 2.2 дано эпюр прямой l в виде прямых линий – проекций l_1 и l_2. Если прямая изображена прямыми линиями, то она сама и ее проекции обозначаются строчными буквами латинского алфавита – l, b, k и т.д.

Прямая в пространстве может быть определена двумя нетождественными точками. На рис. 2.3 дано наглядное изображение прямой, которая проходит через точки А и В пространства. Получив горизонтальные (A_1, B_1) и фронтальные (A_2, B_2) проекции этих точек и проведя прямую через точки A_1 и B_1, получим горизонтальную проекцию A_1B_1 прямой АВ, а проведя прямую через точки A_2 и B_2, – фронтальную проекцию A_2B_2 прямой АВ.

На рис. 2.4 дано эпюр прямой АВ. Если прямая определена

Національний університет
водного господарства
та природокористування

нетотожними точками, то вона і її проекції позначаються великими літерами латинського алфавіту за назвою двох її точок – AB, CD і т.д.

Таким чином, пряму лінію на епюрі зображують:

1) прямими лініями – її проекціями (рис. 2.2);

2) проекціями двох її нетотожних точок (рис. 2.4).

Залежно від розміщення прямих відносно площин проекцій розрізняють прямі загального положення, прямі рівня та проекціюючі прямі.

Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій.

На епюрі у прямих загального положення проекції не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x. Це характерна графічна ознака епюрів прямих загального положення, яка дозволяє відрізнити епюри прямих загального положення від епюрів прямих рівня та проекціюючих прямих. На рис. 2.2 і 2.4 зображено епюри прямих загального положення, оскільки l_1 , A_1B_1 і l_2, A_2B_2 не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x.

З означення прямої загального положення випливає, що координати x , як і координати y

двумя нетождественными точками, то она и ее проекции обозначаются прописными буквами латинского алфавита по названию двух ее точек – AB, CD и т.д.

Таким образом, прямую линию на эпюре изображают:

1) прямыми линиями – ее проекциями (рис. 2.2);

2) проекциями двух ее нетождественных точек (рис. 2.4).

В зависимости от размещения прямых относительно плоскостей проекций различают прямые общего положения, прямые уровня и проецирующие прямые.

Прямые общего положения – это прямые, которые не параллельны и не перпендикулярны ни к одной из плоскостей проекций.

На эпюре у прямых общего положения проекции не параллельны и не перпендикулярны к оси проекций x. Это характерный графический признак эпюров прямых общего положения, который позволяет отличить эпюры прямых общего положения от эпюров прямых уровня и проецирующих прямых. На рис. 2.2 и 2.4 изображено эпюры прямых общего положения, поскольку l_1, A_1B_1 и l_2, A_2B_2 не параллельны и не перпендикулярны к оси проекций x.

Из определения прямой общего положения следует, что координаты x, как и

Національний університет
водного господарства
та природокористування

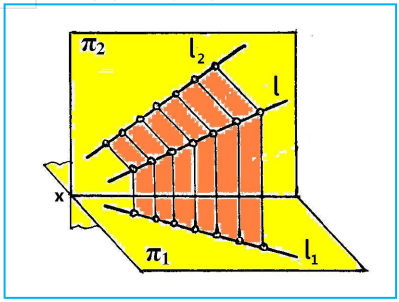


Рис. 2.1. Зображення прямої *l* у вигляді прямих ліній – її проекцій
Рис. 2.1. Изображение прямой *l* в виде прямых линий – ее проекций

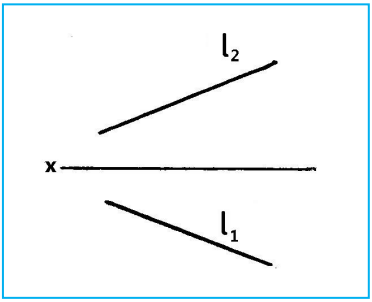


Рис. 2.2. Епюр прямої *l*
Рис. 2.2. Эпюр прямой *l*

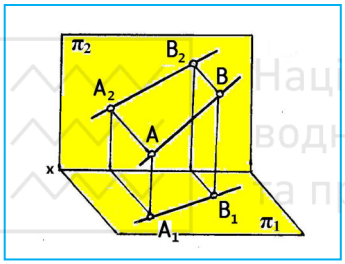


Рис. 2.3. Зображення прямої AB у вигляді проекцій двох її нетотожних точок
Рис. 2.3. Изображение прямой AB в виде проекций двух ее нетождественных точек

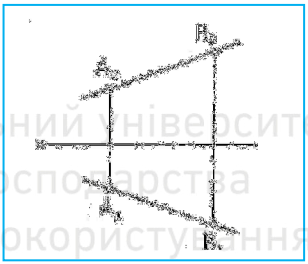


Рис. 2.4. Епюр прямої AB
Рис. 2.4. Эпюр прямой AB

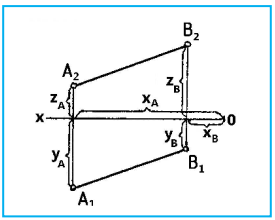


Рис. 2.5. Епюр прямої AB із зазначеними координатами точок A і B
Рис. 2.5. Эпюр прямой AB с обозначенными координатами точек A и B

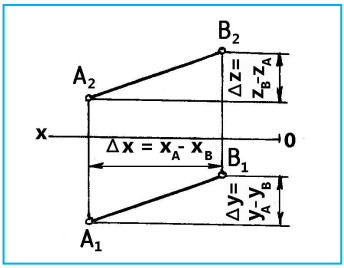


Рис. 2.6. Епюр прямої AB із зазначеними різницями координат точок A і B
Рис. 2.6. Эпюр прямой AB с обозначенными разницами координат точек A и B

Національний університет
водного господарства
та природокористування

та z, двох будь-яких нетотожних точок цієї прямої мають різні числові значення (рис. 2.5). Лише прямій загального положення властиве те, що різниці всіх трьох координат двох її нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю (рис. 2.6).	координаты y и z, двух ее любых нетождественных точек этой прямой имеют разные численные значения (рис. 2.5). Только прямой общего положения свойственно то, что разница всех трех координат двух ее нетождественных точек отличается от нуля (рис. 2.6).
Зазначимо проекційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:	Отметим проекционные свойства и координатные характеристики прямой общего положения:
1) на епюрі проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні осям проекцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення;	1) на эпюре проекции прямой не параллельны и не перпендикулярны к осям проекций – это характерный графический признак, который характерен только прямой общего положения;
2) кожна проекція відрізка прямої коротша за натуральну величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проекцій;	2) каждая проекция отрезка прямой короче натуральной величины самого отрезка, поскольку прямая не параллельна ни к одной из плоскостей проекций;
3) різниці координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.	3) разница координат x, y, z двух нетождественных точек прямой не равна нулю.
2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення. Сліди прямої	2.2. Натуральная величина отрезка прямой общего положения. Следы прямой
Оскільки проекції відрізка прямої загального положення коротші за натуральну величину самого відрізка, визначити дійсну величину відрізка безпосередньо за епюром неможливо. Проте існує спосіб, який називається	Поскольку проекции отрезка прямой общего положения короче натуральной величины самого отрезка, определить действительную величину отрезка непосредственно по эпюру невозможно. Однако существует

Національний університет
водного господарства
та природокористування

способом прямокутного трикутника, що дозволяє, виконавши деякі графічні побудови, визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення.

На рис. 2.7 дано наочне зображення відрізка АВ прямої загального положення та його проекцій – горизонтальної A_1B_1 та фронтальної A_2B_2. Кут α – це кут нахилу прямої АВ, що проходить через відрізок АВ до горизонтальної площини проекцій π_1. Він визначається як кут між самою прямою та її горизонтальною проекцією.

На рис. 2.7 також показано визначення натуральної величини відрізка прямої АВ та кута α її нахилу до площини проекцій π_1, а на рис. 2.8 – знаходження цих величин на епюрі.

На рис. 2.9 показано визначення натуральної величини відрізка АВ прямої загального положення та кута β її нахилу до площини проекцій π_2, а на рис. 2.10 – побудова цих величин на епюрі.

ВИСНОВКИ

Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один з катетів – проекція відрізка прямої на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює

способ, называемый способом прямоугольного треугольника. который позволяет, выполняя некоторые графические построения, определить натуральную величину отрезка прямой общего положения.

На рис. 2.7 дано наглядное изображение отрезка АВ прямой общего положения и его проекций – горизонтальной A_1B_1 и фронтальной A_2B_2. Угол α – это угол наклона прямой АВ, которая проходит через отрезок АВ к горизонтальной плоскости проекций π_1. Он определяется как угол между самой прямой и ее горизонтальной проекцией.

На рис. 2.7 также показано определение натуральной величины отрезка прямой АВ и угла α ее наклона к плоскости проекций π_1, а на рис. 2.8 – нахождение этих величин на эпюре.

На рис. 2.9 показано определение натуральной величины отрезка АВ прямой общего положения и угла β ее наклона к плоскости проекций π_2, а на рис. 2.10 – нахождение этих величин на эпюре.

ВЫВОДЫ

Натуральная величина отрезка прямой общего положения определяется гипотенузой прямоугольного треугольника, у которого один из катетов – проекция отрезка прямой на одну из плоскостей проекций, а второй

Національний університет
водного господарства
та природокористування

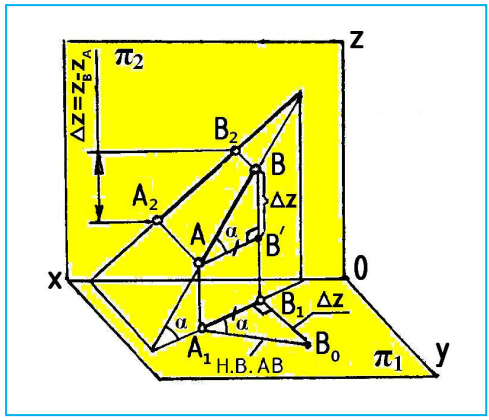


Рис. 2.7. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проекцій π_1

Рис. 2.7. Определение на наглядном изображении натуральной величины (Н.В.) отрезка прямой АВ общего положения и угла наклона α прямой к плоскости проекций π_1

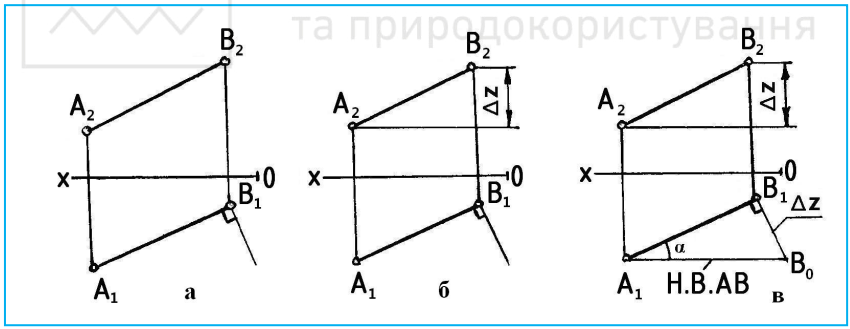


Рис. 2.8. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проекцій π_1 (а –1 дія, б – 2 дія, в – 3 дія)

Рис. 2.8. Определение на эпюре натуральной величины (Н.В.) отрезка прямой АВ общего положения и угла наклона α прямой к плоскости проекций π_1 (а – 1 действие, б – 2 действие, в – 3 действие)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

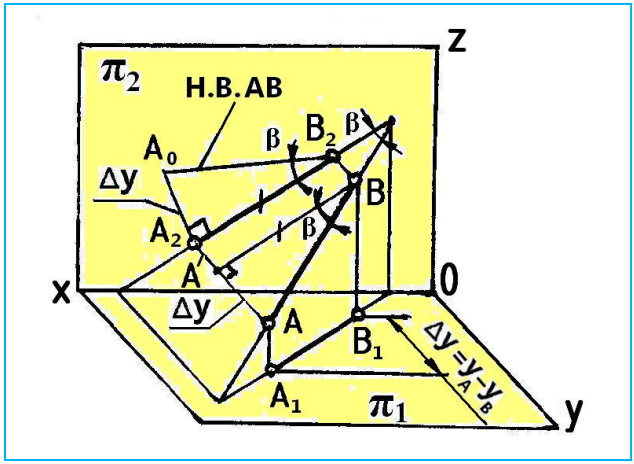


Рис. 2.9. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проекцій π_2

Рис. 29. Определение на наглядном изображении натуральной величині (Н.В.) отрезка прямой АВ общего положення и угла наклона β прямой к плоскости проекций π_2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

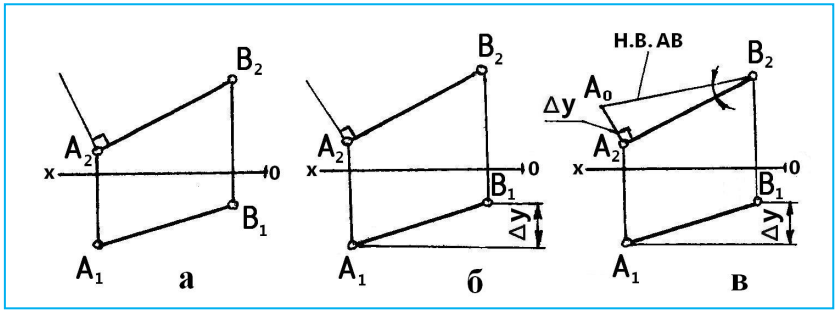


Рис. 2.10. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилуβ прямої до площини проекцій π_2 (а –1 дія, б – 2 дія, в – 3 дія)

Рис. 2.10. Определение на эпюре натуральной величины (Н.В.) отрезка прямой АВ общего положення и угла наклона β прямой к плоскости проекций π_2 (а – 1 действие, б – 2 действие, в – 3 действие)

Національний університет водного господарства та природокористування

різниці відстаней точок – кінців відрізка прямої – до тієї площини проекцій, на якій побудований прямокутний трикутник.

Із цього прямокутного трикутника визначають кут нахилу прямої до тієї площини проекцій, на якій побудований прямокутний трикутник. Цей кут дорівнює куту між гіпотенузою та катетом – проекцією.

Слідом прямої лінії називається точка перетину прямої з площиною проекцій.

На рис. 2.11 точка М – точка перетину прямої АВ з горизонтальною площиною проекцій π_1, а точка N – точка перетину прямої АВ з фронтальною площиною проекцій π_2.

Ці точки мають такі назви:

- точка М – горизонтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_1);
- точка N фронтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_2).

На рис. 2.12 і 2.13 показано послідовність побудови слідів прямої відповідно на наочному зображенні та епюрі.

2.3. Прямі часткового положення

Прямі часткового положення – це прямі рівня та проекціюючі прямі.

катет равен разности расстояний точек – концов отрезка прямой – до той плоскости проекций, на которой построен прямоугольный треугольник.

Из этого прямоугольного треугольника определяют угол наклона прямой к той плоскости проекций, на которой построен прямоугольный треугольник. Этот угол равен углу между гипотенузой и катетом-проекцией.

Следом прямой линии называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

На рис. 2.11 точка М – точка пересечения прямой АВ с горизонтальной плоскостью проекций π_1, а точка N – точка пересечения прямой АВ с фронтальной плоскостью проекций π_2.

Эти точки имеют такие названия:

- точка М – горизонтальный след прямой (точка пересечения прямой с плоскостью π_1);
- точка N – фронтальный след прямой (точка пересечения прямой с плоскостью π_2).

На рис. 2.12 и 2.13 показано последовательность построения следов прямой соответственно на наглядном изображении и эпюре.

2.3. Прямые частного положения

Прямые частного положения – это прямые уровня и проецирующие прямые.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

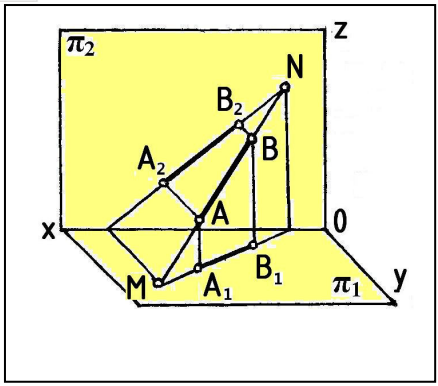


Рис. 2.11. Сліди прямої АВ (М – горизонтальний слід прямої, М = АВ ∩ π_1; N – фронтальний слід прямої, N = АВ ∩ π_2)

Рис. 2.11. Следы прямой АВ (М – горизонтальный след прямой, М = АВ ∩ π_1; N – фронтальный след прямой, N = АВ ∩ π_2)

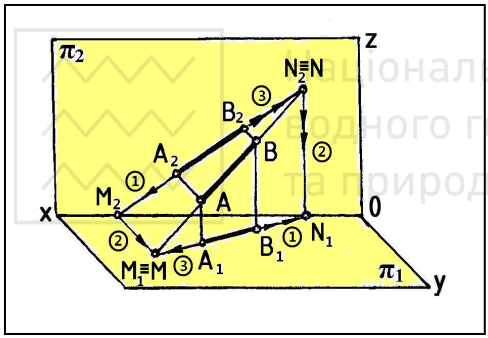


Рис.2.12. Послідовність побудови слідів прямої

Рис. 2.12. Последовательность построения следов прямой

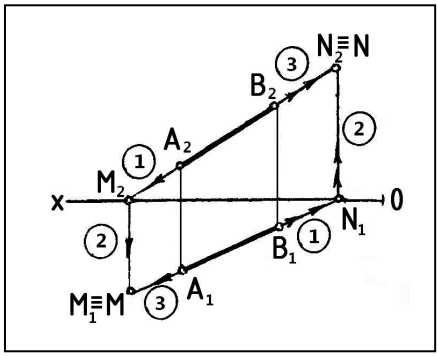


Рис.2.13. Послідовність побудови слідів прямої на епюрі

Рис. 2.13. Последовательность построения следов прямой на эпюре

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прямими рівня називають прямі, які паралельні до однієї з площин проекцій, а проекціюючими – прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій. Слід зазначити, що проекціюючі прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій, паралельні водночас до двох інших площин проекцій. Тобто, прямі часткового положення паралельні до однієї (прямі рівня) або до двох площин проекцій (проекціюючі прямі). Розглянемо прямі часткового положення в системі двох площин проекцій. <u>Прямі рівня</u> 2.3.1. Пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтальною прямою або горизонталлю і позначається буквою h. На рис.2.14–2.17 дано наочне зображення та епюр горизонтальної прямої АВ. Горизонтальна пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики: 1) фронтальна проекція паралельна до осі *x*. Це характерна графічна ознака, яка притаманна саме цій прямій (на рис. 2.14 -2.17 $A_2B_2 // x$);	Прямыми уровня называются прямые, которые параллельны к одной из плоскостей проекций, а проецирующими – прямые, которые перпендикулярны к одной из плоскостей проекций. Следует отметить, что проецирующие прямые, которые перпендикулярны одной из плоскостей проекций, параллельны одновременно двум другим плоскостям проекций. То есть, прямые частного положения параллельны одной (прямые уровня) или двум плоскостям проекций (проецирующие прямые). Рассмотрим прямые частного положения в системе двух плоскостей проекций. <u>Прямые уровня</u> 2.3.1. Прямая уровня, которая параллельна к горизонтальной плоскости проекций, называется горизонтальной прямой или горизонталью и обозначаются буквой h. На рис. 2.14–2.17 дано наглядное изображение и эпюр горизонтальной прямой АВ. Горизонтальная прямая имеет следующие проекционные свойства и координатные характеристики: 1) фронтальная проекция параллельна оси *x*. Это характерный графический признак именно этой прямой (на рис. 2.14 – 2.17 $A_2B_2 // x$);

Національний університет
водного господарства
та природокористування

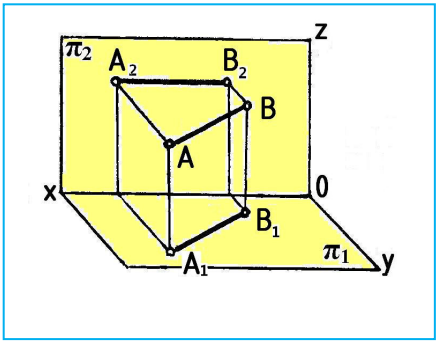


Рис. 2.14. Наочне зображення горизонтальної прямої АВ (АВ ∥ π_1, A_2B_2 ∥ x)
Рис. 2.14. Наглядное изображение горизонтальной прямой АВ (АВ ∥ π_1, A_1B_1 ∥ x)

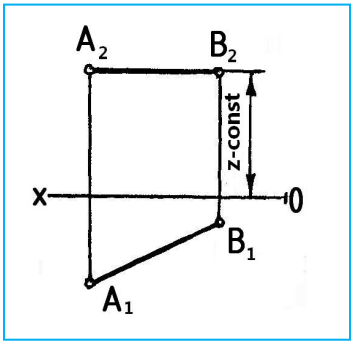


Рис. 2.15. Епюр горизонтальної прямої АВ
Рис. 2.15. Эпюр горизонтальной прямой АВ (A_2B_2 ∥ x)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

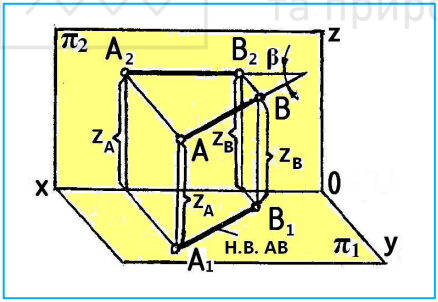


Рис. 2.16. Наочне зображення горизонтальної прямої АВ (∠ β - кут нахилу прямої до площини π_2 , A'B' = Н.В. АВ , $z_A = z_B$)
Рис. 2.16. Наглядное изображение горизонтальной прямой АВ (∠ β - угол наклона прямой к плоскости π_2 , A'B' = Н.В. АВ , $z_A = z_B$)

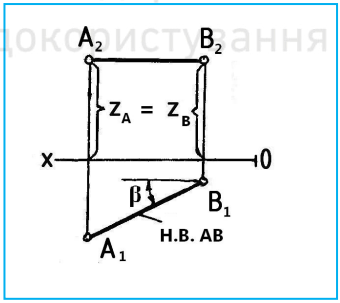


Рис. 2.17. Епюр горизонтальної прямої АВ (∠ β - кут нахилу прямої до площини π_2 , A'B' = Н.В. АВ , $z_A = z_B$)
Рис. 2.17. Эпюр горизонтальной прямой АВ (∠ β - угол наклона прямой к плоскости π_2 , A'B' = Н.В. АВ , $z_A = z_B$)

Національний університет водного господарства та природокористування

2) координата z всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.15-2.17);	прямой является постоянной величиной (рис. 2.15-2.17);
3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.14-2.17 A_1B_1 = Н.В. АВ, A_1B_1 // АВ);	3) горизонтальная проекция отрезка прямой определяет натуральную величину самого отрезка прямой и параллельна ему (на рис. 2.14-2.17 A_1B_1 = Н.В. АВ, A_1B_1 // АВ);
4) $\angle\beta$ – кут нахилу горизонтальної прямої до площини π_2 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.	4) $\angle\beta$ – угол наклона горизонтальной прямой к плоскости π_2 и определяется непосредственно по эпюру без дополнительных графических построений.
2.3.2. Пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проекції, називається фронтальною прямою або фронталлю і позначається буквою f.	2.3.2. Прямая уровня, которая параллельна фронтальной плоскости проекций, называется фронтальной прямой или фронталью и обозначаются буквой f.
На рис. 2.18-2.21 дано наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD.	На рис. 2.18-2.21 дано наглядное изображение и эпюр фронтальной прямой CD.
Фронтальна пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:	Фронтальная прямая имеет следующие проекционные свойства и координатные характеристики:
1) горизонтальна проекція паралельна до осі x. Це характерна графічна ознака цієї прямої (на рис. 2.18-2.21 C_1D_1 // x);	1) горизонтальная проекция параллельна оси x. Это характерный графический признак этой прямой (на рис. 2.18-2.21 C_1D_1 // x);
2) координата y всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.19-2.21);	2) координата y всех точек прямой является постоянной величиной (рис. 2.19-2.21);
3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.18-2.21 C_2D_2 = НВ	3) фронтальная проекция отрезка прямой определяет натуральную величину самого отрезка прямой и параллельна ему (на рис. 2.18-2.21 C_2D_2 =

Національний університет
водного господарства
та природокористування

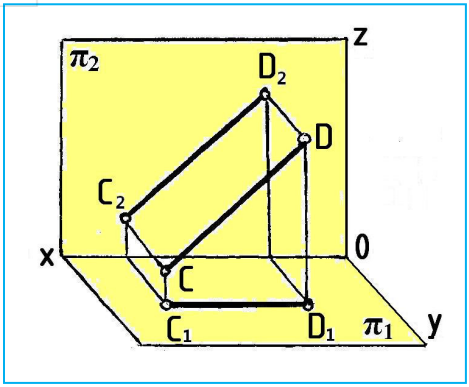


Рис. 2.18. Наочне зображення фронтальної прямої CD (CD ∥ π_2, C_1D_1 ∥ x)
Рис. 2.18. Наглядное изображение фронтальной прямой CD (CD ∥ π_2, C_1D_1 ∥ x)

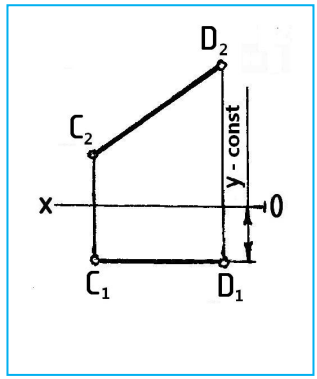


Рис. 2.19. Епюр фронтальної прямої CD (C_1D_1 ∥ x)
Рис. 2.19. Эпюр фронтальной прямой CD (C_1D_1 ∥ x)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

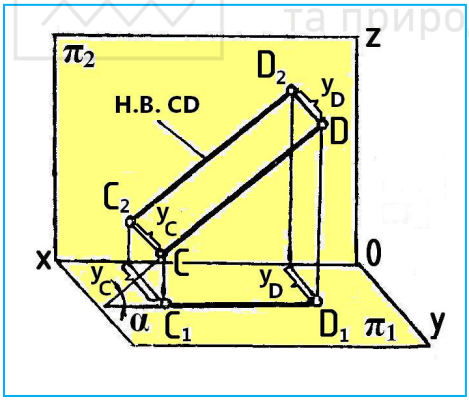


Рис. 2.16. Наочне зображення фронтальної прямої CD (∠ α – кут нахилу прямої до площини π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)
Рис. 2.16. Наглядное изображение фронтальной прямой AB (∠α – угол наклона прямой к плоскости $\pi 1$, C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)

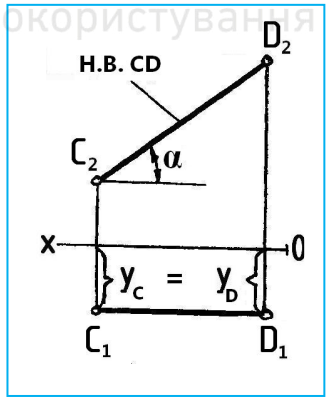


Рис. 2.17. Епюр фронтальної прямої CD (∠ α – кут нахилу прямої до площини π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)
Рис. 2.17. Эпюр фронтальной прямой CD (∠ α – угол наклона прямой к плоскости $\pi 1$, C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

CD, C_2D_2 // CD);	Н.В. CD, C_2D_2 // CD);
4) $\angle\alpha$ – кут нахилу фронтальної прямої до площини π_1 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.	4) $\angle\alpha$ – угол наклона фронтальной прямой к плоскости π_1 и определяется непосредственно по эпюру без дополнительных графических построений.
ВИСНОВКИ	ВЫВОДЫ
На площину проекцій, до якої пряма рівня паралельна, її відрізок проекціюється в натуральну величину, а на іншу площину проекцій – паралельно до осі проекцій. За епюром без додаткових графічних побудов визначається величина кута нахилу прямої до тієї площини проекцій, до якої пряма рівня не паралельна.	На плоскость проекций, к которой прямая уровня параллельна, ее отрезок проецируется в натуральную величину, а на другую плоскость проекций – параллельно к оси проекций. По эпюру без дополнительных графических построений определяется величина угла наклона прямой к той плоскости проекций, к которой прямая уровня не параллельна.
Проекціюючі прямі	Проецирующие прямые
2.3.3. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтально-проекціюючою прямою.	2.3.3. Проецирующая прямая, которая перпендикулярна к горизонтальной плоскости проекций, называется горизонтально-проецирующей прямой.
На рис. 2.22-2.25 дано наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB.	На рис. 2.22-2.25 дано наглядное изображение и эпюр горизонтально-проецирующей прямой AB.
Горизонтально-проекціююча пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:	Горизонтально-проецирующая прямая имеет следующие проекционные свойства и координатные характеристики:
1) горизонтальна проекція прямої – точка, а фронтальна проекція перпендикулярна осі *x* (на рис. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$);	1) горизонтальная проекция прямой – точка, а фронтальная проекция перпендикулярна оси *x* (на рис. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$);
2) координати *x* і *y* всіх точок	2) координаты *x* и *y* всех точек

Національний університет
водного господарства
та природокористування

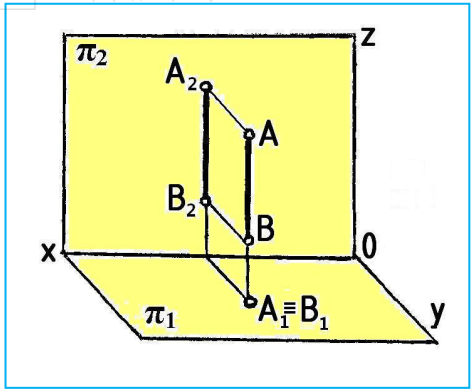


Рис. 2.22. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої АВ ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // АВ)

Рис. 2.22. Наглядное изображение горизонтально-проецирующей прямой ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // АВ)

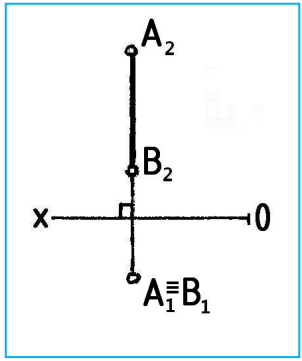


Рис. 2.23. Епюр горизонтально-проекціюючої прямої АВ ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Рис. 2.23. Эпюр горизонтально-проецирующей прямой ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

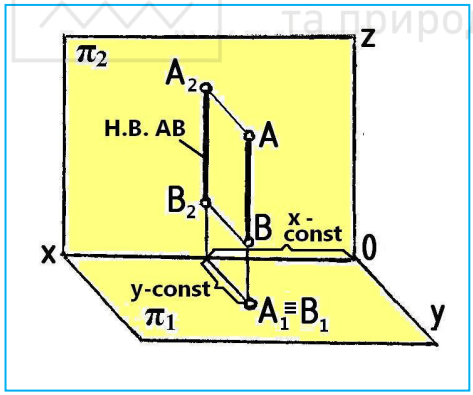


Рис. 2.24. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої АВ ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // АВ, A_2B_2 = Н.В. АВ)

Рис. 2.24. Наглядное изображение горизонтально-проецирующей прямой ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // АВ, A_2B_2 = Н.В. АВ)

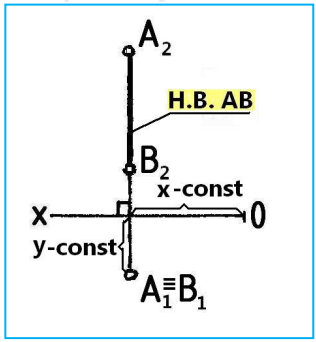


Рис. 2.25. Епюр горизонтально-проекціюючої прямої АВ ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 = Н.В. АВ)

Рис. 2.25. Эпюр горизонтально-проецирующей прямой ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 = Н.В. АВ)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

прямої – сталі величини (див. рис. 2.24, 2.25); 3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.22-2.25 A_2B_2 = НВ AB, A_2B_2 //AB).	прямой – постоянные величины (см. рис. 2.24, 2.25); 3) фронтальная проекция отрезка прямой определяет натуральную величину самого отрезка и параллельна ему (на рис. 2.22-2.25 A_2B_2 = НВ AB, A_2B_2 //AB).
2.3.4. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально-проекціюючою прямою. На рис. 2.26-2.29 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої прямої CD. Фронтально-проекціююча пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики: 1) фронтальна проекція прямої – точка, а горизонтальна проекція перпендикулярна осі x (на рис. 2.26-2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$); 2) координати x і z всіх точок прямої – сталі величини (див. рис. 2.28, 2.29); 3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.26-2.29 C_1D_1 = Н.В. CD).	2.3.4. Проецирующая прямая, которая перпендикулярна к фронтальной плоскости проекций, называется фронтально-проецирующей прямой. На рис. 2.26-2.29 дано наглядное изображение и эпюр фронтально-проецирующей прямой CD. Фронтально-проецирующая прямая имеет следующие проекционные свойства и координатные характеристики: 1) фронтальная проекция прямой – точка, а горизонтальная проекция перпендикулярна оси x (на рис. 2.26-2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$); 2) координаты x и z всех точек прямой – постоянные величины (см. рис. 2.28, 2.29); 3) горизонтальная проекция отрезка прямой определяет натуральную величину самого отрезка и параллельна ему (на рис. 2.26-2.29 C_1D_1 = Н.В. CD).
ВИСНОВКИ На площину проекції, до якої проекціююча пряма перпендикулярна, вона проекціюється в точку, а на іншу площину	ВЫВОДЫ На плоскость проекций, к которой проецирующая прямая перепендикулярна, она проецируется в точку, а на другую

Національний університет
водного господарства
та природокористування

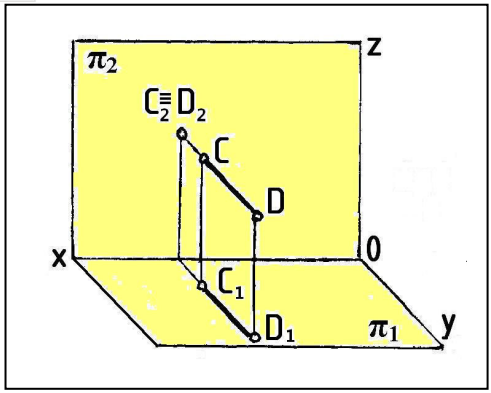


Рис. 2.26. Наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD)

Рис. 2.26. Наглядное изображение фронтально-проецирующей прямой CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD)

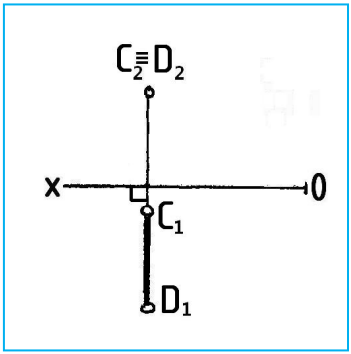


Рис. 2.27. Епюр фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

Рис. 2.27. Эпюр фронтально-проецирующей прямой CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

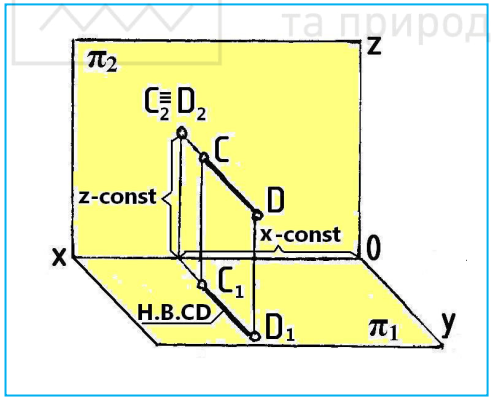


Рис. 2.28. Наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD, C_1D_1 = H.B. CD)

Рис. 2.28. Наглядное изображение фронтально-проецирующей прямой CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD, C_1D_1 = H.B. CD)

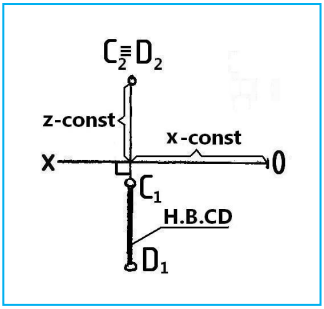


Рис. 2.29. Епюр фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 = H.B. CD)

Рис. 2.29. Эпюр фронтально-проецирующей прямой CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 = H.B. CD)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцій, до якої вона паралельна, – перпендикулярно до осі проекцій, а її відрізок – в натуральну величину.

2.4. Взаємне положення двох прямих

Точка належить прямій, якщо на епюрі проекції точки належать однойменним проекціям прямої.

На рис. 2.30 тільки точка D належить прямій f, оскільки $D_1 \equiv f_1$ і $D_2 \equiv f_2$. Решта точок не належать прямій f.

Прямі в просторі можуть бути:

1) паралельними;

2) прямими, що перетинаються (пересічними прямими);

3) мимобіжними, тобто прямими, що не паралельні і не перетинаються.

2.4.1. Проекції паралельних прямих на площини проекцій, до яких вони не перпендикулярні, паралельні між собою або паралельні та збігаються.

На рис. 2.31, 2.32 дано епюри паралельних прямих ($l \parallel m$ і $k \parallel n$), оскільки $l_1 \parallel m_1$ і $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ і $k_1 \equiv n_1$.

2.4.2. Проекції прямих, що перетинаються, проекціюються на площини проекцій прямими лініями, що також перетинаються, або перетинаються та збігаються, причому точки перетину

плоскость проекций, к которой она параллельна, – перпендикулярно оси проекций, а ее отрезок – в натуральную величину.

2.4. Взаимное расположение двух прямых

Точка принадлежит прямой, если на эпюре проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой.

На рис. 2.30 только точка D принадлежит прямой f, поскольку $D_1 \equiv f_1$ и $D_2 \equiv f_2$. Остальные точки не принадлежат прямой f.

Прямые в пространстве могут быть:

1) параллельными;

2) пересекающимися;

3) скрещивающимися, то есть прямыми, которые не параллельны и не пересекаются.

2.4.1. Проекции параллельных прямых на плоскости проекций, к которым они не перпендикулярны, параллельны между собой или параллельны и совпадают.

На рис. 2.31, 2.32 дано эпюры параллельных прямых ($l \parallel m$ и $k \parallel n$), поскольку $l_1 \parallel m_1$ и $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ и $k_1 \equiv n_1$.

2.4.2. Проекции пересекающихся прямых проецируются на плоскости проекций прямыми линиями, которые также пересекаются, или пересекаются

Національний університет
водного господарства
та природокористування

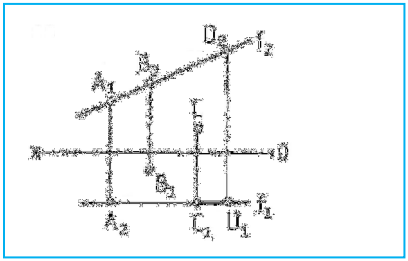


Рис. 2.30. Приналежність точки прямій лінії
Рис. 2.30. Принадлежность точки прямой линии

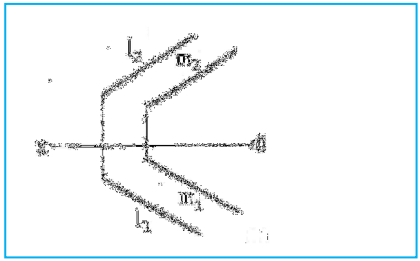


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих *l* і *m*
Рис. 2.31. Эпюр параллельных прямых *l* и *m*

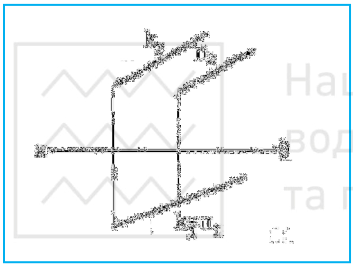


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих *k* і *n*
Рис. 2.31. Эпюр параллельных прямых *k* и *n*

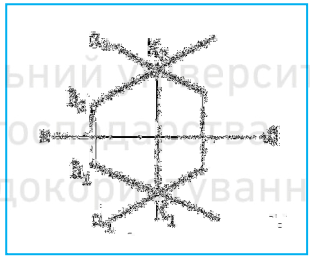


Рис. 2.32. Епюр прямих *а* і *в*, що перетинаються
Рис. 2.32. Епюр пересекающихся прямих *а* и *в*

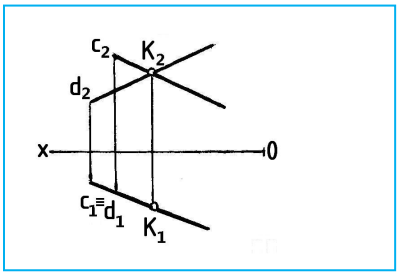


Рис. 2.33. Епюр прямих *c* і *d*, що перетинаються
Рис. 2.33. Епюр пересекающихся прямих *c* и *d*

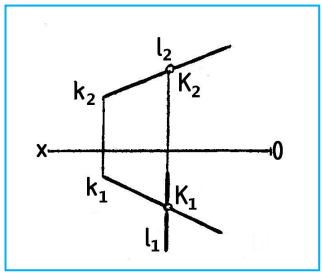


Рис. 2.34. Епюр прямих *k* і *l*, що перетинаються
Рис. 2.34. Епюр пересекающихся прямих *k* и *l*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

одноіменних проекцій прямих лежать на одній лінії проекційного зв'язку, оскільки є проекціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.	точки пересечения одноименных проекций прямых лежат на одной линии проекционной связи, поскольку являются проекциями одной и той же точки – точки пересечения прямых.
На рис. 2.33 дано епюр прямих a і b, що перетинаються в точці К, оскільки $К_1=a_1 \cap b_1$, $К_2= a_2 \cap b_2$ (горизонтальна проекція $К_1$ і фронтальна проекція $К_2$ точки К лежать на одній вертикальній лінії проекційного зв'язку).	На рис. 2.33 дано эпюр прямых a и b, которые пересекаются в точке К, поскольку $К_1 = a_1 \cap b_1$, $К_2= a_2 \cap b_2$ (горизонтальная проекция $К_1$ и фронтальная проекция $К_2$ точки К лежат на одной вертикальной линии проекционной связи).
На рис. 2.34, 2.35 дано також епюри пересічних прямих c, d і k, l, що перетинаються в точці К. Прямі c, d і k, l лежать в одній площині, яка перпендикулярна до π_1 (рис. 2.34) і до π_2 (рис. 2.35). За проекціями цих прямих, які не збігаються, видно, що це епюри не паралельних прямих, а саме пересічних прямих.	На рис.2.34, 2.35 дано также эпюры пересекающихся прямых c, d и k, l, которые пересекаются в точке К. Прямые c, d и k, l лежат в одной плоскости, которая перпендикулярна π_1 (рис. 2.34) и π_2 (рис. 2.35). По проекциям этих прямых, которые не совпадают, видно, что это эпюры не параллельных, а именно пересекающихся прямых.
2.4.3. Якщо прямі мимобіжні, тобто не паралельні і не перетинаються, то точки перетину їх одноіменних проекцій не лежать на одній лінії проекційного зв'язку, а проекції ніколи не збігаються.	2.4.3. Если прямые скрещивающиеся, то есть не параллельны и не пересекаются, то точки пересечения их одноименных проекций не лежат на одной линии проекционной связи, а проекции никогда не совпадают.
Через дві мимобіжні прямі неможливо провести одну площину, тобто мимобіжні прямі не можуть лежати в одній площині,на відміну від паралельних прямих та прямих, що перетинаються, а, отже, їх	Через две скрещивающиеся прямые невозможно провести одну плоскость, то есть скрещивающиеся прямые не могут лежать в одной плоскости, в отличие от параллельных и

Національний університет
водного господарства

проекції ніколи не збігаються.

На рис. 2.36 і 2.37 дано епюр прямих *a*, *b* і *c*, *d*. Незважаючи на те, що проекції прямих перетинаються, тільки на рис. 2.36 зображено епюр прямих, що перетинаються, оскільки 1_1 і 1_2 лежать на одній лінії проекційного зв'язку. На рис. 2.37 зображено епюр мимобіжних прямих, оскільки 1_1 (точка перетину c_1 і d_1) і точка 1_2 (точка перетину c_2 і d_2) не лежать на одній лінії проекційного зв'язку.

Можна іншим способом визначити, що прямі *c* і *d* – мимобіжні (рис. 2.38). З точки 1_2 проводимо вертикальну лінію проекційного зв'язку, яка перетинає як c_1, так і d_1, тобто точка 1 може належати як прямій *c*, так і прямій *d*, а, отже, точка 1 не є точкою перетину прямих *c* і *d*. А на рис. 2.36 точка 1 належить як прямій *a*, так і прямій *b*, тобто є точкою перетину прямих *a* і *b*.

На рис. 2.39 дано наочне зображення мимобіжних прямих *a* і *b*, а на рис. 2.40 – їх епюр.

Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі. Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній лінії

пересекающихся прямых, а, следовательно, их проекции никогда не совпадают.

На рис. 2.36 и 2.37 дано эпюр прямых *a*, *b* и *c*, *d*. Несмотря на то, что проекции прямых пересекаются, только на рис. 2.36 изображено эпюр пересекающихся прямых, поскольку 1_1 и 1_2 лежат на одной линии проекционной связи. На рис. 2.37 изображено эпюр скрещивающихся прямых, поскольку 1_1 (точка пересечения c_1 и d_1) и точка 1_2 (точка пересечения c_2 и d_2) не лежат на одной линии проекционной связи.

Можно другим способом определить, что прямые *c* и *d* – скрещивающиеся (рис. 2.38). Из точки 1_2 проводим вертикальную линию проекционной связи, которая пересекает как c_1, так и d_1, то есть точка 1 может принадлежать как прямой *c*, так и прямой *d*, а, следовательно, точка 1 не является точкой пересечения прямых *c* і *d*. А на рис. 2.36 точка 1 принадлежит как прямой *a*, так и прямой *в*, то есть является точкой пересечения прямых *a* і *b*.

На рис. 2.39 дано наглядное изображение скрещивающихся прямых *a* и *b*, а на рис. 2.40 – их эпюр.

Для скрещивающихся прямых характерно наличие конкурирующих точек, с помощью которых определяют видимость элементов геометрических фигур на эпюре. Конкурирующими

Національний університет
водного господарства
та природокористування

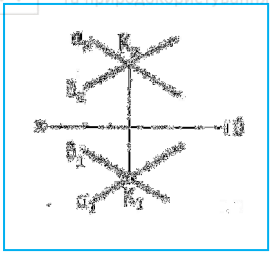


Рис. 2.36. Епюр пересічних прямих *а* і *в*
Рис. 2.36. Эпюр пересекающихся прямых *а* и *в*

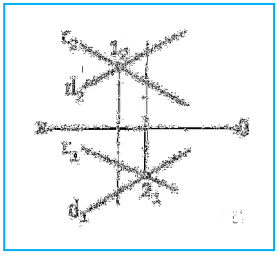


Рис. 2.37. Епюр мимобіжних прямих *с* і *d*
Рис. 2.37. Эпюр скрещивающихся прямых *с* и *d*

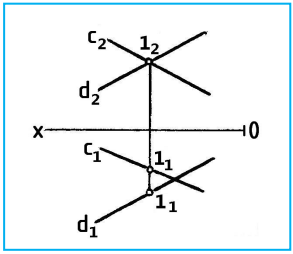


Рис. 2.38. Епюр мимобіжних прямих *с* і *d*
Рис. 2.38. Эпюр скрещивающихся прямых *с* и *d*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

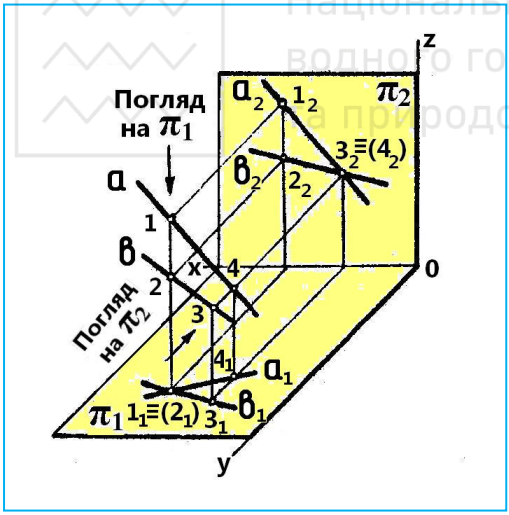


Рис. 2.39. Наочне зображення мимобіжних прямих *а* і *в* (1, 2 і 3, 4 – пари конкуруючих точок)
Рис. 2.39. Наглядное изображение скрещивающихся прямых *а* и *в* (1, 2 и 3, 4 – пары конкурирующих точек)

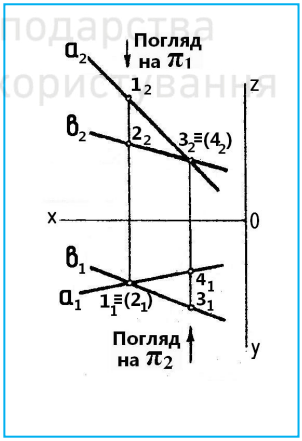


Рис. 2.40. Епюр мимобіжних прямих *а* і *в* (1, 2 і 3, 4 – пари конкуруючих точок)
Рис. 2.40. Эпюр скрещивающихся прямых *а* и *в* (1, 2 и 3, 4 – пары конкурирующих точек)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекційного зв'язку (див. рис. 1.3).

На рис. 2.39 пари точок 1, 2 і 3, 4 є конкуруючими точками. Точки 1 і 2 лежать на одній горизонтально-проекціюючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_1, тому горизонтальні проекції цих точок збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). Точки 3 і 4 лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_2, тому фронтальні проекції цих точок збігаються ($3_2 \equiv 4_2$).

Отже, якщо проекції обох точок збігаються, то це означає, що ці точки є конкуруючими і лежать на одній проекціюючій прямій.

З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проекцій буде та, у якої проекція, що не збігається з проекцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі *x*, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача.

Видимість елемента фігури на епюрі розв'язується для кожної проекції елемента окремо, а саме для тієї проекції елемента, на якій проекції конкуруючих точок збігаються.

Видимість елементів фігури зводиться до визначення видимості проекцій конкуруючих точок, що збігаються, і належать заданим елементам.

на одной линии проекционной связи (см. рис. 1.3).

На рис. 2.39 пары точек 1,2 и 3,4 являются конкурирующими точками. Точки 1 и 2 лежат на одной горизонтально-проецирующей прямой, которая перпендикулярна плоскости π_1, поэтому горизонтальные проекции этих точек совпадают ($1_1 \equiv 2_1$). Точки 3 и 4 лежат на одной фронтально-проецирующей прямой, которая перпендикулярна плоскости проекций π_2, поэтому фронтальные проекции этих точек совпадают ($3_2 \equiv 4_2$).

Следовательно, если проекции обеих точек совпадают, то это означает, что эти точки являются конкурирующими и лежат на одной проецирующей прямой.

Из двух конкурирующих точек видимой относительно плоскостей проекций будет та, у которой проекция, несовпадающая с проекцией другой конкурирующей точки, размещена дальше от оси *x*, то есть эта точка будет находится ближе к наблюдателю.

Видимость элемента фигуры на эпюре решается для каждой проекции элемента отдельно, а именно для той проекции элемента, на которой проекции конкурирующих точек совпадают.

Видимость элементов фигуры сводится к определению видимости проекций конкурирующих точек, которые совпадают, и

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 2.40 серед конкуруючих точок 1 і 2 видимою на π_1 є точка 1, фронтальна проекція 1_2 якої розміщена далі від осі x, а сама точка 1 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_1 буде точка 2, тому її горизонтальну проекцію 2_1 взяли в дужки. Серед конкуруючих точок 3 і 4 видимою є точка 3, горизонтальна проекція 3_1 якої розміщена далі від осі x, а сама точка 3 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_2 буде точка 4, тому її фронтальну проекцію 4_2 взяли в дужки.

На рис. 2.41 показано, як за допомогою конкуруючих точок визначено видимість ребер піраміди ABCS.

Точки 1 і 2 є конкуруючими, що лежать на одній горизонтально-проекціюючій прямій, їх горизонтальні проекції збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). За допомогою цих точок визначено видимість горизонтальних проекцій A_1S_1 і B_1C_1 ребер AS і BC, які є мимобіжними прямими (1 Є AS, 2 Є BC). Горизонтальна проекція 1_1 є видимою, а 2_1 – невидимою, оскільки точка 1_2 розміщена далі від осі x, ніж точка 2_2. Точка 1 належить ребру AS, тому горизонтальна проекція A_1S_1 ребра AS буде видимою, а ребра BC – невидимою, оскільки точка 2_1 невидима.

принадлежат заданным элементам.

На рис.2.40 среди конкурирующих точек 1 и 2 видимой на π_1 является точка 1, фронтальная проекция 1_2 которой размещена дальше от оси x, а сама точка 1 – ближе к наблюдателю. Невидимой на π_1 будет точка 2, поэтому ее горизонтальную проекцию 2_1 взяли в скобки. Среди конкурирующих точек 3 и 4 видимою является точка 3, горизонтальная проекция 3_1 которой размещена дальше от оси x, а сама точка 3 – ближе к наблюдателю. Невидимою на π_2 будет точка 4, поэтому ее фронтальную проекцию 4_2 взяли в скобки.

На рис. 2.41 показано, как с помощью конкурирующих точек определена видимость ребер пирамиды ABCS.

Точки 1 и 2 являются конкурирующими и лежат на одной горизонтально-проецирующей прямой, их горизонтальные проекции совпадают ($1_1 \equiv 2_1$). С помощью этих точек определена видимость горизонтальных проекций A_1S_1 и B_1C_1 ребер AS і BC, которые являются скрещивающимися прямыми (1 Є AS, 2 Є BC). Горизонтальная проекция 1_1 является видимой, а 2_1 – невидимой, поскольку точка 1_2 размещена дальше от оси x, чем точка 2_2. Точка 1 принадлежит ребру AS, поэтому горизонтальная проекция A_1S_1 ребра AS

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Точки 3 і 4 є також конкуруючими, вони лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, їх фронтальні проекції збігаються ($3_2 \equiv 4_2$). За допомогою цих точок визначено видимість фронтальних проекцій A_2C_2 і B_2S_2 ребер АС і ВС, які є мимобіжними прямими (3 Є BS, 4 Є AC). Фронтальна проекція 3_2 є видимою, а 4_2 – невидимою, оскільки точка 3_1 розміщена далі від осі *x*, ніж точка 4_1. Точка 3 належить ребру BS, тому фронтальна проекція B_2S_2 ребра BS буде видимою, а ребра АС – невидимою, оскільки точка 4_1 невидима.

2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих

Прямий кут, утворений взаємно перпендикулярними прямими, проекціюється у вигляді прямого кута на ту площину проекцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга не перпендикулярна.

На рис. 2.42 показано наочне зображення прямого кута, утвореного сторонами АВ і ВС, які є відрізками прямих, що перетинаються, причому ВС // π_1, а АВ $\measuredangle$ π_1. На площині проекцій π_1 побудовано горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ прямого кута

будет видимой, а ребра ВС – невидимой, поскольку точка 2_1 невидимая.

Точки 3 и 4 являются конкурирующими, они лежат на одной фронтально-проецирующей прямой, их фронтальные проекции совпадают ($3_2 \equiv 4_2$). С помощью этих точек определена видимость фронтальных проекций A_2C_2 и B_2S_2 ребер АС и ВС, которые являются скрещивающимися прямыми (3 Є BS, 4 Є AC). Фронтальная проекция 3_2 является видимой, а 4_2 – невидимой, поскольку точка 3_1 размещена дальше от оси *x*, чем точка 4_1. Точка 3 принадлежит ребру BS, поэтому фронтальная проекция B_2S_2 ребра BS будет видимой, а ребра АС – невидимой, поскольку точка 4_1 невидимая.

2.3. Проецирование взаимно перпендикулярных прямых

Прямой угол, образованный взаимно перпендикулярными прямыми, проецируется в виде прямого угла на ту плоскость проекций, к которой одна из прямых (сторона угла) параллельна, а вторая не перпендикулярна.

На рис. 2.42 показано наглядное изображение прямого угла, образованного сторонами АВ и ВС, которые являются отрезками пересекающихся прямых, при этом ВС // π_1, а АВ $\perp$ π_1. На плоскости проекций π_1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

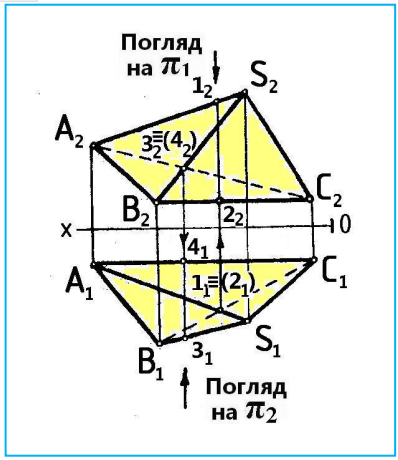


Рис. 2.41. Визначення видимості ребер піраміди ABCS
Рис. 2.41. Определение видимости ребер пирамиды ABCS

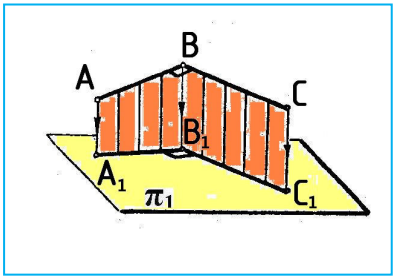


Рис. 2.42. Проекціювання прямого кута
Рис. 2.42. Проецирование прямого угла

Національний університет
водного господарства
та природокористування

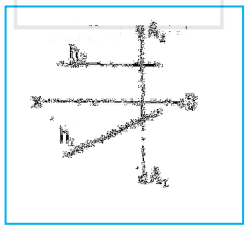


Рис. 2.43. Початкова умова задачі на визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h
Рис. 2.43. Начальное условие задачи на определение расстояния от точки А до горизонтальной прямой h

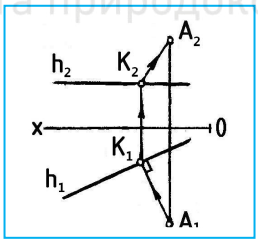


Рис. 2.44. Визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h (1 дія)
Рис. 2.43. Определение расстояния от точки А до горизонтальной прямой h (1 действие)

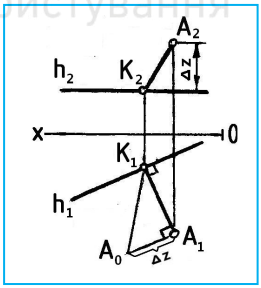


Рис. 2.45. Визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h (2 дія)
Рис. 2.45. Определение расстояния от точки А до горизонтальной прямой h (2 действие)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

АВС, яка, враховуючи зазначену властивість проекціювання прямого кута, також утворює кут 90°. Іншими словами, якщо кут АВС прямий, тобто сторони кута АВ і ВС є взаємно перпендикулярними прямими, причому сторона ВС цього кута паралельна площині π_1, а друга сторона АВ не перпендикулярна до площини π_1, то ортогональна проекція $A_1B_1C_1$ прямого кута на площині π_1 складає кут 90° (кут $A_1B_1C_1 = 90°$) або горизонтальні проекції сторін кута будуть взаємно перпендикулярними ($A_1B_1 \perp B_1C_1$).

Навпаки, якщо ортогональна проекція кута, який утворений двома прямими, що перетинаються, складає кут 90°, а одна сторона кута паралельна до тієї площини проекцій, де розміщена ортогональна проекція кута, а друга сторона кута не перпендикулярна до цієї ж площини проекцій, то в просторі такий кут складає також 90°.

На рис. 2.43–2.45 показано розв'язування задачі на визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h.

проекцию $A_1B_1C_1$ прямого угла АВС, которая, учитывая указанное свойство проецирования прямого угла, также образует угол 90^0. Другими словами, если кут АВС прямой, то есть стороны угла АВ и ВС являются взаимно перпендикулярными прямыми, при этом сторона ВС этого угла параллельна плоскости π_1, а вторая сторона АВ не перпендикулярна плоскости π_1, то ортогональная проекция $A_1B_1C_1$ прямого угла на плоскости π_1 составляет угол 90° (угол $A_1B_1C_1 = 90°$) или горизонтальные проекции сторон угла будут взаимно перпендикулярными ($A_1B_1 \perp B_1C_1$).

Наоборот, если ортогональная проекция угла, образованного двумя пересекающимися прямыми, составляет угол 90°, а одна сторона угла параллельна к той плоскости проекций, где размещена ортогональная проекция угла, а вторая сторона не перпендикулярна к этой же плоскости проекций, то в пространстве такой угол составляет также 90°.

На рис. 2.43–2.45 показано решение задачи на определение расстояния от точки А до горизонтальной прямой h.

Національний університет водного господарства та природокористування

Нарисна геометрія **Розділ 3. Площина**	**Начертательная геометрия** **Раздел 3. Плоскость**
3.1. Задання площини на епюрі	3.1. Задание плоскости на эпюре
Найчастіше на епюрі площину задають: 1) проекціями двох паралельних прямих (рис. 3.1); 2) проекціями двох прямих, що перетинаються (рис. 3.2); 3) проекціями трикутника – відсіка плоскої фігури (рис. 3.3). Площину позначають малими літерами грецького алфавіту. На рис. 3.1-3.3, крім позначення площини літерою, в дужках можна вказувати спосіб задання площини. Наприклад, запис α (*a* ∥ *b*) розшифровується таким чином: площина α задана двома паралельними прямими *a* і *b* (рис. 3.1). Площина може бути задана слідами площини (рис. 3.4, 3.5). Слід площини – це пряма лінія, по якій площина перетинає площину проекцій. Розрізняють: 1. Горизонтальний слід площини – це лінія перетину площини з горизонтальною площиною проекцій π_1. На рис. 3.4, 3.5 h^0_α – горизонтальний слід площини α (нульова горизонталь площини α, тобто горизонталь, яка знаходиться в площині α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$. 2. Фронтальний слід площини – це лінія перетину площини з	Наиболее часто на эпюре плоскость задают: 1) проекциями двух параллельных прямых (рис. 3.1); 2) проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 3.2); 3) проекциями треугольника – отсека плоской фигуры (рис. 3.3). Плоскость обозначают строчными буквами греческого алфавита. На рис. 3.1-3.3, кроме обозначения плоскости буквой, в скобках можно указывать способ задания плоскости. Например, запись α (*a* ∥ *b*) расшифровывается таким образом: плоскость α задана двумя параллельными прямыми *a* и *b* (рис. 3.1). Плоскость может быть задана следами плоскости (рис. 3.4, 3.5). След плоскости – это прямая линия, по которой плоскость пересекает плоскость проекций. Различают: 1. Горизонтальный след плоскости – это линия пересечения плоскости с горизонтальной плоскостью проекций π_1. На рис. 3.4, 3.5 h^0_α – горизонтальный след плоскости α (нулевая горизонталь плоскости α, то есть горизонталь, которая находится в плоскости α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$. 2. Фронтальный след плоскости – это линия пересечения плоскости

Національний університет
водного господарства
та природокористування

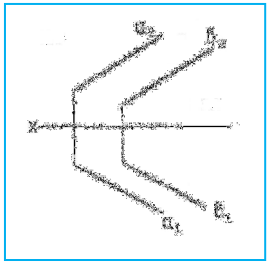


Рис. 3.1. Задання площини двома паралельними прямими
Рис. 3.1. Задание плоскости двумя параллельными прямыми

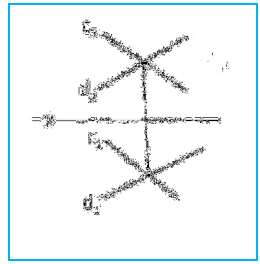


Рис. 3.2. Задання площини двома прямими, що перетинаються
Рис. 3.2. Задание плоскости двумя пересекающимися прямыми

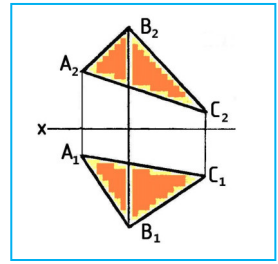


Рис. 3.3. Задання площини трикутником
Рис. 3.3. Задание плоскости треугольником

Національний університет
водного господарства
та природокористування

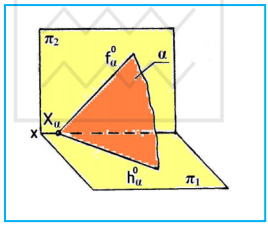


Рис. 3.4. Наочне зображення площини α, що задана слідами: h^0_α і f^0_α – горизонтальний і фронтальний слід площини, X_α – точка сходу слідів
Рис. 3.4. Наглядное изображение плоскости α, заданной следами: h^0_α и f^0_α – горизонтальный и фронтальный след плоскости, X_α – точка схода следов

Рис. 3.5. Епюр площини α, що задана слідами: h^0_α і f^0_α – горизонтальний і фронтальний слід площини, X_α – точка сходу слідів
Рис. 3.4. Эпюр плоскости α, заданной следами: h^0_α и f^0_α – горизонтальный и фронтальный след плоскости, X_α – точка схода следов

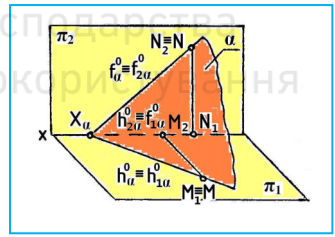


Рис. 3.6. Позначення на наочному зображенні проекцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)
Рис. 3.6. Обозначение на наглядном изображении проекций следов плоскости α и точек M, N, которые принадлежат следам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)

Національний університет водного господарства та природокористування

фронтальною площиною проекцій π_2.

На рис. 3.4. 3.5 f_α^0 – фронтальний слід площини α (нульова фронталь площини α), $f_\alpha^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. Точка сходу слідів – точка, в якій перетинаються сліди площини, розміщена на осі проекцій.

На рис. 3.4, 3.5 X_α – точка сходу слідів, $X_\alpha = h^0{}_\alpha \cap f_\alpha^0$.

На наочному зображенні (рис. 3.6) і епюрі (рис. 3.7) показано розміщення проекцій слідів площини. Крім того, зображено проекції точок M і N, що належать слідам площини ($M \in h^0{}_\alpha$, $N \in f_\alpha^0$).

Епюр площини, зображений на рис. 3.7 з позначенням всіх проекцій слідів, на практиці не застосовують, а користуються для задання площини на епюрі зображенням, показаним на рис. 3.5, де позначені тільки самі сліди і немає позначень їх проекцій. Проте, для розв'язування багатьох задач треба пам'ятати, де саме розміщені проекції слідів площини, про що буде нагадувати епюр, зображений на рис. 3.7.

На наочному зображенні (рис. 3.8) і епюрі (рис. 3.9) показано побудову слідів площини β, що задана ΔABC.

с фронтальной плоскостью проекций π_2.

На рис. 3.4. 3.5 f_α^0 – фронтальный след плоскости α (нулевая фронталь плоскости α), $f_\alpha^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. Точка схода следов – точка, в которой пересекаются следы плоскости, размещена на оси проекций.

На рис.3.4, 3.5 X_α – точка схода следов, $X_\alpha = h^0{}_\alpha \cap f_\alpha^0$.

На наглядном изображении (рис. 3.6) и эпюре (рис. 3.7) показано размещение проекций следов плоскости. Кроме того, изображено проекции точек M и N, которые принадлежат следам плоскости ($M \in h^0{}_\alpha$, $N \in f_\alpha^0$).

Эпюр плоскости, изображенный на рис. 3.7 с обозначением всех проекций следов, на практике не применяют, а используют для задания плоскости на эпюре изображение, показанное на рис. 3.5, где обозначено только сами следы и нет обозначений их проекций. Однако, для решения многих задач необходимо помнить, где именно размещены проекции следов плоскости, об этом будет напоминать эпюр, изображенный на рис. 3.7.

На наглядном изображении (рис. 3.8) и эпюре (рис. 3.9) показано построение следов плоскости β, которая задана ΔABC.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

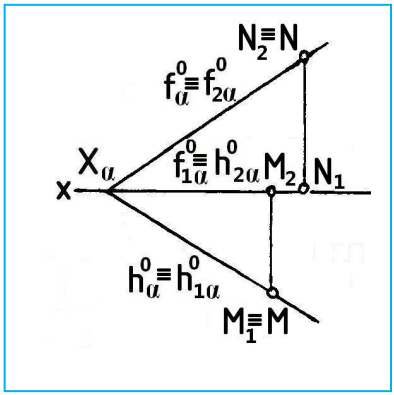


Рис. 3.7. Позначення на епюрі проекцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)

Рис. 37. Обозначение на эпюре проекций следов плоскости α и точек M, N, которые принадлежат следам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)

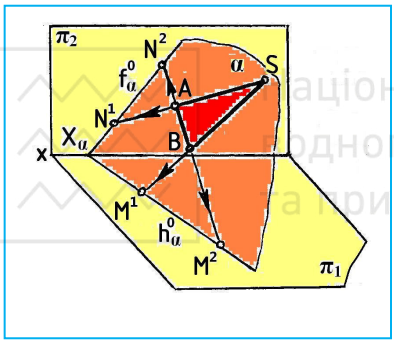


Рис. 3.8. Побудова на наочному зображенні слідів площини α, що задана трикутником ABC

Рис. 3.8. Построение на наглядном изображении следов плоскости α, которая задана треугольником ABC

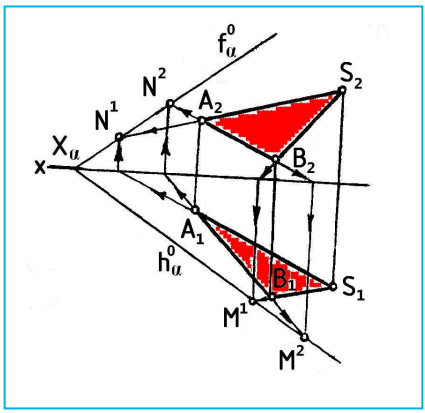


Рис. 3.8. Побудова на епюрі слідів площини α, що задана трикутником ABC

Рис. 3.8. Построение на эпюре следов плоскости α, которая задана треугольником ABC

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.2 Площини загального та часткового положення	3.2. Плоскости общего и частного положения
Площини, як і прямі лінії, класифікують залежно від їх розміщення відносно площин проекцій на площини загального та часткового положення.	Плоскости, как и прямые линии, классифицируют в зависимости от их размещения относительно плоскостей проекций на плоскости общего и частного положения.
3.2.1. Площина загального положення – це площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій. На епюрі у площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій. На рис. 3.5 показано епюр саме площини загального положення, оскільки $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ не паралельні і не перпендикулярні до осі x. Це характерна графічна ознака площини загального положення, що задана слідами.	3.2.1. Плоскость общего положения – это плоскость, которая не параллельна и не перпендикулярна ни одной плоскости проекций. На эпюре у плоскости общего положения следы не параллельны и не перпендикулярны оси проекций. На рис. 3.5 показано эпюр именно плоскости общего положения, поскольку $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ не параллельны и не перпендикулярны оси x. Это характерный графический признак плоскости общего положения, которая задана следами.
Площина загального положення не перпендикулярна до площин проекцій, тому при заданні її іншими елементами, наприклад, трикутником, ці елементи на жодну з площин проекцій не проекціюються в одну спільну пряму лінію. На рис. 3.1-3.3 задано епюри площин загального положення.	Плоскость общего положения не перпендикулярна плоскостям проекций, поэтому при задании её другими элементами, например, треугольником, эти элементы ни на одну из плоскостей проекций не проецируются в одну общую прямую линию. На рис. 3.1–3.3 задано эпюры плоскостей общего положения.
Площини часткового положення поділяються на проекціюючі та площини рівня. Проекціюючі площини перпендикулярні до однієї з площин проекцій, а площини рівня – паралельні.	Плоскости частного положения делятся на проецирующие и плоскости уровня. Проецирующие плоскости перпендикулярны одной из плоскостей проекций, а плоскости уровня – параллельны.
3.2.2. Площина, яка перпендикулярна до горизон-	3.2.2. Плоскость, которая перпендикулярна к горизон-

Національний університет
водного господарства
та природокористування

тальної площини проекцій, називається горизонтально-проекціюючою площиною.

На рис. 3.10 дано наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α. Вона перпендикулярна до площини π_1 і проекціюється на цю площину прямою лінією α_1, тобто α_1 – проекція площини α на площину π_1, до якої площина α перпендикулярна. Лінію α_1 називають слідом-проекцією площини α.

На рис. 3.11 наведено епюр горизонтально-проекціюючої площини α у вигляді тільки однієї прямої лінії α_1. І таке зображення площини повністю визначає положення площини в просторі, оскільки на епюрі можна визначити сліди площини – горизонтальний і фронтальний (рис. 3.12, 3.13).

В горизонтально-проекціюючій площині α (рис. 3.14) розмістимо трикутник ABC. Оскільки площина α перпендикулярна до π_1, горизонтальна проекція ΔABC буде проекціюватися на слід-проекцію α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). На рис. 3.15 показано епюр горизонтально-проекціюючої площини, якій належить ΔABC. Отже, якщо проекція трикутника збігається зі слідом-проекцією площини, то сам трикутник належить цій площині (на рис. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$).

Дамо означення сліду-

тальной плоскости проекций, называется горизонтально-проецирующей плоскостью.

На рис. 3.10 дано наглядное изображение горизонтально-проецирующей плоскости α. Она перпендикулярна плоскости π_1 и проецируется на эту плоскость прямой линией α_1, то есть α_1 – проекция плоскости α на плоскость π_1, к которой плоскость α перпендикулярна. Линию α_1 называют следом-проекцией плоскости α.

На рис. 3.11 приведён эпюр горизонтально-проецирующей плоскости α в виде только одной прямой линии α_1. И такое изображение плоскости полностью определяет положение в пространстве, поскольку на эпюре можно определить следы плоскости – горизонтальный и фронтальный (рис. 3.12, 3.13).

В горизонтально-проецирующей плоскости α (рис. 3.14) разместим треугольник ABC. Поскольку плоскость α перпендикулярна π_1, горизонтальная проекция ΔABC будет проецироваться на след-проекцию α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). На рис. 3.15 показан эпюр горизонтально-проецирующей плоскости, которой принадлежит ΔABC. Итак, если проекция треугольника совпадает со следом-проекцией плоскости, то сам треугольник принадлежит этой плоскости (на рис. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$).

Дадим определение следа-

Національний університет водного господарства та природокористування

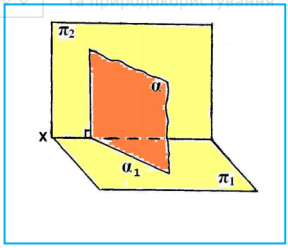


Рис. 3.10. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α (α_1 – слід-проекція площини α)

Рис. 3.10. Наглядное изображение горизонтально-проецирующей плоскости α (α_1 – след-проекция плоскости α)

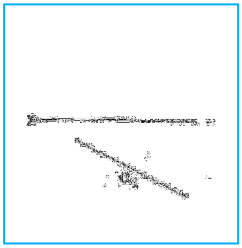


Рис. 3.11. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α (α_1 – слід-проекція площини α)

Рис. 3.11. Эпюр горизонтально-проецирующей плоскости α (α_1 – след-проекция плоскости α)

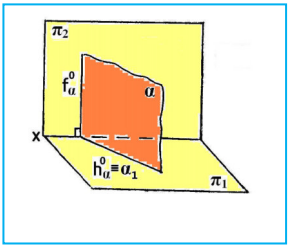


Рис. 3.12. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Рис. 3.10. Наглядное изображение горизонтально-проецирующей плоскости α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Національний університет водного господарства та природокористування

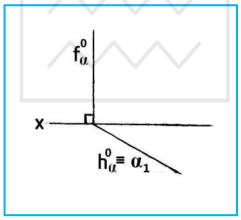


Рис. 3.13. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Рис. 3.13. Эпюр горизонтально-проецирующей плоскости α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

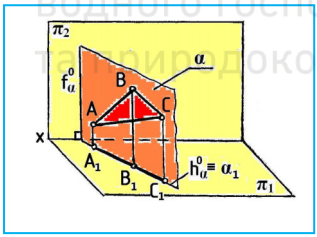


Рис. 3.14. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Рис. 3.14. Наглядное изображение горизонтально-проецирующей плоскости α ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

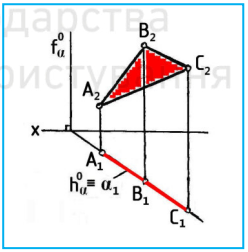


Рис. 3.15. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Рис. 3.15. Эпюр горизонтально-проецирующей плоскости α с размещённым в ней ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Національний університет водного господарства та природокористування

проекції:	проекции:
Слід-проекція – це лінія перетину площини з площиною проекції, до якої ця площина перпендикулярна.	След-проекция – это линия пересечения плоскости с плоскостью проекций, к которой эта плоскость перпендикулярна.
Всі площини часткового положення мають слід-проекцію, оскільки вони перпендикулярні хоча б до однієї з площин проекцій.	Все плоскости частного положения имеют след-проекцию, поскольку они перпендикулярны хотя бы одной из плоскостей проекций.
Слід-проекція має таку збірну властивість: проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в заданій площині часткового положення, проекціюються саме на слід-проекцію (див. рис. 3.15).	След-проекция имеет такое собирательное свойство: проекции точек, прямых линий, плоских фигур, которые находятся в заданной плоскости частного положения, проецируются именно на след-проекцию (см. рис. 3.15).
На рис. 3.16 дано епюр горизонтально-проекціюючої площини, що задана ΔABC, оскільки горизонтальна проекція трикутника – пряма лінія. Ця пряма лінія є слідом-проекцією заданої площини, вона лежить в площині π_1, і по ній площина перетинає площину π_1, до якої перпендикулярна.	На рис. 3.16 дано эпюр горизонтально-проецирующей плоскости, которая задана ΔABC, поскольку горизонтальная проекция треугольника – прямая линия. Эта прямая линия является следом-проекцией заданной плоскости, она лежит в плоскости π_1, к которой перпендикулярна.
На рис. 3.17 через точку А проведено горизонтально-проекціюючу площину α, тобто точка А стала належати площині α. Можна сказати по-іншому: якщо горизонтальна проекція A_1 збігається з α_1, то це означає, що сама точка А належить площині α.	На рис. 3.17 через точку А проведено горизонтально-проецирующую плоскость α, то есть точка А стала принадлежать плоскости α. Можно сказать по-другому: если горизонтальная проекция A_1 совпадает с α_1, то это означает, что сама точка А принадлежит плоскости α.
Горизонтально-проекціююча площина має такі властивості:	Горизонтально-проецирующая плоскость имеет такие свойства:
1. При заданні площини слідами горизонтальний слід h_α^0 площини є слідом-проекцією цієї	1. При задании плоскости следами горизонтальный след h_α^0 плоскости является следом-

Національний університет
водного господарства
та природокористування

площини, а фронтальний слід f_α^0 перпендикулярний до осі x.	проекцией этой плоскости, а фронтальный след f_α^0 перпендикулярен оси x.
2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_1 проекціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини.	2. При задании плоскости другими элементами (треугольником, двумя параллельными или пересекающимися прямыми) эти элементы на плоскость π_1 проецируются в одну прямую линию, которая является следом-проекцией плоскости.
3. Горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтально-проекціюючій площині, проекціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією горизонтально-проекціюючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або горизонтально-проекціююча площина проходить через дані фігури.	3. Горизонтальные проекции точек, прямых линий, плоских фигур, которые принадлежат горизонтально-проецирующей плоскости, проецируются на горизонтальный след плоскости, который является следом-проекцией, и наоборот, если горизонтальные проекции точек, прямых линий, плоских фигур совпадают со следом-проекцией горизонтально-проецирующей плоскости, то это означает, что данные фигуры или лежат в этой плоскости, или горизонтально-проецирующая плоскость проходит через данные фигуры.
3.2.3. Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально-проекціюючою площиною.	3.2.3. Плоскость, которая перпендикулярна фронтальной плоскости проекций, называется фронтально-проецирующей плоскостью.
На рис. 3.18-3.21 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої площини β, заданої слідами, а на рис. 3.22, 3.23 епюр – фронтально-проекціюючої площини β, заданої трикутником DEF.	На рис. 3.18-3.21 дано наглядное изображение и эпюр фронтально-проецирующей плоскости β, заданной следами, а на рис. 3.22, 3.23 – эпюр фронтально-проецирующей плоскости β, заданной треугольником DEF.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

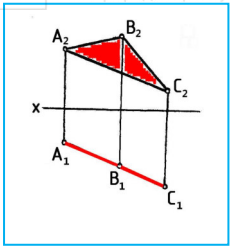


Рис. 3.16. Епюр горизонтально-проекціюючої площини, заданої ΔABC

Рис. 3.16. Эпюр горизонтально-проецирующей плоскости, заданной ΔABC

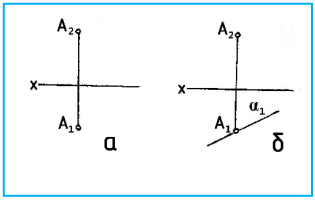


Рис. 3.17. Проведення через точку А горизонтально-проекціюючої площини α (а – початкова умова, б – через точку А проведена площина α)

Рис. 3.17. Проведение через точку А горизонтально-проецирующей плоскости α (а – начальное условие, б – через точку А проведена плоскость α)

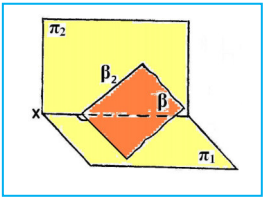


Рис. 3.18. Наочне зображення фронтально-проекціюючої площини β (β2 – слід-проекція площини β)

Рис. 3.18. Наглядное изображение фронтально-проецирующей плоскости β (β2 – след-проекция плоскости β)

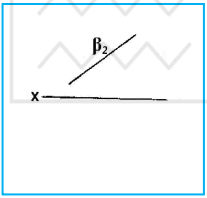


Рис. 3.19. Епюр фронтально-проекціюючої площини β (β2 – слід-проекція площини β)

Рис. 3.19. Эпюр фронтально-проецирующей плоскости β (β2 – след-проекция плоскости β)

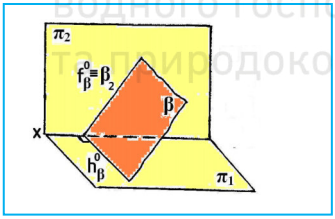


Рис. 3.20. Наочне зображення фронтально-проекціюючої площини β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

Рис. 3.18. Наглядное изображение фронтально-проецирующей плоскости β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

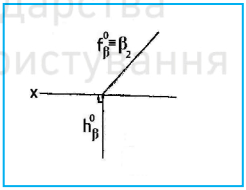


Рис. 3.21. Епюр фронтально-проекціюючої площини β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

Рис. 3.18. Эпюр фронтально-проецирующей плоскости β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

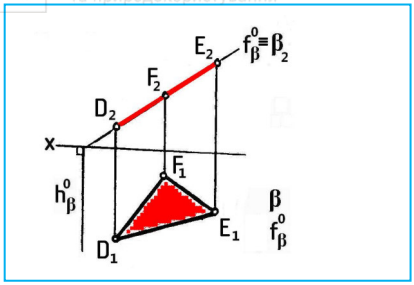


Рис. 3.22. Епюр фронтально-проекціюючої площини β з розміщеним в ній ΔDEF ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$)

Рис. 3.22. Эпюр фронтально-проецирующей плоскости β с размещённым в ней ΔDEF ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$)

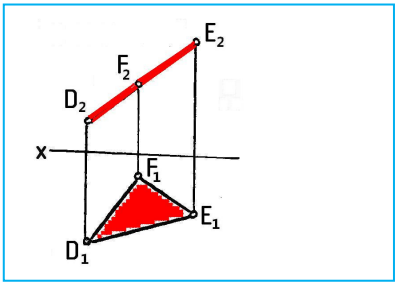


Рис. 3.23. Епюр фронтально-проекціюючої площини β, заданої ΔDEF

Рис. 3.23. Эпюр фронтально-проецирующей плоскости β, заданной **ΔDEF**

Фронтально-проекціююча площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини, а горизонтальний слід перпендикулярний до осі *x*. 2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_2 проекціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини. 3. Фронтальні проекції всіх точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтально-проекціюючій площині, проекціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо	Фронтально-проецирующая плоскость имеет такие свойства: 1. При задании плоскости следами фронтальный след f_β^0 плоскости является следом-проекцией этой плоскости, а горизонтальный след h_β^0 перпендикулярен оси *x*. 2. При задании плоскости другими элементами (треугольником, двумя параллельными или пересекающимися прямыми) эти элементы на плоскость π_2 проецируются в одну прямую линию, которая является следом-проекцией плоскости. 3. Фронтальные проекции точек, прямых линий, плоских фигур, которые принадлежат фронтально - проецирующей плоскости, проецируются на фронтальный след плоскости, который является следом-

Національний університет водного господарства

фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією фронтально-проекціюючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або фронтально-проекціююча площина проходить через дані фігури.	проекцией, и наоборот, если фронтальные проекции точек, прямых линий, плоских фигур совпадают со следом-проекцией фронтально-проецирующей плоскости, то это означает, что данные фигуры или лежат в этой плоскости, или фронтально-проецирующая плоскость проходит через данные фигуры.
3.2.4. Площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтальною площиною або горизонтальною площиною рівня.	3.2.4. Плоскость, которая параллельна горизонтальной плоскости проекций, называется горизонтальной плоскостью или горизонтальной плоскостью уровня.
На рис. 3.24 дано наочне зображення горизонтальної площини α, а на рис. 3.25, 3.26 – епюр горизонтальної площини α зображений своїм слідом-проекцією α_2 , який паралельний до осі *x*.	На рис. 3.24 дано наглядное изображение горизонтальной плоскости α, а на рис. 3.25, 3.26 – эпюр горизонтальной плоскости α изображённый своим следом – проекцией α_2, перпендикулярным оси *x*.
На рис. 3.27 в горизонтальній площині α розміщено ΔABC, який на площину π_2 проекціюється на слід-проекцію α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), а на площину π_1 – в натуральну величину ($A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔABC).	На рис. 3.27 в горизонтальной плоскости α размещён ΔABC, который на плоскость π_2 проецируется на след-проекцию α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), а на плоскость π_1 – в натуральную величину ($A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔABC).
На рис. 3.28 дано епюр горизонтальної площини, що задана ΔABC, оскільки $A_2B_2C_2$ // *x*.	На рис. 3.28 дано эпюр горизонтальной плоскости, которая задана ΔABC, поскольку $A_2B_2C_2$ // *x*.
Горизонтальна площина має такі властивості:	Горизонтальная плоскость имеет такие свойства:
1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі *x*.	1. При задании плоскости следами фронтальный след плоскости является следом-проекцией этой плоскости и размещён параллельно оси *x*.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

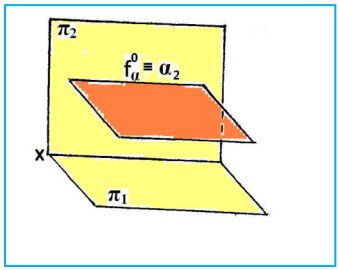


Рис. 3.24. Наочне зображення горизонтальної площини α (α2 – слід-проекція, α2 // x, f_α^0 – фронтальний слід, горизонтальний слід відсутній)
Рис. 3.24. Наглядное изображение горизонтальной плоскости α (α2 – след-проекция, α2 // x, f_α^0 – фронтальный след, горизонтальный след отсутствует)

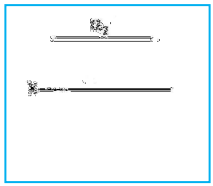


Рис. 3.25. Епюр горизонтальної площини α (α2 – слід-проекція, α2 // x)
Рис. 3.25. Эпюр горизонтальной плоскости α (α2 – след-проекция, α2 // x)

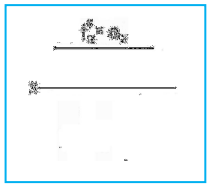


Рис. 3.26. Епюр горизонтальної площини α (α2 – слід-проекція, α2 // x, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)
Рис. 3.26. Эпюр горизонтальной плоскости α (α2 – след-проекция, α2 // x, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

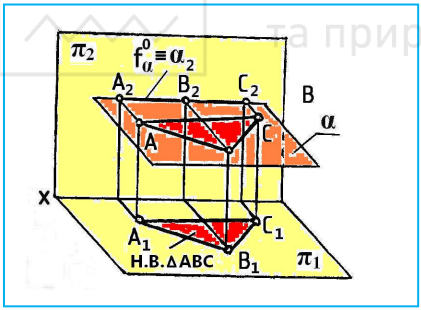


Рис. 3.27. Наочне зображення горизонтальної площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)
Рис. 3.27. Наглядное изображение горизонтальной плоскости α с размещённым в ней ΔABC ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)

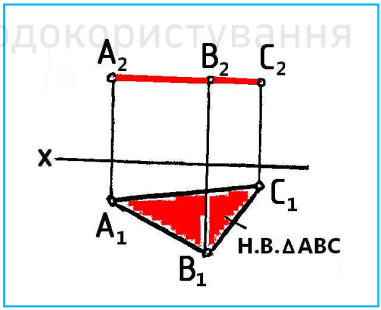


Рис. 3.28. Епюр горизонтальної площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_2B_2C_2$ // x)
Рис. 3.28. Эпюр горизонтальной плоскости α с размещённым в ней ΔABC ($A_2B_2C_2$ // x)

Національний університет водного господарства

Горизонтальний слід відсутній.	Горизонтальный след отсутствует.
2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_2 проекціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і паралельна до осі x, а на площину π_1, до якої площина паралельна, – в свою натуральну величину.	2. При задании плоскости другими элементами, например треугольником, эти элементы на плоскость π_2 проецируются в одну общую прямую линию, которая является следом-проекцией и параллельна оси x, а на плоскость π_1, к которой плоскость параллельна, – в свою натуральную величину.
3. Фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтальній площині, проекціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією.	3. Фронтальные проекции точек, прямых линий, плоских фигур, которые принадлежат горизонтальной плоскости, проецируются на фронтальный след плоскости, который является следом-проекцией.
3.2.5. Площина, яка паралельна до фронтальної площини проекцій, називається фронтальною площиною або фронтальною площиною рівня.	3.2.5. Плоскость, которая параллельна фронтальной плоскости проекций, называется фронтальной плоскостью или фронтальной плоскостью уровня.
На рис. 3.29 дано наочне зображення фронтальної площини β, а на рис. 3.30, 3.31 епюр фронтальної площини β, зображений своїм слідом-проекцією β_2, який паралельний до осі x.	На рис. 3.29 дано наглядное изображение фронтальной плоскости β, а на рис. 3.30, 3.31 – эпюр фронтальной плоскости β, изображённый своим следом – проекцией β_2, перпендикулярным оси x.
На рис. 3.32 у фронтальній площині β розміщено ΔDEF, який на площину π_1 проекціюється на слід-проекцію β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), а на площину π_2 – в натуральну величину ($\Delta D_2E_2F_2$ = Н.В. ΔDEF).	На рис. 3.32 в фронтальной плоскости β размещён ΔDEF, который на плоскость π_1 проецируется на след-проекцию β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), а на плоскость π_2 – в натуральную величину ($D_2E_2F_2$ = Н.В. ΔDEF).
На рис. 3.33 дано епюр фронтальної площини, що задана Δ DEF, оскільки $D_1E_1F_1 // x$.	На рис. 3.33 дано эпюр фронтальной плоскости, которая задана ΔDEF, поскольку $D_1E_1F_1 // x$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

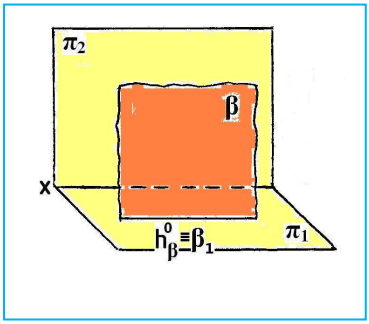


Рис. 3.29. Наочне зображення фронтальної площини β (β1 – слід-проекція, β1 // *x*, h_β^0 – горизонтальний слід, фронтальний слід відсутній)

Рис. 3.29. Наглядное изображение фронтальной плоскости β (β1 – след-проекция, β1 // *x*, h_β^0 – горизонтальный след, фрзонтальный след отсутствует)

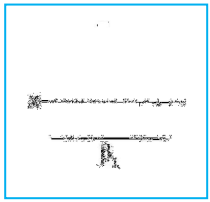


Рис. 3.30. Епюр фронтальної площини β (β1 – слід-проекція, β1 // *x*)

Рис. 3.30. Эпюр фронтальной плоскости β (β1 – след-проекция, β1 // *x*)

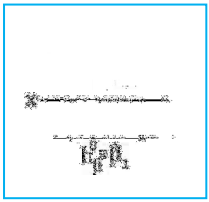


Рис. 3.31. Епюр фронтальної площини β (β1 – слід-проекція, β1 // *x*, $h_\beta^0 \equiv \beta_1$)

Рис. 3.31. Эпюр фронтальной плоскости β (β1 – след-проекция, β1 // *x*, $h_\beta^0 \equiv \beta_1$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

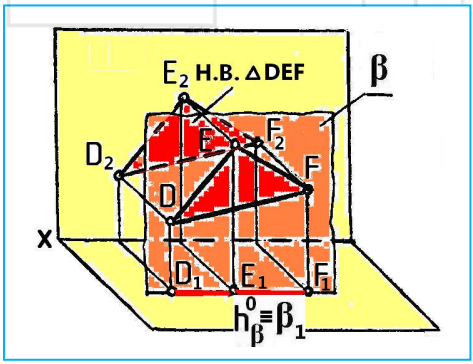


Рис. 3.32. Наочне зображення фронтальної площини β з розміщеним в ній ΔDEF ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)

Рис. 3.32. Наглядное изображение фронтальной плоскости β с размещённым в ней ΔDEF ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)

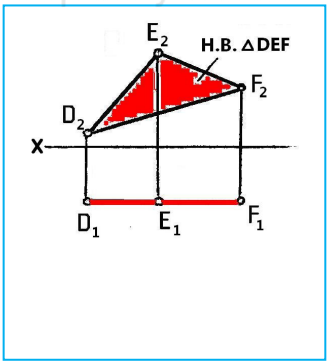


Рис. 3.33. Епюр фронтальної площини β, заданої ΔDEF ($D_1E_1F_1$ // x)

Рис. 3.33. Эпюр фронтальной плоскости β, заданной ΔDEF ($D_1E_1F_1$ // x)

Національний університет
водного господарства

Фронтальна площина має такі властивості:	Фронтальная плоскость имеет такие свойства:
1. При заданні площини слідами горизонтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі *x*. Фронтальний слід відсутній.	1. При задании плоскости следами горизонтальный след плоскости является следом-проекцией этой плоскости и размещён параллельно оси *x*. Фронтальный след отсутствует.
2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_1 проекціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і яка паралельна осі *x*, а на площину π_2, до якої фронтальна площина паралельна, вона проекціюється в свою натуральну величину.	2. При задании плоскости другими элементами, например треугольником, эти элементы на плоскость π_1 проецируются в одну общую прямую линию, которая является следом-проекцией и параллельна оси *x*, а на плоскость π_2, к которой фронтальная плоскость параллельна, она проецируется в свою натуральную величину.
3. Горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтальній площині, проекціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією.	3. Горизонтальные проекции точек, прямых линий, плоских фигур, которые принадлежат фронтальной плоскости, проецируются на горизонтальный след плоскости, который является следом-проекцией.
.	
3.3. Точка і пряма в площині	3.3. Точка и прямая в плоскости
Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини.	Точка принадлежит плоскости, если она лежит на прямой линии этой плоскости.
Пряма лінія належить площині, якщо вона:	Прямая линия принадлежит плоскости, если она:
1) проходить через дві точки цієї площини або	1) проходит через две точки этой плоскости или
2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини.	2) проходит через одну точку и параллельна прямой этой плоскости.
На рис. 3.34 дано площину α (AB∩BC). Побудуємо в ній прямі, використовуючи зазна-	На рис.3.34 дано плоскость α (AB∩BC). Построим в ней прямые, используя указанные два способа.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

чені два способи.

1 спосіб. Візьмемо дві точки 1 і 2 (рис. 3.35) на прямих АВ і ВС площини α. Пряма 12, що проходить через ці точки, є прямою, що належить площині α. В свою чергу, точка 3, що лежить на прямій 12, буде належати площині α, оскільки пряма 12 належить площині α.

2 спосіб. Через точку С (рис. 3.36) площини α проводимо пряму *l* паралельно до прямої АВ. Пряма *l* належить площині α і точка 4, яка лежить на ній, також буде належати площині α.

Задача. Побудувати відсутню на епюрі горизонтальну проекцію D_1 точки D, що належить площині α(ΔАВС), рис. 3.37.

Оскільки через точку D не проходить будь-яка пряма площини α, то для розв'язання задачі потрібно через цю точку провести пряму, що буде належати площині, заданій трикутником.

На рис. 3.38, а, б показано розв'язування задачі 1 способом.

Якщо площина задана слідами, то принципової різниці в проведенні прямої, що лежить в цій площині, або у визначенні точки, яка належить площині, немає, оскільки задання площини слідами це не що інше, як задання площини двома

1 способ. Возьмём две точки 1 и 2 (рис. 3.35) на прямых АВ и ВС плоскости α. Прямая 12, которая проходит через эти точки, является прямой, принадлежащей плоскости α. В свою очередь, точка 3, которая лежит на прямой 12, будет принадлежать плоскости α, поскольку прямая 12 принадлежит плоскости α.

2 способ. Через точку С (рис. 3.36) плоскости α проводим прямую *l* параллельно прямой АВ. Прямая *l* принадлежит плоскости α и точка 4, которая лежит на ней, также принадлежит плоскости α.

Задача. Построить отсутствующую на эпюре горизонтальную проекцию D_1 точки D, которая принадлежит плоскости α(ΔАВС), рис. 3.37.

Поскольку через точку D не проходит какая-либо прямая плоскости α, то для решения задачи необходимо через эту точку провести прямую, которая будет принадлежать плоскости, заданной треугольником.

На рис. 3.38, а, б показано решение задачи 1 способом.

Если плоскость задана следами, то принципиальной разницы в проведении прямой, которая лежит в этой плоскости, или в определении точки, принадлежащей плоскости, нет, поскольку задание плоскости следами это не что иное, как

Національний університет
водного господарства
та природокористування

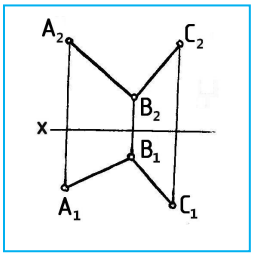


Рис. 3.34. Епюр площини α (AB∩BC) – початкова умова задачі

Рис. 3.34. Эпюр плоскости α (AB∩BC) – начальное условие задачи

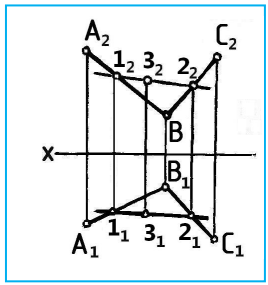


Рис. 3.35. Епюр площини α (AB∩BC), якій належить пряма 12 і точка 3

Рис. 3.35. Эпюр плоскости α (AB∩BC), которой принадлежит прямая 12 и точка 3

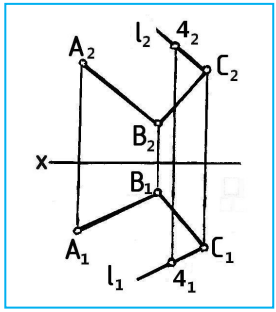


Рис. 3.36. Епюр площини α (AB∩BC), якій належить пряма *l* і точка 4

Рис. 3.36. Эпюр плоскости α (AB∩BC), которой принадлежит прямая ***l*** и точка 4

Національний університет
водного господарства
та природокористування

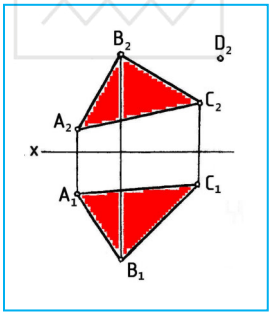


Рис. 3.37. Епюр площини α(ΔABC) – початкова умова задачі

Рис. 3.37. Эпюр плоскости α(ΔABC) – начальное условие задачи

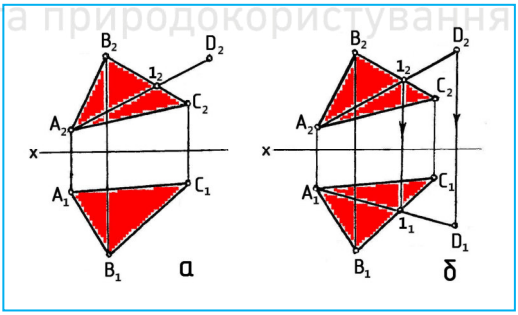


Рис. 3.38. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.37: а – 1 дія, б – 2 дія

Рис. 3.38. Решение задачи с начальным условием на рис. 3.37: а – 1 действие, б – 2 действие

Національний університет водного господарства та природокористування

прямими, що перетинаються, точка перетину яких лежить на осі проекцій.

Таким чином, у разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо:

1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини або

2) пряма паралельна одному із слідів площини і має спільну точку з іншим слідом.

На рис. 3.39 дано наочне зображення, а на рис. 3.40 – епюр площини α, що задана слідами, де пряма MN за 1 способом належить площині α, оскільки дві її точки M і N лежать відповідно на слідах h_α^0 і f_α^0 площини α.

Пряма h_α^1 за 2 способом належить площині α, оскільки має спільну точку N^1 з фронтальним слідом f_α^0 і паралельна до іншого – горизонтального сліду h_α^0 площини α. Пряма h_α^1 паралельна до горизонтальної площини проекцій π_1 і є горизонтальною прямою площини α.

Задача. Побудувати відсутню фронтальну проекцію K_2 точки K, що належить площині α, заданої слідами, якщо відома горизонтальна проекція K_1 точки K (рис. 3.41).

Розв'язування 1 способом показано на рис. 3.42.

задание плоскости двумя пересекающимися прямыми, точка пересечения которых лежит на оси проекций.

Таким образом, в случае задания плоскости следами, прямая принадлежит плоскости, если:

1) следы прямой (то есть её две точки) принадлежат одноимённым следам плоскости или

2) прямая параллельна одному из следов и имеет общую точку с другим следом.

На рис. 3.39 дано наглядное изображение, а на рис. 3.40 – эпюр плоскости α, которая задана следами, где прямая MN по 1 способу принадлежит плоскости α, поскольку две её точки M и N лежат соответственно на следах h_α^0 и f_α^0 плоскости α.

Прямая h_α^1 по 2 способу принадлежит плоскости α, поскольку имеет общую точку N^1 с фронтальным следом f_α^0 и параллельна другому – горизонтальному следу h_α^0 плоскости α. Прямая h_α^1 параллельна горизонтальной плоскости проекций π_1 и является горизонтальной прямой плоскости α.

Задача. Построить отсутствующую фронтальную проекцию K_2 точки K, которая принадлежит плоскости α, заданной следами, если известна горизонтальная проекция K_1 точки K (рис. 3.41).

Решение 1 способом показано на рис. 3.42.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

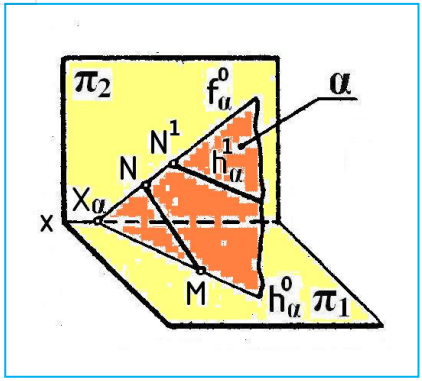


Рис. 3.39. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, якій належить пряма l і пряма h_α^1

Рис. 3.39. Наглядное изображение плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, которой принадлежит прямая l и прямая h_α^1

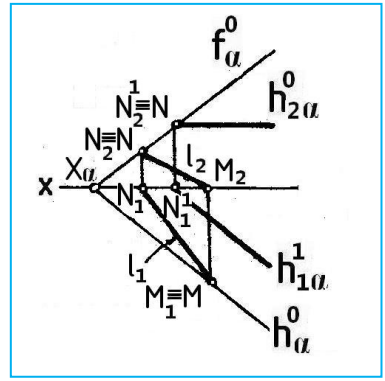


Рис. 3.40. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, якій належить пряма l і пряма h_α^1

Рис. 3.40. Эпюр плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, которой принадлежит прямая l и прямая h_α^1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

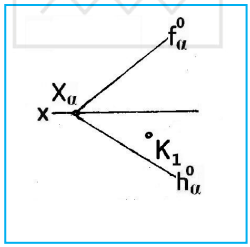


Рис. 3.41. Початкова умова задачі

Рис. 3.41. Начальное условие задачи

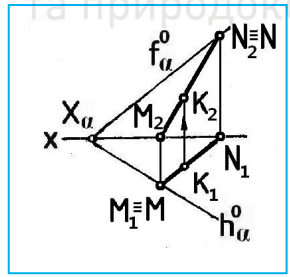


Рис. 3.42. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 1 способом

Рис. 3.42. Решение задачи с начальным условием на рис. 3.41 1 способом

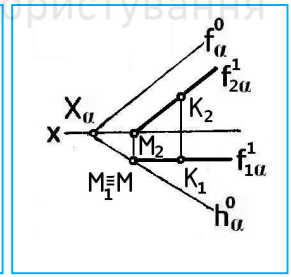


Рис. 3.43. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 2 способом

Рис. 3.43. Решение задачи с начальным условием на рис. 3.41 2 спосоому

Національний університет водного господарства та природокористування

Розв'язування 2 способом показано на рис. 3.43.

Якщо проекціююча площина або площина рівня задана своїм слідом-проекцією, то цим площинам буде належати будь-яка точка і пряма лінія, відповідні проекції яких збігаються зі слідом-проекцією проекціюючої або площини рівня.

На рис. 3.44 точка А належить фронтально-проекціюючій площині β, оскільки її фронтальна проекція A_2 збігається зі слідом-проекцією β_2 площини β. На рис. 3.45 пряма *b* належить горизонтально-проекціюючій площині α, тому що її горизонтальна проекція b_1 збігається зі слідом-проекцією α_1 площини α. На рис. 3.46 пряма h_ω належить горизонтальній площині рівня ω, оскільки її фронтальна проекція $h_{2\omega}$ збігається зі слідом-проекцією ω_2 площини ω. Пряма h_ω є горизонтальною прямою, що належить площині ω.

3.4. Головні лінії площини

Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого схилу площини.

Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні одній з площин проекцій. Це горизонталі та фронталі площини.

Решение 2 способом показано на рис. 3.43.

Если проецирующая плоскость или плоскость уровня задана своим следом-проекцией, то этим плоскостям будет принадлежать любая точка и прямая линия, соответствующие проекции которых совпадают со следом-проекцией проецирующей или плоскости уровня.

На рис. 3.44 точка А принадлежит фронтально-проецирующей плоскости β, поскольку её фронтальная проекция A_2 совпадает со следом-проекцией β_2 плоскости β. На рис. 3.45 прямая *b* принадлежит горизонтально - проецирующей плоскости α, потому что её горизонтальная проекция b_1 совпадает со следом-проекцией α_1 плоскости α. На рис. 3.46 прямая h_ω принадлежит горизонтальной плоскости уровня ω, поскольку её фронтальная проекция $h_{2\omega}$ совпадает со следом-проекцией ω_2 плоскости ω. Прямая h_ω является горизонтальной прямой, которая принадлежит плоскости ω.

3.4. Главные линии плоскости

Главные линии плоскости – это линии уровня и линия наибольшего уклона плоскости.

Линии уровня плоскости – прямые, которые лежат в плоскости и параллельны одной из плоскостей проекций. Это горизонтали и фронтали плоскости.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

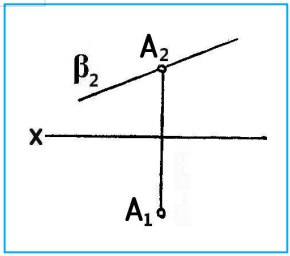


Рис. 3.44. Епюр фронтально-проекціюючої площини β, якій належить точка А

Рис. 3.44. Эпюр фронтально-проецирующей плоскости β, которой принадлежит точка А

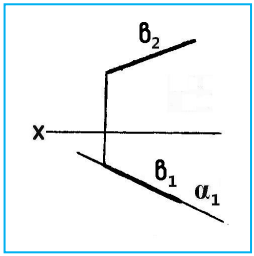


Рис. 3.45. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α, якій належить пряма в

Рис. 3.45. Эпюр горизонтально-проецирующей плоскости α, которой принадлежит прямая в

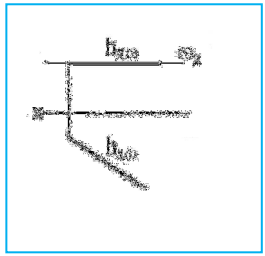


Рис. 3.46. Епюр горизонтальної площини ω, якій належить пряма h_ω

Рис. 3.46. Эпюр горизонтальной плоскости ω, которой принадлежит прямая h_ω

Національний університет
водного господарства
та природокористування

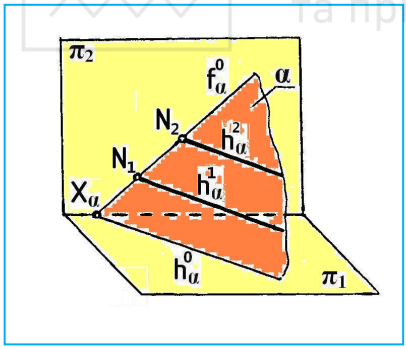


Рис. 3.47. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_α^1 і h_α^2 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$)

Рис. 3.47. Наглядное изображение плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в которой проведены горизонтальные прямые h_α^1 и h_α^2 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$)

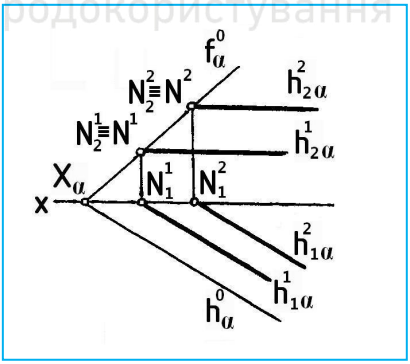


Рис. 3.48. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_α^1 і h_α^2

Рис. 3.48. Эпюр плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в которой проведены горизонтальные прямые h_α^1 и h_α^2

Національний університет
водного господарства

3.4.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проекцій π_1.

На рис. 3.47 дано наочне зображення, а на рис. 3.48 – епюр площини α, що задана слідами і в якій проведені горизонталі h_α^1 і h_α^2. Вони належать площині, оскільки мають спільні точки N^1, N^2 з фронтальним слідом f_α^0 площини і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 (див. рис. 3.39, 3.40). Прямі h_α^1 і h_α^2 також паралельні до площини π_1, тому що паралельні до горизонтального сліду h_α^0, який лежить в площині π_1.

Таким чином, горизонталі площини мають такі властивості:

1. Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини $h_{0\alpha}$ ($h_{1\alpha}$ // $h_{2\alpha}$ // $h_{0\alpha}$).

2. Мають спільні точки з фронтальним слідом f_α^0 (точки N^1, N^2) і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 площини.

На рис. 3.50 за допомогою горизонтальної прямої h_α побудовано відсутню горизонтальну проекцію точки К (див. рис. 3.49), причому спочатку проведено фронтальну проекцію $h_{2\alpha}$ горизонталі h_α паралельно до осі x, а потім і горизонтальну $h_{1\alpha}$ паралельно до h_α^0.

3.4.1. Горизонтали плоскости – прямые, которые принадлежат плоскости и параллельны горизонтальной плоскости проекций π_1.

На рис. 3.47 дано наглядное изображение, а на рис.3.48 – эпюр плоскости α, заданной следами и в которой проведены горизонтали h_α^1 и h_α^2. Они принадлежат плоскости, поскольку имеют общие точки N^1, N^2 с фронтальным следом f_α^0 плоскости и параллельны горизонтальному следу h_α^0 (см. рис. 3.39, 3.40). Прямые h_α^1 и h_α^2 также параллельны плоскости π_1, потому что параллельны горизонтальному следу h_α^0, который лежит в плоскости π_1.

Таким образом, горизонтали плоскости имеют следующие свойства:

1. Все горизонтали плоскости параллельны между собой и горизонтальному следу плоскости h_α^0 (h_α^1 // h_α^2 // h_α^0).

2. Имеют общие точки с фронтальным следом f_α^0 (точки N^1, N^2) и параллельны горизонтальному следу h_α^0 плоскости.

На рис. 3.50 с помощью горизонтальной прямой h_α построена отсутствующая горизонтальная проекция точки К (см. рис. 3.49), причём сначала проведена фронтальная проекция $h_{2\alpha}$ горизонтали h_α параллельно оси x, а потом и горизонтальная проекция $h_{1\alpha}$ параллельно h_α^0.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

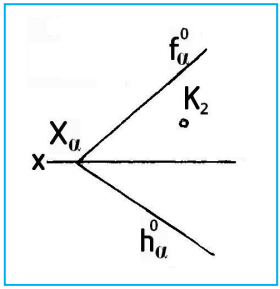


Рис. 3.49. Початкова умова задачі
Рис. 3.49. Начальное условие задачи

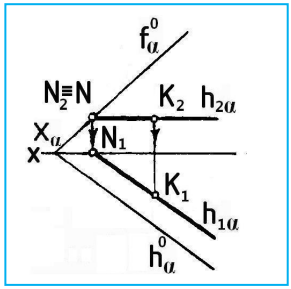


Рис. 3.50. Розв'язування задачі (рис. 3.49) за допомогою горизонтальної прямої h_α
Рис. 3.50. Решение задачи (рис. 3.49) с помощью горизонтальной прямой h_α

При побудові на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проекцію паралельно до осі проекцій *x*. На рис. 3.51 в площині ΔABC спочатку проведено фронтальну проекцію $h_{2\alpha}$, а потім горизонтальну $h_{1\alpha}$ горизонталі h_α.	При построении на эпюре горизонтали плоскости сначала проводят её фронтальную проекцию параллельно оси проекций *x*. На рис. 3.51 в плоскости ΔABC сначала проведена фронтальная проекция $h_{2\alpha}$, а потом горизонтальная проекция $h_{1\alpha}$ горизонтали h_α.
3.4.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проекцій π_2.	3.4.1. Фронтали плоскости – прямые, которые принадлежат плоскости и параллельны фронтальной плоскости проекций π_2.
На рис. 3.52 дано наочне зображення, а на рис. 3.53 – епюр площини β, що задана слідами, і в якій проведені фронталі площини f_β^1 і f_β^2.	На рис. 3.52 дано наглядное изображение, а на рис.3.53 – эпюр плоскости β, заданной следами, и в которой проведены фронтали плоскости f_β^1 и f_β^2.
Фронталі площини мають такі властивості:	Фронтали плоскости имеют следующие свойства:
1. Всі фронталі площини паралельні між собою і до	1. Все фронтали плоскости параллельны между собой и

Національний університет
водного господарства
та природокористування

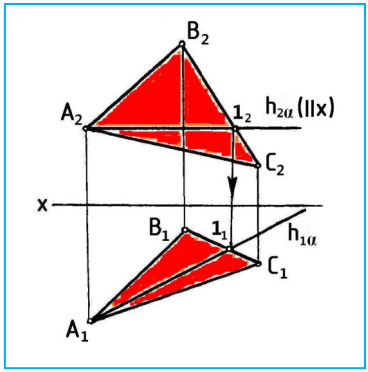


Рис. 3.51. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої h_α

Рис. 3.51. Проведение в плоскости ΔABC горизонтальной прямой h_α

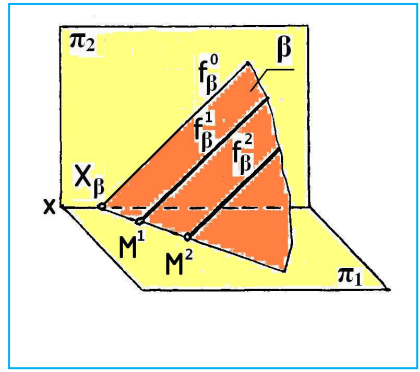


Рис. 3.52. Наочне зображення площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2 $(f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0)$

Рис. 3.52. Наглядное изображение плоскости $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в которой проведены горизонтальные прямые f_β^1 и f_β^2 $(f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0)$

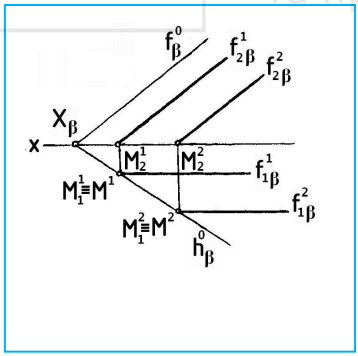


Рис. 3.53. Епюр площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2

Рис. 3.53. Эпюр плоскости $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в которой проведены горизонтальные прямые f_β^1 и f_β^2

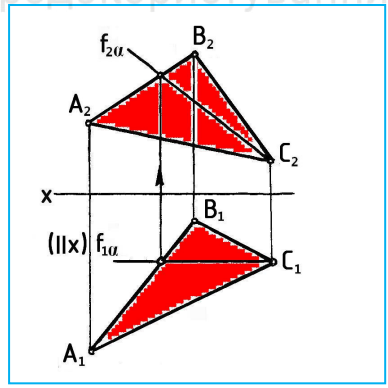


Рис. 3.54. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої f_α

Рис. 3.54. Проведение в плоскости ΔABC горизонтальной прямой f_α

Національний університет
водного господарства

фронтального сліду площини $f_{0\beta}$ ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_{0\beta}$).

2. Мають спільні точки з горизонтальним слідом h_β^0 (точки M^1, M^2) і паралельні до фронтального сліду f_β^0 площини.

На рис. 3.43 за допомогою фронтальної прямої f_α^1 побудовано відсутню фронтальну проекцію K_2 точки К (рис. 3.41).

На рис. 3.54 в площині ΔABC проведено фронталь f_α, причому спочатку проведено її горизонтальну проекцію $f_{1\alpha}$ паралельно осі x, а потім фронтальну проекцію $f_{2\alpha}$.

3.4.3. Лінія найбільшого схилу площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут її нахилу до площини π_1 визначає кут нахилу самої площини до тієї ж площини π_1.

На рис. 3.55 пряма MN – лінія найбільшого схилу площини $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$, оскільки $MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$.

Побудову лінії найбільшого схилу площини починають з її горизонтальної проекції, яку проводять перпендикулярно (під прямими кутом) до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду.

На рис. 3.56 побудовано епюр прямої MN – лінії найбільшого схилу, оскільки $M_1N_1 \perp h_\alpha^0$, тобто

фронтальному следу плоскости $f_{0\beta}$ ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_{0\beta}$).

2. Имеют общие точки с горизонтальным следом h_β^0 (точки M^1, M^2) и параллельны фронтальному следу f_β^0 плоскости.

На рис. 3.43 с помощью фронтальной прямой f_α^1 построена отсутствующая фронтальная проекция K_2 точки К (рис. 3.41).

На рис. 3.54 в плоскости ΔABC проведена фронталь f_α, причём сначала проведена её горизонтальная проекция $f_{1\alpha}$ параллельно оси x, а потом фронтальная проекция $f_{2\alpha}$.

3.4.3. Линия наибольшего уклона плоскости – прямая плоскости, которая перпендикулярна к горизонталям плоскости или к горизонтальному следу плоскости, при этом угол её наклона к плоскости π_1 определяет угол наклона самой плоскости к той же плоскости π_1.

На рис. 3.55 прямая MN – линия наибольшего уклона плоскости α ($h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha}$), поскольку $MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$.

Построение линии наибольшего уклона плоскости начинают с её горизонтальной проекции, которую проводят перпендикулярно (под прямым углом) горизонтальной проекции горизонтали плоскости или её горизонтальному следу.

На рис. 3.56 построен эпюр прямой MN – линии наибольшего уклона, поскольку $M_1N_1 \perp h_\alpha^0$, то

Національний університет
водного господарства
та природокористування

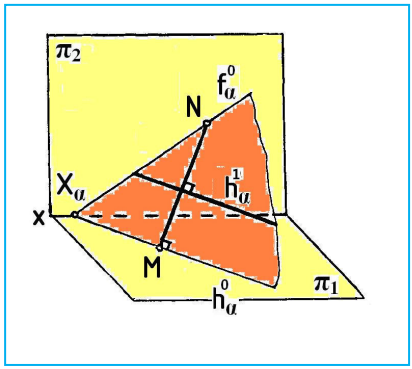


Рис. 3.55. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN ($MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$)

Рис. 3.55. Наглядное изображение плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в которой размещена линия наибольшего уклона MN ($MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$)

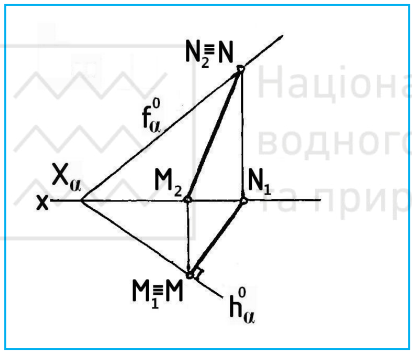


Рис. 3.56. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN ($M_1N_1 \perp h_\alpha^0$)

Рис. 3.56. Эпюр плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в которой размещена линия наибольшего уклона MN ($M_1N_1 \perp h_\alpha^0$)

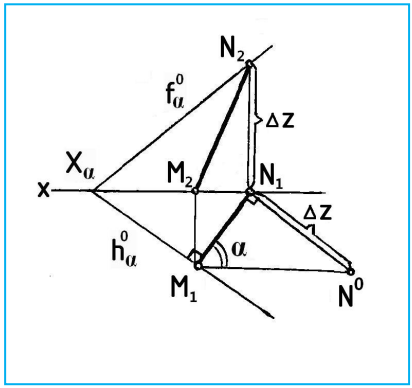


Рис. 3.57. Визначення кута нахилу α площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ до горизонтальної площини проекцій π_1 (MN – лінія найбільшого схилу площини)

Рис. 3.57. Определение угла наклона α плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ к горизонтальной плоскости проекцій π_1 (MN – линия наибольшего уклона плоскости)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

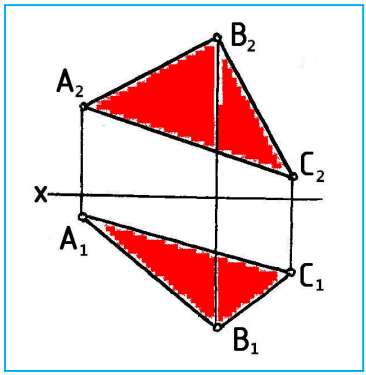


Рис. 3.58. Початкова умова задачі на визначення кута нахилу α площини β(ΔABC) до горизонтальної площини проекцій π_1

Рис. 3.58. Начальное условие задачи для определение угла наклона α плоскости β(ΔABC) к горизонтальной плоскости проекций π_1

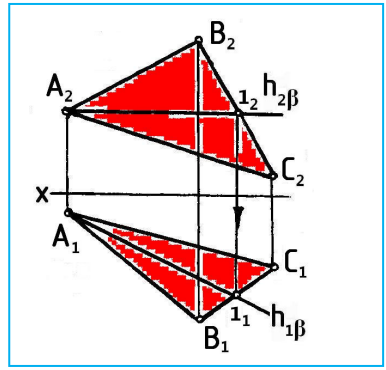


Рис. 3.59. Проведення в площині β(ΔABC) горизонтальної прямої h_β (1 дія)

Рис. 3.59. Проведение в плоскости β(ΔABC) горизонтальной прямой h_β (1 действие)

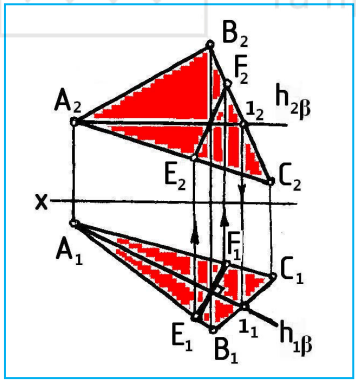


Рис. 3.60. Проведення в площині β(ΔABC) відрізка EF лінії найбільшого схилу (2 дія)

Рис. 3.60. Проведение в плоскости β(ΔABC) отрезка EF линии наибольшего уклона (2 действие)

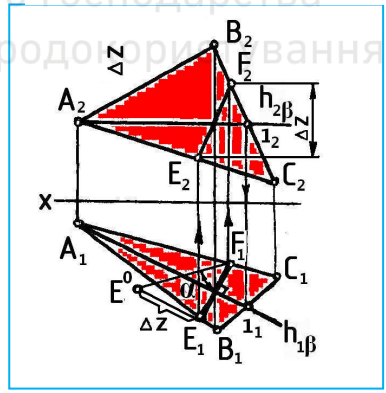


Рис. 3.61. Визначення способом прямокутного трикутника кута нахилу α площини β(ΔABC) до площини π_1

Рис. 3.61. Определение способом прямоугольного треугольника угла наклона α плоскости β(ΔABC) к плоскости π_1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

в просторі MN $\perp h_{0\alpha}$, а точки M і N належать слідам площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$. На рис. 3.57 способом прямокутного трикутника визначено кут нахилу лінії найбільшого схилу MN до площини π_1, а, отже, і кут нахилу самої площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ до площини π_1. На рис. 3.58 дано початкову умову задачі на визначення кута нахилу α площини β (ΔABC) до площини π_1. На рис. 3.59-3.61 наведено графічне розв'язування цієї задачі.	есть в пространстве MN $\perp h_\alpha^0$, а точки M и N принадлежат следам плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$. На рис. 3.57 способом прямоугольного треугольника определён угол наклона линии наибольшего уклона MN к плоскости π_1, а, значит, и угол наклона самой плоскости $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ к плоскости π_1. На рис. 3.58 дано начальное условие задачи на определение угла наклона α плоскости β (ΔABC) к плоскости π_1. На рис. 3.59-3.61 приведено графическое решение этой задачи.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства

Нарисна геометрія. Розділ 4 Поверхні. Точка на поверхні

4.1. Багатогранники та їх зображення

Багатогранниками називаються геометричні тіла, які обмежені плоскими багатокутниками _ гранями (рис. 4.1, 4.2).

Елементи багатогранника: ребра – лінії перетину граней та вершини – точки перетину ребер.

З великої кількості багатогранників практичний інтерес становлять піраміди (рис. 4.1) та призми (рис. 4.2).

Зображення багатогранника зводиться до зображення його ребер та вершин.

Лінія, яка обмежує проекцію багатогранника, називається обрисом поверхні багатогранника. Обрис поверхні – завжди видима лінія, вона позначається суцільною основною лінією.

На рис. 4.3 зображено піраміду ABCS, де на горизонтальній проекції обрисом є лінія $A_1B_1C_1A_1$, а на фронтальній проекції – лінія $A_2B_2S_2A_2$.

Точка і пряма лінія на поверхні багатогранника визначається так, як і в площині.

На рис. 4.3 точка 1 належить ребру AS, де горизонтальну

Начертательная геометрия Раздел 4. Поверхности. Точка на поверхности

4.1. Многогранники и их изображения

Многогранниками называются геометрические тела, которые ограничены плоскими многоугольниками – гранями (рис. 4.1, 4.2).

Элементы многогранника: рёбра – линии пересечения граней и вершины – точки пересечения рёбер.

Из большого количества многогранников практический интерес представляют пирамиды (рис. 4.1) и призмы (рис. 4.2).

Изображение многогранника сводится к изображению его рёбер и вершин.

Линия, которая ограничивает проекцию многогранника, называется очерком поверхности многогранника. Очерк поверхности – всегда видимая линия, она обозначается сплошной основной линией.

На рис. 4.3 изображена пирамида ABCS, где на горизонтальной проекции очерком является линия $A_1B_1C_1A_1$, а на фронтальной проекции – линия $A_2B_2S_2A_2$.

Точка и прямая линия на поверхности многогранника определяется так, как и в плоскости.

На рис. 4.3 точка 1 принадлежит ребру AS, где горизонтальную

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцію точки знайдено за допомогою лінії проекційного зв'язку.

Точка 2 належить ребру SC, проте горизонтальну проекцію точки визначити за допомогою лінії проекційного зв'язку неможливо, оскільки SC – відрізок профільної прямої, паралельної до площини π_3 (у цієї прямої проекції розміщені на одній лінії, перпендикулярній до осі *x*). В даному випадку горизонтальну проекцію 2_1 знайдено за допомогою прямої 23, яку проведено в грані ASC піраміди паралельно до сторони AC основи і тому є горизонталлю *h*.

Точка К лежить у середині грані BCS і її фронтальну проекцію $К_2$ знайдено за допомогою прямої S4, проведеної в грані BCS. Точка К розміщена на прямій S4 грані BCS і тому належить поверхні піраміди.

На рис. 4.4 зображено трикутну призму, нижня основа якої паралельна до горизонтальної площини проекцій, а верхню основу не показано. Відома фронтальна проекція $К_2$ точки К, що знаходиться на поверхні призми. Оскільки $К_2$ є видимою, то точка К знаходиться в грані призми, що примикає до сторони AC. Горизонтальну проекцію $К_1$ знайдено за допомогою прямої $К_1$, що проведено паралельно до

проекцию точки находят с помощью линии проекционной связи.

Точка 2 принадлежит ребру SC, однако горизонтальную проекцию точки определить с помощью линии проекционной связи невозможно, поскольку SC – отрезок профильной прямой, параллельной плоскости π_3 (у этой прямой проекции размещены на одной линии, перпендикулярной к оси *x*). В данном случае горизонтальную проекцию 2_1 найдено с помощью прямой 23, которая проведена в гране ASC пирамиды параллельно к стороне AC основания и поэтому является горизонталлю *h*.

Точка К лежит в середине грани BCS и её фронтальную проекцию $К_2$ нашли с помощью прямой S4, проведённой в гране BCS. Точка К размещена на прямой S4 грани BCS и поэтому принадлежит поверхности пирамиды.

На рис. 4.4 изображена треугольная призма, нижнее основание которой параллельно к горизонтальной плоскости проекций, а верхнее основание не показано. Известна фронтальная проекция $К_2$ точки К, которая находится на поверхности призмы. Поскольку $К_2$ является видимой, то точка К находится в гране призмы, примыкающей к стороне AC. Горизонтальная проекция найдена с помощью прямой $К_1$, проведённой параллельно боковым

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рис. 4.1. Наочне зображення піраміди
Рис. 4.1. Наглядное изображение пирамиды

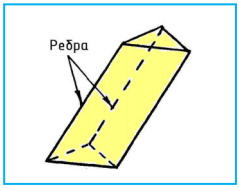


Рис. 4.2. Наочне зображення призми
Рис. 4.2. Наглядное изображение призмы

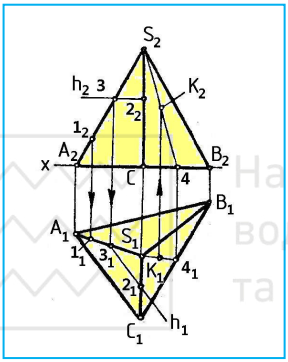


Рис. 4.4. Епюр піраміди
Рис. 4.4. Эпюр пирамиды

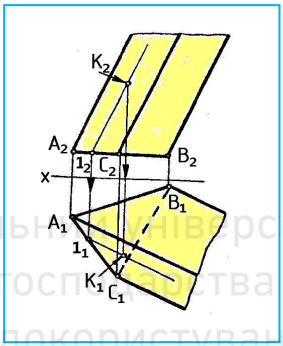


Рис. 4.4. Епюр призми
Рис. 4.4. Эпюр призмы

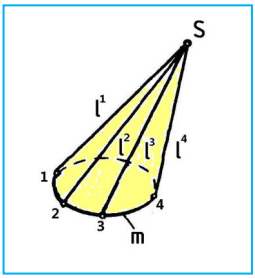


Рис. 4.5. Утворення конічної поверхні
Рис. 4.5. Образование конической поверхности

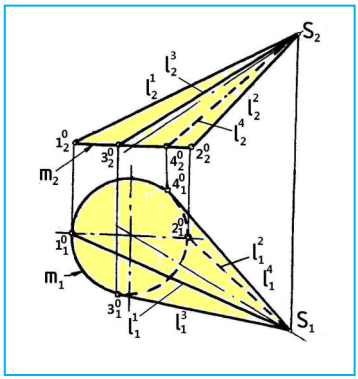


Рис. 4.6. Епюр похилого кругового конуса з проекціями обрисових твірних
Рис. 4.6. Эпюр наклонного кругового конуса с проекциями очерковых образующих

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

бічних ребер призми.	рёбрам призмы.
4.2. Криві поверхні та їх зображення	4.2. Кривые поверхности и их изображение
Криві поверхні можна розглядати як сукупність безперервних положень лінії, що називається твірною, яка переміщується по напрямній лінії. Залежно від виду твірної криві поверхні поділяються на 2 класи: лінійчасті (твірна – пряма лінія) та нелінійчасті або криволійні (твірна – крива лінія).	Кривые поверхности можно рассматривать как совокупность непрерывных положений линии, называемой образующей, которая перемещается по направляющей линии. В зависимости от вида образующей поверхности делятся на 2 класса: линейчатые (образующая – прямая линия) и нелинейчатые или криволинейные (образующая – кривая линия).
4.2.1. Конічна поверхня	4.2.1. Коническая поверхность
Конічна поверхня - це лінійчаста поверхня, що утворена рухом прямолінійної твірної l (рис. 4.5) уздовж криволійної напрямної m, і яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) перетинаються в точці S, яка називається вершиною.	Коническая поверхность – это линейчатая поверхность, образованная движением прямолинейной образующей l (рис. 4.5) вдоль криволинейной направляющей m, и которая во всех своих положениях пересекает направляющую, причём все образующие (l^1, l^2, l^3 и т.д.) пересекаются в точке S, которая называется вершиной.
Криві поверхні, зокрема конічні, зображуються на площинах проекцій своїми обрисами поверхні.	Кривые поверхности, в частности конические, изображаются на плоскостях проекций своими очерками поверхности.
На рис. 4.6 зображено обриси геометричного тіла – похилого кругового конуса (еліптичного конуса), обмеженого конічною поверхнею і площиною (основою конуса), що перетинає всі твірні поверхні, причому	На рис. 4.6 очерки геометрического тела – наклонного кругового конуса (эллиптического конуса), ограниченного конической поверхностью и плоскостью (основанием конуса), которая пересекает все

Національний університет
водного господарства
та природокористування

лінія m називається лінією основи конуса.

На рис. 4.6 показано проекції обрисових твірних l^1, l^2 (на фронтальній проекції) і l^3, l^4 (на горизонтальній проекції). Ці твірні проходять через вершину S і перетинають лінію основи m в точках 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.

Точки лінії основи m, через які проходять обрисові твірні, ділять лінію основи на видиму та невидиму частини. Так, на горизонтальній проекції твірні l^3 і l^4 ділять горизонтальну проекцію m_1 в точках $3_1{}^0$ і $4_1{}^0$ на видиму та невидиму частини.

Покажемо, як визначити видимість твірних на рис. 4.6.

На горизонтальній проекції твірні, що перетинають лінію основи між точками $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$- $4_1{}^0$ – невидимі (перетинають невидиму зверху частину лінії основи m), а між точками $3_1{}^0$ - $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ – видимі.

Твірні, які на горизонтальній проекції перетинають лінію основи m між точками $1_1{}^0$ - $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$, на фронтальній проекції видимі, а ті твірні, які перетинають лінію основи між точками $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ - $2_1{}^0$, – невидимі.

Так, на рис. 4.7 показано видимість твірних l^5 і l^6, які проведено у середині обрису

образующие поверхности, причём линия m называется линией основания конуса.

На рис. 4.6 показано проекции очерковых образующих l^1, l^2 (на фронтальной проекции) и l^3, l^4 (на горизонтальной проекции). Эти образующие проходят через вершину S и пересекают линию основания m в точках 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.

Точки линии основания m, через которые проходят очерковые образующие, делят линию основания на видимую и невидимую части. Так, на горизонтальной проекции образующие l^3 и l^4 делят m_1 в точках $3_1{}^0$ и $4_1{}^0$ на видимую и невидимую части.

Покажем, как определить видимость образующих на рис. 4.6.

На горизонтальной проекции образующие, которые пересекают линию основания между точками $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$- $4_1{}^0$ – невидимые (пересекают невидимую сверху часть линии основания m), а между точками $3_1{}^0$ - $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ – видимые.

Образующие, которые на горизонтальной проекции пересекают линию основания m между точками $1_1{}^0$ - $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$, на фронтальной проекции видимые, а те образующие, которые пересекают линию основания между точками $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ - $2_1{}^0$, – невидимые.

Так, на рис. 4.7 показано видимость образующих l^5 и l^6, которые проведены в середине

Національний університет
водного господарства
та природокористування

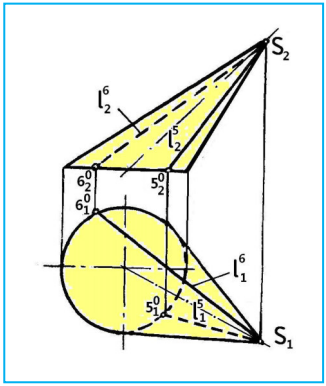


Рис. 4.7. Епюр похилого кругового конуса з проекціями твірних, проведених у середині обрису
Рис. 4.6. Эпюр наклонного кругового конуса с проекциями образующих, проведённых в середине очерка

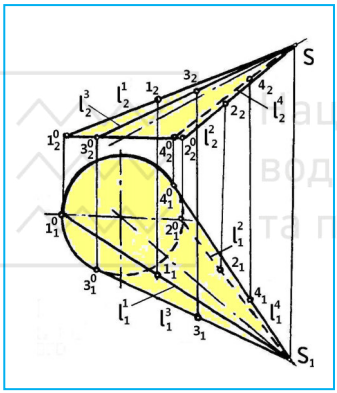


Рис. 4.8. Епюр похилого кругового конуса з проекціями точок, що лежать на обрисових твірних
Рис. 4.8. Эпюр наклонного кругового конуса с проекциями точек, лежащих на очерковых образующих

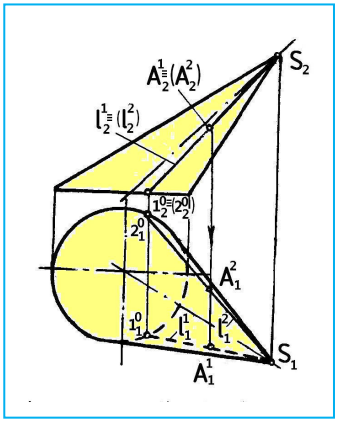


Рис. 4.9. Проекції точки А, зазначеної у середині обрису похилого кругового конуса
Рис. 4.9. Проекции точки А, отмеченной в середине очерка наклонного кругового конуса

Національний університет водного господарства та природокористування

поверхні.

Точка належить поверхні, зокрема конічній, якщо вона знаходиться на лінії цієї поверхні. Точка на конічній поверхні визначається за допомогою твірної, що проходить через цю точку, перетинаючи вершину S і лінію основи *m*.

Точці, яка лежить на обрисовій твірній, відповідає одна точка поверхні конуса. Так, на рис. 4.8 показано проекції точок 1, 2, 3, 4, що лежать на відповідних обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4.

Якщо лінія основи є замкненою лінією, наприклад колом, то точка, що задана на одній проекції у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні геометричного тіла.

Так, на рис. 4.9 точці А, що зазначена у середині обрису на фронтальній проекції, відповідають дві точки поверхні A^1 і A^2, фронтальні проекції яких збігаються ($A_2^2 \equiv A_2^1$). Ці точки лежать на твірних l^1 і l^2. Видимість точок A^1 і A^2 на горизонтальній проекції визначена за видимістю твірних l^1 і l^2.

4.2.2. Циліндрична поверхня

Циліндрична поверхня - це лінійчаста поверхня, яка утворена паралельним рухом очерка поверхности.

Точка принадлежит поверхности, в частности конической, если она находится на линии этой поверхности. Точка на конической поверхности определяется с помощью образующей, которая проходит через эту точку, пересекая вершину S и линию основания *m*.

Точке, которая лежит на очерковой образующей, соответствует одна точка поверхности конуса. Так, на рис. 4.8 показано проекции точек 1, 2, 3, 4, которые лежат на соответствующих очерковых образующих l^1, l^2, l^3, l^4.

Если линией основания является замкнутая линия, например окружность, то точка, заданная на одной проекции в середине очерка, определяет положение двух точек поверхности геометрического тела.

Так, на рис. 4.9 точке А, отмеченной в середине очерка на фронтальной проекции, соответствуют две точки поверхности A^1 і A^2, фронтальные проекции которых совпадают ($A_2^2 \equiv A_2^1$). Эти точки лежат на образующих l^1 и l^2. Видимость точек A^1 и A^2 на горизонтальной проекции определена по видимости образующих l^1 и l^2.

4.2.2. Цилиндрическая поверхность

Цилиндрическая поверхность – это линейчатая поверхность, образованная параллельным

Національний університет водного господарства та природокористування

прямолінійної твірної l (рис. 4.10) уздовж криволійної напрямної m, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) паралельні між собою і перетинають напрямну m в точках 1^0, 2^0, 3^0 і т.д.

На рис. 4.11 показано обриси похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра), лінія основи якого – коло (верхню основу циліндра не показано). На рис. 4.11 зображено проекції обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4 та проекції точок 1, 2, 3, 4, що на них знаходяться, а на рис. 4.12 – проекції точки А, що розміщена у середині обрису.

Слід зазначити, що видимість твірних та точок на циліндричній поверхні визначається так само, як і для конічної.

4.2.3. Поверхня кулі (сфера)

Поверхня кулі (сфера) – це нелінійчаста поверхня, утворена обертанням кола, яке є твірною, навколо осі, що збігається з діаметром кола, і розміщена перпендикулярно до горизонтальної площини проекції.

Лініями обрису сфери на горизонтальних та фронтальних площинах проекцій є кола.

На рис. 4.13 показано обриси поверхні кулі, де зазначено: i – вісь обертання ($i \perp \pi_1$), $l^м$ – головний меридіан (обрис

движением прямолинейной образующей l (рис. 4.10) вдоль криволинейной направдяющей m, причём все образующие (l^1, l^2, l^3 и т.д.) параллельны между собой и пересекают направляющую m в точках 1^0, 2^0, 3^0 и т.д.

На рис. 4.11 показано очерки наклонного кругового цилиндра (эллиптического цилиндра), линия основания которого – окружность (верхнее основание цилиндра не показано). На рис. 4.11 изображено проекции очерковых образующих l^1, l^2, l^3, l^4 и проекции точек 1, 2, 3, 4, находящихся на них, а на рис. 4.12 – проекции точки А, размещённой в середине очерка.

Следует отметить, что видимость образующих и точек на цилиндрической поверхности определяется так же, как и для конической.

4.2.3. Поверхность шара (сфера)

Поверхность шара (сфера) – это нелинейчатая поверхность, образованная вращением окружности, которая является образующей, вокруг оси, совпадающей с диаметром окружности, и размещённой перпендикулярно горизонтальной плоскости проекций.

Линиями очерка сферы на горизонтальных и фронтальных плоскостях проекций являются окружности.

На рис. 4.13 показано очерки поверхности шара, где отмечено: i – ось вращения ($i \perp \pi_1$), $l^м$ – главный меридиан (очерк

Національний університет
водного господарства
та природокористування

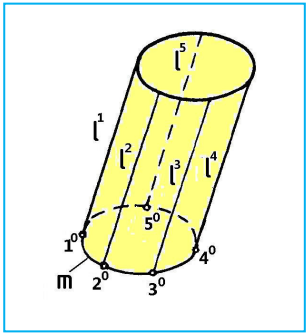


Рис. 4.10. Утворення циліндричної поверхні
Рис. 4.10. Образование цилиндрической поверхности

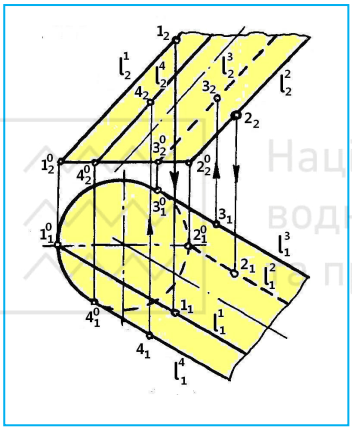


Рис. 4.11. Епюр похилого кругового циліндра з проекціями точок, що лежать на обрисових твірних
Рис. 4.11. Эпюр наклонного кругового цилиндра с проекциями точек, лежащих на очерковых образующих

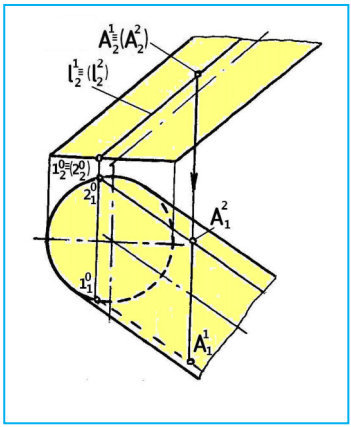


Рис. 4.12. Проекції точки А, зазначеної у середині обрису похилого кругового циліндра
Рис. 4.12. Проекции точки А, отмеченной в середине очерка наклонного кругового цилиндра

Національний університет
водного господарства
та природокористування

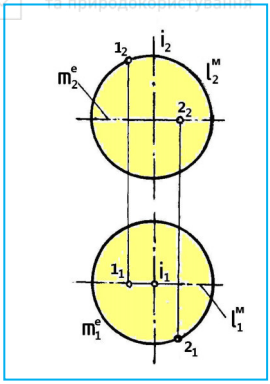


Рис. 4.13. Епюр поверхні кулі з проекціями точок 1 і 2 на обрисових лініях

Рис. 4.13. Эпюр поверхности шара с проекциями точек 1 и 2 на очерковых линиях

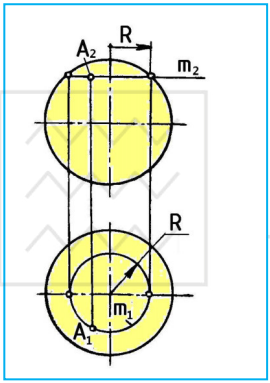


Рис. 4.14. Побудова проекцій точки А за допомогою паралелі m

Рис. 4.14. Построение проекций точки А с помощью параллели m

Національний університет
водного господарства
та природокористування

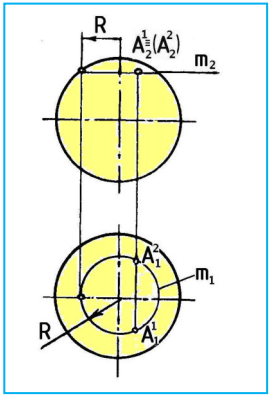


Рис. 4.15. Побудова проекцій точки А, зазначеної у середині обрису поверхні кулі

Рис. 4.15. Построение проекций точки А, отмеченной в середине очерка поверхности шара

Національний університет
водного господарства
та природокористування

поверхні на площині π_2), m^e – екватор (обрис поверхні на площині π_1), а також проекції точки 1, що належить l^M, і точки 2, що належить m^e.

Поверхня кулі є поверхнею обертання, тобто точка поверхні при обертанні кулі описує коло відносно осі обертання. Ці кола називаються паралелями поверхні обертання. Найбільша паралель – це екватор.

На рис. 4.14 показано, що точка А при обертанні кулі описує коло *m* радіуса R. Оскільки площина кола паралельна площині π_1, то коло, яке називається параллеллю, проекціюється на π_1 в натуральну величину.

Точка на поверхні кулі, яка знаходиться у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні і будується за допомогою паралелей поверхні кулі.

Так, на рис. 4.15 точка А, зазначена у середині обрису сфери, визначає положення двох точок A^1 і A^2 поверхні кулі, причому горизонтальні проекції $A_1{}^1$ і $A_1{}^2$ побудовані за допомогою паралелі *m* радіуса R.

4.2.4. Поверхня прямого кругового конуса

Поверхня прямого кругового конуса утворена обертанням прямолінійної твірної *l* (рис. 4.16) навколо осі *i*, що

поверхности на плоскости π_2, m^e – экватор (очерк поверхности на плоскости π_1), а также проекции точки 1, которая принадлежит l^M и точки 2, которая принадлежит m^e.

Поверхность шара является поверхностью вращения, то есть точка поверхности при вращении описывает окружность относительно оси вращения. Эти окружности называются параллелями поверхности вращения. Наибольшая параллель – это экватор.

На рис. 4.14 показано, что точка А при вращении шара описывает окружность *m* радиуса R. Поскольку плоскость окружности параллельна плоскости π_1, то окружность, называемая параллелью, проецируется на π_1 в натуральную величину.

Точка на поверхности шара, которая находится в середине очерка, определяет положение двух точек поверхности и строится с помощью параллелей поверхности шара.

Так, на рис. 4.15 точка А, отмеченная в середине очерка сферы, определяет положение двух точек A^1 и A^2 поверхности шара, причём горизонтальные проекции $A_1{}^1$ и $A_1{}^2$ построены с помощью параллели *m* радиуса R.

4.2.4. Поверхность прямого кругового конуса

Поверхность прямого кругового конуса образована вращением прямолинейной образующей *l* (рис. 4.16) вокруг оси *i*, которая

Національний університет
водного господарства
та природокористування

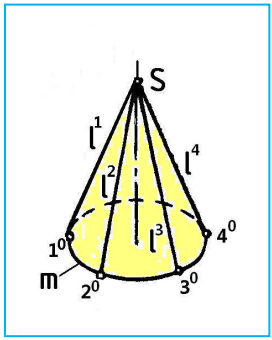


Рис. 4.16. Утворення поверхні прямого кругового конуса
Рис. 4.16. Образование поверхности прямого кругового конуса

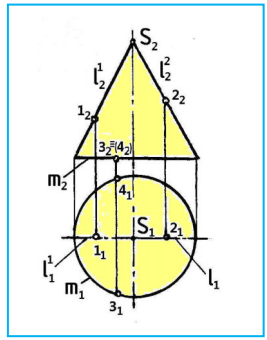


Рис. 4.17. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок на обрисових твірних і на лінії основи
Рис. 4.17. Эпюр прямго кругового конуса с проекциями точек на очерковых образующих и на линии основания

Національний університет
водного господарства
та природокористування

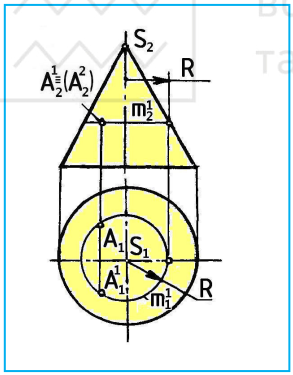


Рис. 4.18. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок A^1 і A^2, визначених за допомогою паралелі m^1
Рис. 4.18. Эпюр прямго кругового конуса с проекциями точек A^1 и A^2, определенных с помощью параллели m^1

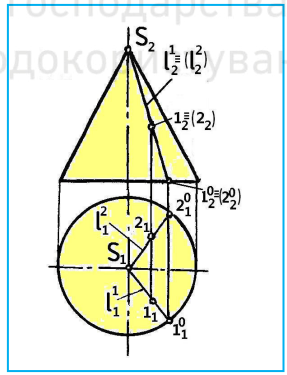


Рис. 4.19. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок 1 і 2, визначених за допомогою твірних l^1 і l^2
Рис. 4.19. Эпюр прямго кругового конуса с проекциями точек 1 и 2, определенных с помощью образующих l^1 и l^2

Національний університет
водного господарства

перпендикулярна до площини π_1, і є висотою конуса. Якщо поверхню прямого кругового конуса перетнути площиною, паралельною до π_1, то лінією основи m конуса буде коло.

На рис. 4.17 зображено прямий круговий конус або конус обертання, на поверхні якого зазначені проекції точок 1 і 2, що лежать на обрисових твірних l^1 і l^2, а також проекції точок 3 і 4, що знаходяться на лінії основи m.

Оскільки ця поверхня є поверхнею обертання, то точку на поверхні конуса обертання можна визначити за допомогою паралелі. На рис. 4.18 горизонтальні проекції точок A^1 і A^2 визначені за допомогою паралелі m^1.

Точку на поверхні такого конуса можна визначити також і за допомогою твірної поверхні. Так, на рис. 4.19 горизонтальні проекції точок 1 і 2 визначені за допомогою твірних l^1 і l^2.

Звернемо увагу, що точці, зазначеній у середині обрису на фронтальній проекції конуса, відповідають дві точки поверхні (рис. 4.18, 419).

перпендикулярна плоскости π_1, и является высотой конуса. Если поверхность прямого кругового конуса пересечь плоскостью, параллельной π_1, то линией основания m конуса будет окружность.

На рис. 4.17 изображено прямой круговой конус или конус вращения, на поверхности которого отмечены проекции точек 1 и 2, лежащих на очерковых образующих l^1 и l^2, а также проекции точек 3 и 4, которые находятся на линии основы m.

Поскольку эта поверхность является поверхностью вращения, то точку на поверхности конуса вращения можно определить с помощью параллели. На рис. 4.18 горизонтальные проекции точек A^1 и A^2 определены с помощью параллели m^1.

Точку на поверхности такого конуса можно определить также и с помощью образующей поверхности. Так, на рис. 4.19 горизонтальные проекции точек 1 и 2 определены с помощью образующих l^1 и l^2.

Обратим внимание, что точке, отмеченной в середине очерка на фронтальной проекции конуса, соответствуют две точки поверхности (рис. 4.18, 4.19).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

КОРОТКИЙ УКРАЇНСЬКО- РОСІЙСЬКИЙ СЛОВНИК
найбільш широко вживаних термінів та словосполучень при вивченні нарисної геометрії та інженерної графіки

КРАТКИЙ УКРАИНСКО-РУССКИЙ СЛОВАРЬ
наиболее широко употребляемых терминов и словосочетаний при изучении начертательной геометрии и инженерной графике

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Український алфавіт Украинский алфавит

А а, Б б, В в, Г г, ґ ґ, Д д, Е е, Є є, Ж ж, З з, И и, І і, Ї ї, Й й, К к, Л л, М м, Н н, О о, П п, Р р, С с, Т т, У у, Ф ф, Х х, Ц ц, Ч ч, Ш ш, Щ щ, Ю ю, Я я, Ь ь.

Аксонометрія – аксонометрія
Алгоритм – алгоритм
Аркуш (паперу) – лист (бумаги)
Багатогранник – многогранник
Багатокутник – многоугольник
Віддалений – отстоящий
Від'ємний – отрицательный
Вид: – вид:
додатковий – дополнительный
зверху – сверху
ззаду – сзади
зліва– слева
знизу – снизу
місцевий – местный
основний – основной
спереду – спереди
справа – справа
Видимість – видимость
Виносна лінія – выносная линия
Відношення – отношение
Відстань – расстояние
Відображення – отображение
Відповідність – соответствие
Вісь – ось
Властивість – свойство
Вписаний – вписаный
Геометрія – геометрия
Горизонталь – горизонталь
Горизонтальна лінія зв'язку – горизонтальная линия связи
Горизонтальна площина проекцій – горизонтальная плоскость проекций
Горизонтальна проекція – горизонтальная проекция
Горизонтальна пряма – горизонтальная прямая
Грань – грань
Двогранний кут – двугранный угол
Діагональ – диагональ
Діаметр – діаметр
Дійсна величина – дейтвительная величина
Довжина – длина
Довільний – произвольный
Додатний – положительный
сечение
Допоміжна площина – вспомогательная плоскость
Дотик – касание
Дотична – касательная
Дуга – дуга
Еліпс – эллипс
Епюр – епюр
Заміна – замена
Засіб – средство
Збіг – совпадение
Збігатися – совпадать
З'єднувати – соединять
Зображення – изображение
Зрізаний – усечённый
Ізометрія – изометрия
Індекс – индекс
Коло – окружность
Комплексне креслення – комплексный чертёж
Конічний переріз – коническое сечение
Конкуруючі точки – конкурирующие точки
Конус – конус
Концентричні кола – концентрические окружности

Національний університет водного господарства та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Креслення – черчение, чертёж
Креслити – чертить
Крива лінія – кривая линия
Круг – круг
Куля – шар
Кут – угол
Ламана лінія – ломаная линия
ламаний розріз – ломаный разрез
Лінійчата поверхня – линейчатая поверхность
Межа – граница
Мимобіжні прямі – скрещивающиеся пряме
Множина – множество
Модель – модель
Накладений переріз – наложенное сечение
Належати – принадлежать
Належність – принадлежность
Наочний – наглядный
Напрям – направление
Напрямна – направляющая
Нарисна геометрія – начертательная геометрия
Наслідок – следствие
Натуральна величина – натуральная величина
Нахил – наклон
Невидимий – невидимый
Неперервний – непрерывный
Нерозгортна поверхня – неразвёртывающаяся поверхность
Нескінченність – бесконечность
Нормаль – нормаль
Обертання – вращение
Оборотне креслення – обратимый чертёж
Обрис – очертание, очерк
Ознака – признак
Описаний – описаный
Описане коло – описання окружность
Опуклий – выпуклый
Ортогональна проекція – ортогональная проекція
Паралельний – параллельный
Паралельні прямі – параллельные прямые
Параметр – параметр
Переріз – сечение
Перетворення – преобразования
Перетинати – пересекать
Перпендикуляр – перпендикуляр
Піраміда – пирамида
Площа – площадь
Площина – плоскость
Побудова – построение
Поверхня – поверхность
Поздовжній – продольный
Позиційні задачі – позиционные задачи
Початок координат – начало координат
Призма – призма
Проектування – проектирование
Проекція – проекція
Проекційний зв'язок – проекционная связь
Проекціювання – проецирование
Проекціююча пряма – проецирующая прямая
Промінь – луч
Простір – пространство
Просторовий – пространственный
Просторова уява – пространственное воображение

Національний університет водного господарства та природокористування

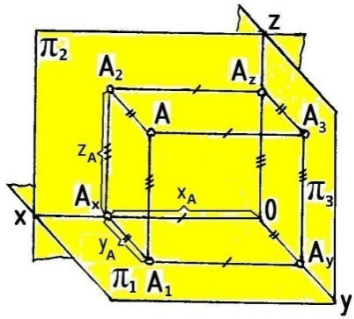
Просторове мислення – пространственное мышление
Просторове уявлення – пространственное проедставление
Профільна площина проекцій – профильная плоскость проекцій
Пряма – прямая
Пряма рівня – прямая уровня
Прямий кут – прямой угол
Прямокутна проекція – прямоугольная проекція
Прямокутник – прямоугольник
Радіус – радіус
Риска – черта
Рівний – равный
Рівність – равенство
Рівняння – уравнение
Рівновіддалені – равноудалённые
Рівнонахилені – равнонаклонённые
Рівносторонній трикутник – равносторонний треугольник
Розв'язування – решение
Розгортка – развёртка
Розгортна поверхня – развёртываемая поверхность
Розмір – раз мер
Рух – движение
Симетрія – симметрия
Система координат – система координат
Січна – секущая
Січна площина – секущая плоскость
Слід – след
Слід площини – след плоскости
Слід прямої – след прямой
Спільні точки – общие точки
Спосіб – способ
Спотворення – искажение
Спряження – сопряжение
Стала пряма креслення – постоянная прямая чертеж
Сумістити – совместить
Суміщати – совместить
Суміщення – совмещение
Суцільний – сплошной
Сфера – сфера
Твірна – образующая
Тіло – тело
Товщина – товщина
Точка – точка
Точки конкуруючі – точки конкурирующие
Точка сходу слідів – точка схода следов
Трикутник – треугольник
Фігура – фігура
Фронталь – фронталь
Фронтальна площина – фронтальная плоскость
Фронтальна площина проекцій – фронтальная плоскость проекций
Фронтальна пряма – фронтальна прямая
Циліндр – циліндр
Циліндрична поверхня – цилиндрическая поверхность

Національний університет
водного господарства
та природокористування

УКРАЇНСЬКО-АНГЛІЙСЬКА ЧАСТИНА НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА

UKRAINIAN-ENGLISH PART OF THE TEXTBOOK

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Нарисна геометрія. Розділ 1 **Метод проекцій** **Проекціювання точки**	**Descriptive geometry. Chapter 1** **Method of projections** **Projecting a point**
1.1. Завдання нарисної геометрії	1.1. The objective of descriptive geometry.
Основне завдання нарисної геометрії полягає у визначенні способів зображення просторових об'єктів на площині (аркуші паперу або екрані комп'ютера).	The main objective of descriptive geometry is to define the methods of description of the spatial figures in the plane (a piece of paper or computer screen).
Ще одним завданням нарисної геометрії є вивчення способів, що дозволяють уявити форми геометричних об'єктів за їх плоскими зображеннями, тобто опанування правилами читання креслень.	One more objective of descriptive geometry is to study methods that allow us to imagine forms of geometric objects by their two-dimensional image, in other words, to acquire the skills of drawing interpretation.
В основу нарисної геометрії покладено метод проекцій.	Method of projections is the basis of descriptive geometry.
1.2. Метод проекцій. Ортогональні проекції	1.2.Method of projections. Orthogonal projections.
Апарат відображення просторових фігур на площині (рис. 1.1) включає об'єкт, що проекціюється (точка А), площину проекцій, на яку проекціюється точка А (на рис. 1.1 це π_1 – горизонтальна площина проекцій).	The framework of objects representation in the plane (Fig. 1.1) includes: an object being projected (point A), a plane of projection in which the point A is projected (in Fig. 1.1 π_1 is the horizontal plane of projection).
Третім елементом апарата відображення є спосіб проекціювання. Застосовуємо спосіб ортогонального або прямокутного проекціювання. За цим способом для отримання	The third element of the framework is method of projection. We use the method of orthogonal or rectangular projection. According to this method, to obtain the image of the point A in the plane π_1 we

Національний університет
водного господарства
та природокористування

зображення точки А на площині π_1 потрібно через точку А (рис. 1.2) провести пряму перпендикулярно до площини проекцій π_1. Точка перетину цієї прямої з площиною π_1 (це точка A_1) і буде зображенням точки А на площині π_1. В нарисній геометрії зображення об'єктів, що отримані описаним чином, називаються проекціями об'єкта.	should draw a straight line through the point A (Fig. 1.2) perpendicularly to the plane of projection π_1. The intersection point of this straight line and the plane π_1 (it is the point A_1) will be the image of the point A in the plane π_1. In descriptive geometry the images of the objects obtained by the above described method are called the projections of the object.
Отже, точка A_1 – це ортогональна проекція точки А на площині π_1. Оскільки площина π_1 розміщена горизонтально, проекцію A_1 називають горизонтальною проекцією точки А.	Thus, the point A_1 is the orthogonal projection of the point A in the plane π_1. Since the plane π_1 is situated horizontally, the projection A_1 is called the horizontal projection of the point A.
Пряму AA_1, за допомогою якої знайдено проекцію A_1, називають проекціюючою прямою ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).	The line AA_1, which helped to find the projection A_1, is called project line ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).
Якщо точка С належить площині π_1 (рис. 1.3), то її горизонтальна проекція C_1 збігається з самою точкою С ($C_1 \equiv C$). На рис. 1.3 точкам простору В і D відповідають єдині горизонтальні проекції B_1 і D_1 . Проте, одній горизонтальній проекції F_1 відповідає безліч точок простору (F, F`, F`` і т.д.), що знаходяться на одній проекціюючій прямій. Відзначимо, що точки, які лежать на одній проекціюючій прямій, називаються конкуруючими. Точки F, F`, F``, що зображені на рис. 1.3, це конкуруючі точки.	If the point C belongs to the plane π_1 (Fig. 1.3), than its horizontal projection C_1 will coincide with the point C ($C_1 \equiv C$). In Fig. 1.3 the points of space B and D will have horizontal projections B_1 and D_1 respectively. However, one horizontal projection F_1 corresponds to multiple points of space (F, F`, F`` etc.) that are situated on the same project line. It should be noted that the points which lie on the same project line are called collinear points. The points F, F`, F`` shown in Fig. 1.3 are collinear points.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Отже, судити про положення точки в просторі за однією її проекцією неможливо, а креслення з однією проекцією об'єкта є невизначеним, неоднозначним.

1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві перпендикулярні площини проекцій. Епюр точки

Французький вчений Гаспар Монж, засновник нарисної геометрії, запропонував для усунення неоднозначності креслення ортогональне проекціювання здійснювати не на одну, а на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій.

На рис. 1.4 дано наочне зображення точки А в системі двох площин проекцій π_1 і π_2. Віднесемо до площин проекцій просторову прямокутну систему координат O*xyz*, де вісь *x* збігається з лінією перетину площин проекцій π_1 і π_2. Точка О – початок координат. Наочне зображення виконано у фронтальній диметрії. Площину π_2 називають фронтальною площиною проекцій. Лінію перетину площин проекцій називають віссю проекцій. Лінія перетину площин π_1 і π_2 – це вісь проекцій *x*, яка збігається з координатною віссю *x* ($x = \pi_1 \cap \pi_2$).

Thus, it is impossible to define the location of the point in the space using its one projection only. And the drawing with one projection of the object is believed to be indefinite and ambiguous.

1.3. Monge's method. Projecting a point on two perpendicular planes of projection. Epure of the point.

Gaspard Monge, a French scientist and the founder of descriptive geometry, suggested that orthogonal projection should be made not on one but on two mutually perpendicular planes of projection in order to avoid inaccurate drawing.

In Fig. 1.4 a visual image of the point A in the system of two planes of projections π_1 and π_2 is given. Let's consider spatial rectangular system of coordinates O*xyz* as the plane of projection, where the axis *x* coincides with the intersection line of the projection planes π_1 and π_2. The point O is the beginning of the coordinates. The visual image is made in frontal oblique drawing. The plane π_2 is called the frontal plane of projection. The line where the planes of projection intersect is called the axis of projection. The intersection line of the planes π_1 and π_2 is the axis of projection *x,* which coincides with the axis of coordinates *x* ($x = \pi_1 \cap \pi_2$).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

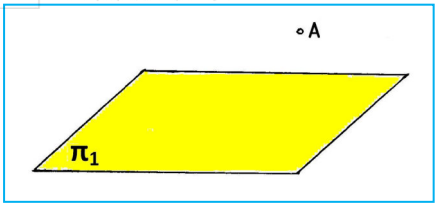


Рис. 1.1. Апарат відображення об'єктів на площині (А – точка простору , що не належить π_1; π_1 – горизонтальна площина проекцій)
Fig. 1.1. The framework of objects representation in the plane (A is the point of space that doesn't belong to π_1; π_1 is the horizontal plane of projections)

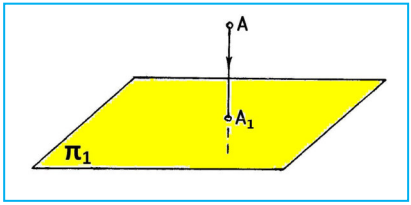


Рис. 1.2. Апарат відображення об'єктів на площині (AA_1 – проекціююча пряма, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 – горизонтальна проекція точки А, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)
Fig. 1.2. The framework of objects representation in the plane (AA_1 is the project line, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 is the horizontal projection of the point A, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)

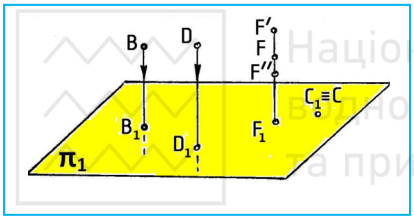


Рис. 1.3. Проекціювання точок на площину проекцій π_1
Fig. 1.3. Projecting the points on the plane of projections π_1

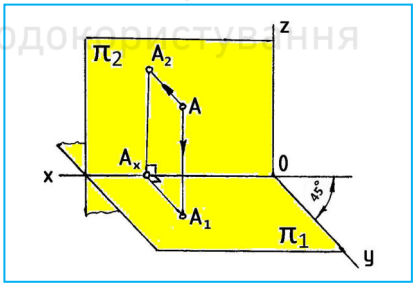


Рис. 1.4. Проекціювання точки на дві площини проекцій (π_2 – фронтальна площина проекцій, A_2 – фронтальна проекція точки А)
Fig. 1.4. Projecting the point on two planes of projections (π_2 is the frontal plane of projections, A_2 is the frontal projection of the point A)

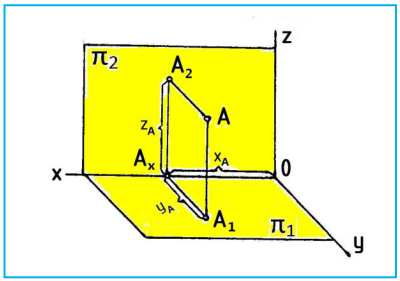


Рис. 1.5. Проекціювання точки на дві площини проекцій
Fig. 1.5. Projecting the point on two planes of projections проекций

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Фронтальна проекція A_2 визначається таким чином. З точки А проводиться пряма перпендикулярно до площини π_2. Точка перетину цієї прямої з площиною π_2 (це точка A_2) і буде фронтальною проекцією точки А на площині π_2.

Дві проекції A_1 і A_2 однозначно вказують на положення точки А відносно системи площин проекцій π_1 і π_2.

Положення точки в просторі визначається трьома координатами. На рис. 1.5 показано всі три координати точки А. Таким чином, маючи дві проекції точки, можна визначити її положення в просторі відносно площин проекцій, тобто креслення з двома проекціями, на відміну від креслення з однією проекцією, є визначеним, однозначним.

На рис. 1.4, 1.5 отримані проекції точки А на двох взаємно перпендикулярних площинах проекцій π_1 та π_2. Для того, щоб сумістити площини проекцій π_1 і π_2 в одну спільну площину креслення, обертаємо площину π_1 навколо осі *x* до її суміщення з фронтальною площиною проекцій π_2 в одну спільну площину. Обертання проводиться в напрямку, що вказаний на рис. 1.6. Після суміщення площин отримаємо епюр двох площин проекцій (рис. 1.7) або так, як зображено на рис. 1.8 – без

The frontal projection A_2 can be found in the following way. From the point A we draw a line perpendicularly to the plane π_2. The intersection point of this line and the plane π_2 (it is the point A_2) will be the frontal projection of the point A in the plane π_2.

Two projections A_1 and A_2 undoubtedly show the location of the point A in relation to the system of the planes of projections π_1 and π_2.

The location of the point in the space is determined by three coordinates. In Fig. 1.5 all three coordinates of the point A are shown. Thus, having two projections of the point you can identify its location in the space in relation to the plane of projection, which means the drawing with two projections is well-defined and unambiguous.

In Fig. 1.4, 1.5 we obtained the projections of the point A on two mutually perpendicular planes π_1 and π_2. In order to join the planes of projections π_1 and π_2 in one common plane of drawing, we shall revolve the plane π_1 around the axis *x* until its alignment with the frontal plane of projection in one common plane is reached. The rotation is made in the direction shown in Fig. 1.6. After alignment of the planes we will obtain the epure of two planes of projection (Fig. 1.7) or, as it is shown in Fig. 1.8, without drawing borders of the planes of projection.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

нанесення обмежень площин проекцій.

Для отримання епюра точки в системі двох площин проекцій також обертаємо площину π_1, але разом з розміщеною на ній горизонтальною проекцією A_1, до суміщення з площиною π_2 в одну спільну площину креслення (рис. 1.9). Після суміщення отримаємо епюр точки А в системі двох площин проекцій (рис. 1.10).

Епюром називається креслення, що отримане при уявному суміщенні площин проекцій разом із розміщеними на них проекціями об'єкта в одну спільну площину креслення.

На епюрі проекції точки з'єднані між собою прямою лінією, що називається лінією проекційного зв'язку. Вона завжди перпендикулярна до осі проекцій: A_1A_2 – вертикальна лінія проекційного зв'язку, що з'єднує горизонтальну та фронтальну проекції точки, причому $A_1A_2 \perp x$ (рис. 1.10).

На епюрі точки А (рис. 1.11) позначено відрізки, які дорівнюють координатам *x*, *y* і *z* точки А. Це дозволяє за епюром, маючи тільки дві проекції точки, визначити положення точки у

To obtain the epure of the point in the system of two planes of projections we shall also revolve the plane π_1, but it should be revolved along with the horizontal projection A_1, located on the plane. It is done until the alignment with the plane π_2 into one common plane of drawing is reached. (Fig. 1.9) After the alignment we obtain the epure of the point A in the system of two planes of projections. (Fig. 1.10)

The epure is a drawing obtained in the process of imaginary alignment of the planes of projection taken along with the projections of the object, located in the planes, into one common plane of the drawing.

On the epure the projections of the point are connected with each other by a straight line, which is called the line of the project connection. It is always perpendicular to the axis of projection: A_1A_2 is a vertical line of the project connection, which joins horizontal and frontal projection of the point, whilst $A_1A_2 \perp x$ (Fig. 1.10).

On the epure of the point A (Fig. 1.11) the line segments which are numerically equal to coordinates *x*, *y* and *z* of the point A are marked. This allows us to identify the location of the point in the space against the plane of projection using

Національний університет
водного господарства
та природокористування

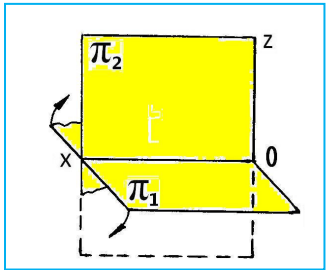


Рис. 1.6. Утворення епюра двох площин проекцій
Fig. 1.6. Constructing the epure of two planes of projections

Рис. 1.8. Епюр двох площин проекцій
Fig. 1.8. The epure of two planes of projections

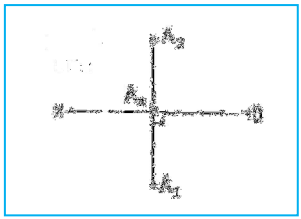


Рис. 1.10. Епюр точки в системі двох площин проекцій
Fig. 1.10. The epure of the point in the system of two planes of projections

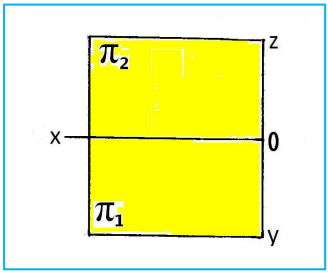


Рис. 1.7. Епюр двох площин проекцій
Fig. 1.7. The epure of two planes of projections

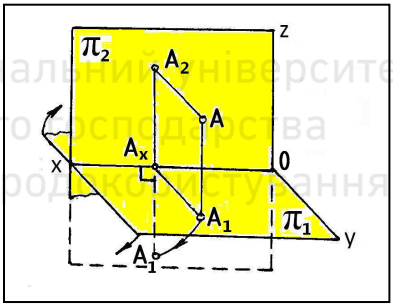


Рис. 1.9. Утворення епюра точки в системі двох площин проекцій
Fig. 1.9. Constructing the epure of the point in the system of two planes of projections

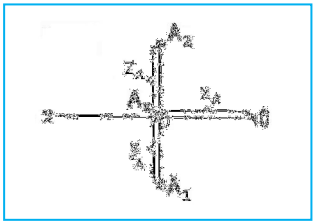


Рис. 1.11. Епюр точки в системі двох площин проекцій
Fig. 1.11. The epure of the point in the system of two planes of projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

просторі відносно площин проекцій. Дійсно, відрізок AA_1 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки А до площини π_1, причому $A_1A = A_2A_x$, а, отже, координата z точки А визначає відстань точки А до площини π_1. Відрізок AA_2 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки А до площини π_2, причому $AA_2 = A_1A_x$, а, отже, координата y точки А визначає відстань точки А до площини π_1.

Таким чином, двом проекціям точки відповідає єдина точка простору, і креслення з двома проекціями (зображеннями) є однозначним, визначеним.

1.4. Проекціювання точки на три площини проекцій

На рис. 1.12 дано наочне зображення системи трьох площин проекцій, де π_3 – профільна площина проекцій, y і z – осі проекцій ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

На рис. 1.13 показано проекції точки А на три площини проекцій, де A_3 – профільна проекція точки А, а на рис. 1.14 зазначено відрізки, які дорівнюють координатам x, y і z точки А. З рис. 1.14 випливає, що координата x точки А дорівнює відстані точки А до площини π_3, координата y точки А дорівнює відстані точки А до площини π_2, а координата z точки А дорівнює відстані точки А до площини π_1.

the epure and having only two points of projection. Indeed, the segment AA_1 (Fig. 1.5) equals the distance of the point A to the plane π_1, whilst $A_1A = A_2A_x$, thus, the coordinate z of the point A defines the distance of the point A to the plane π_1. The segment AA_2 (Fig. 1.5) equals the distance of the point A to the plane π_2, whilst $AA_2 = A_1A_x$, thus, the coordinate y of the point A defines the distance of the point A to the plane π_1.

Consequently, a single point of space corresponds to two projections. Therefore, the drawing with two projections (images) is unambiguous and well-defined.

1.4. Projecting a point on three planes of projections.

In Fig. 1.12 a visual image of three planes of projections system is given. Here, π_3 is a cross plane of projection, y and z are axes of projections ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

In Figure 1.13 the projections of the point A on three planes of projections are shown, where, A_3 is a cross projection of the point A, and in Fig. 1.14 the segments that equal coordinates x, y and z of the point A are shown. From the Fig.1.14 we can conclude that the coordinate x of the point A equals the distance of the point A to the plane π_3, the coordinate y of the point A equals the distance of the point A to the plane π_2, and the

Національний університет
водного господарства
та природокористування

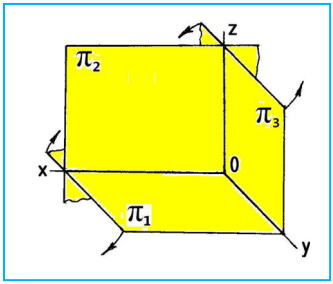


Рис. 1.12. Просторова система трьох площин проекцій (π_3 – профільна площина проекцій) та утворення епюра трьох площин проекцій

Fig. 1.12. Spatial system of three planes of projection (π_3 is the cross plane of projections)

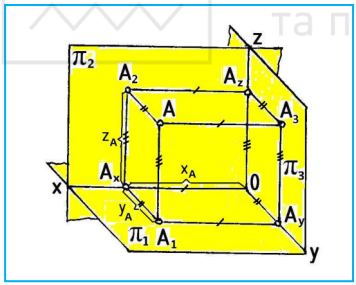


Рис. 1.14. Проекціювання точки на три площини проекцій

Fig. 1.14. Projecting the point on three planes of projections

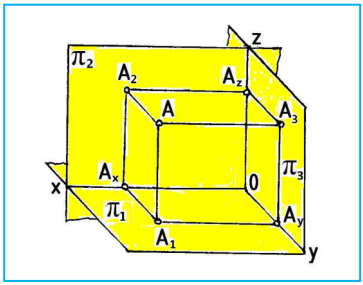


Рис. 1.13. Проекціювання точки на три площини проекцій (A_3 – профільна проекція точки А)

Fig. 1.13. Projecting the point on three planes of projections (A_3 is the cross projection of the pointA)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

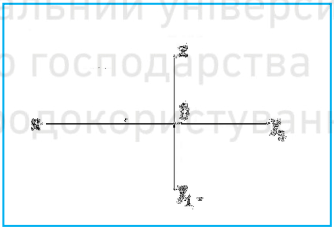


Рис. 1.15. Епюр системи трьох площин проекцій

Fig. 1.15. The epure of the system of three planes of projections

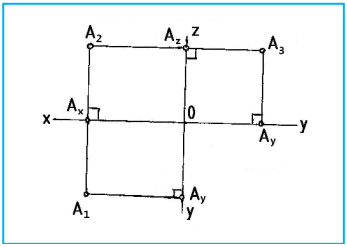


Рис. 1.16. Епюр точки в системі трьох площин проекцій

Fig. 1.16. The epure of the point in the system of three planes of projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Утворення епюра системи трьох площин проекцій досягається таким чином (рис. 1.12). Площина π_2 залишається нерухомою, обертанням навколо осей x і z з нею суміщаються площини π_1 і π_3. Для того, щоб площини π_1 і π_3 могли обертатися, їх умовно роз'єднують, розрізаючи площини по осі y. На рис. 1.15 дано епюр системи трьох площин проекцій. При утворенні епюра вісь y розпалася на два променя:один промінь (y_1) залишився на площині π_1, а другий промінь (y_3) – на площині π_3.

На рис. 1.16 дано епюр точки А в системі трьох площин проекцій, який утворений в результаті суміщення площин проекцій в одну спільну площину креслення. Проекції A_1 і A_2 розміщені на вертикальній лінії проекційного зв'язку ($A_1A_2 \perp x$), проекції A_2 і A_3 – на горизонтальній лінії проекційного зв'язку ($A_2A_3 \perp z$), а проекції A_1 і A_3 – на горизонтально-вертикальній лінії проекційного зв'язку ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), яка розпалася на два відрізки A_1A_y і A_3A_y, оскільки на два променя y_1 і y_3 розпалася при суміщенні площин проекцій і сама вісь проекції y.

На рис. 1.17 зазначено

coordinate z of the point A equals the distance of the point A to the plane π_1.

The construction of the epure of three planes of projection system is obtained in the following way (Fig. 1.12). The plane π_2 stays fixed; it is aligned with the planes π_1 and π_3 by revolving around the axes x and z. To be able to revolve, the planes π_1 and π_3 are figuratively divided, being cut along the axis y. In Fig. 1.15 the epure of three planes of projections system is given. In the formation of the epure the axis y has been divided into two rays: one ray (y_1) is left in the plane π_1, and another ray (y_3) is in the plane π_3.

In Fig. 1.16 the epure of the point A in three planes of projection system is given. It is formed in the result of the planes of projection alignment into one common plane of the drawingt. The projections A_1 and A_2 are located on the vertical line of the project connection ($A_1A_2 \perp x$); the projections A_2 and A_3 are located on the horizontal line of the project connection ($A_2A_3 \perp z$); and the projections A_1 and A_3 are on the horizontal and vertical line of the project connection ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), which has been cut into two segments A_1A_y and A_3A_y, since the axis of projection y, itself, has also been cut into two rays y_1 and y_3 while the alignment of the planes of the projection.

In Figure 1.17 we can see

Національний університет
водного господарства
та природокористування

відрізки, які дорівнюють координатам *x*, *y* і *z* точки А, що дозволяє, вибравши величину одиниці масштабу, побудувати проекції точки, тобто епюр точки, за заданими чисельними значеннями її координат.

На рис. 1.18-1.20 побудований епюр точки В за її координатами: В (40,20,30).

Третю проекцію (профільну B_3) за двома заданими проекціями B_1 і B_2 точки В можна побудувати координатним або проекційним способами (рис. 1.21-1.23).

На рис. 1.24 дано епюр точки В в системі трьох площин проекцій.

1.5. Класифікація точок

Точки ділять на точки простору, що не належать площинам проекцій, і точки, що належать площинам проекцій.

На рис. 1.25 дано наочне зображення точки С, що належить площині проекцій π_1. Координата *z* цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_1. На рис. 1.26 дано епюр точки С, що належить площині π_1.

На рис. 1.27 дано наочне зображення точки D, що належить площині проекцій π_2. Координата *y* цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_2. На рис. 1.28 дано епюр точки

the segments which are equal to the coordinates *x*, *y* and *z* of the point A. This allows us, having chosen scale unit value, to design the projection of the point, i.e. the epure of the point, using given numerical values of its coordinates.

In Fig. 1.18-1.20 we can see the epure of the point B drawn by its coordinates: B (40, 20, 30).

The third projection (the cross projection B_3) can be drawn by coordinate or project methods (Fig. 1.21-1.23), two projections B_1 and B_2 of the point B being given.

In Figure 1.24 the epure of the point B in three planes of projections system is shown.

1.5. Classification of the points

The points are classified into points of space, that don't belong to the planes of projections, and points that belong to the planes of projections.

In Fig. 1.25 a visual image of the point C that belongs to the plane of projection π_1 is given. The coordinate *z* of this point is equal to zero, since the point lies in the plane π_1. In Fig. 1.26 the epure of the point C that belongs to the plane π_1 is given.

In Fig. 1.27 a visual image of the point D that belongs to the plane of projection is given π_2. The coordinate *y* of this point equals zero since this point lies in the plane π_2. In Fig. 1.28 the epure of the point D that belongs to the plane π_2 is

Національний університет
водного господарства
та природокористування

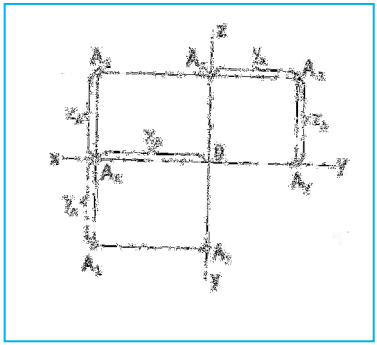


Рис. 1.17. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Fig. 1.17. The epure of the point in the system of three planes of projections

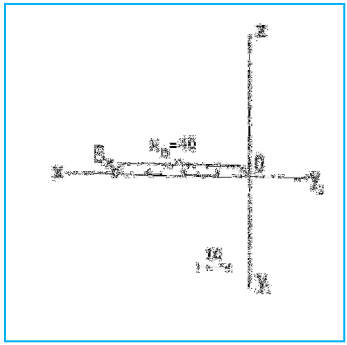


Рис. 1.18. Побудова епюра точки В за її координатами (1 дія)
Fig. 1.18. Constructing the epure of the point B by its coordinates (step 1)

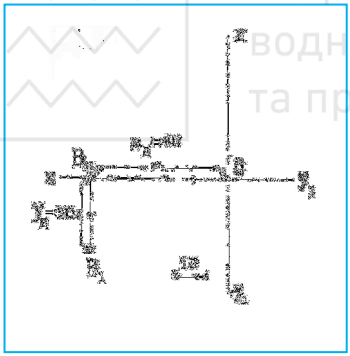


Рис. 1.19. Побудова епюра точки В за її координатами (2 дія)
Fig. 1.19. Constructing the epure of the point B by its coordinates (step 2)

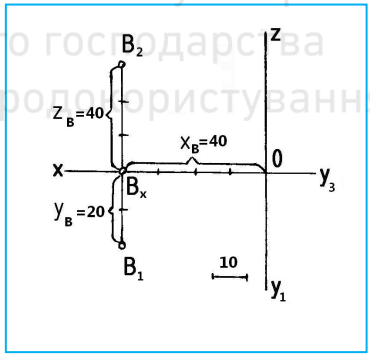


Рис. 1.20. Побудова епюра точки В за її координатами (3 дія)
Fig. 1.20. Constructing the epure of the point B by its coordinates (step 3)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

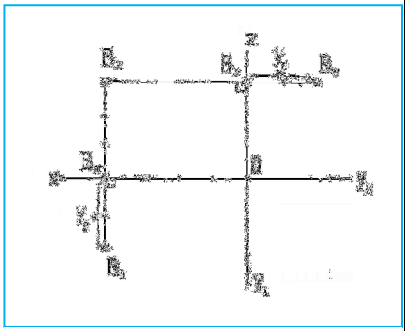


Рис. 1.21. Побудова профільної проекції точки В координатним способом
Fig. 1.21. Constructing cross projection of the point B by coordinate method

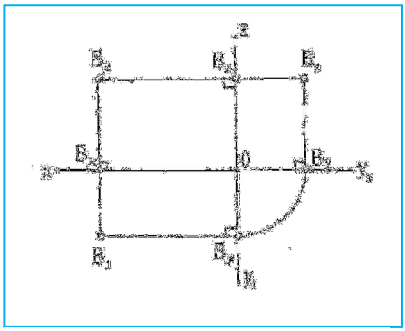


Рис. 1.22. Побудова профільної проекції точки В проекційним способом (за допомогою дуги)
Fig. 1.22.Constructing cross projection of the point B by project method (by means of arc)

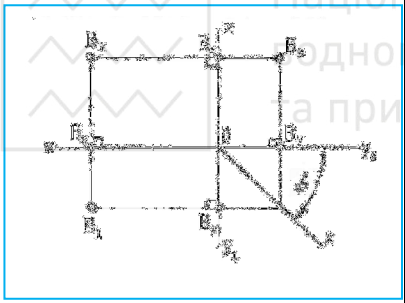


Рис. 1.23. Побудова профільної проекції точки В проекційним способом (за допомогою сталої прямої креслення)
Fig. 1.23. Constructing cross projection of the point B by project method (by means of the fixed line of the drawing)

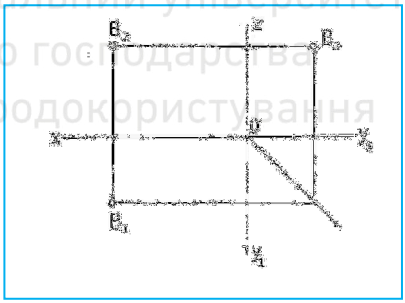


Рис. 1.24. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Fig. 1.24. The epure of the point in the system of three planes of projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

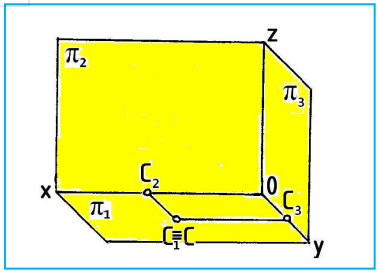


Рис. 1.25. Наочне зображення точки С та її проекцій (С Є π_1, $z_C = 0$)
Fig. 1.25. A visual image of the point C and its projections (C Є π_1, $z_C = 0$)

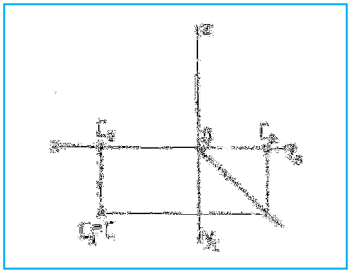


Рис. 1.26. Епюр точки С (С Є π_1, $z_C = 0$)
Fig. 1.26. The epure of the point C (C Є π_1, $z_C = 0$)

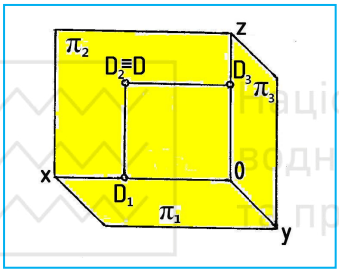


Рис. 1.27. Наочне зображення точки D та її проекцій (D Є π_2, $y_D = 0$)
Fig. 1.27. A visual image of the point D and its projections (D Є π_2, $y_D = 0$)

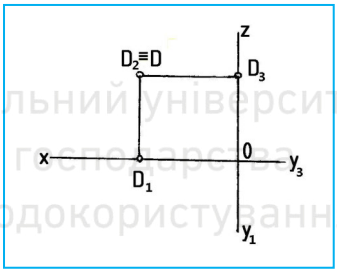


Рис. 1.28. Епюр точки D (D Є π_2, $y_D = 0$)
Fig. 1.28. The epure of the point D (D Є π_2, $y_D = 0$)

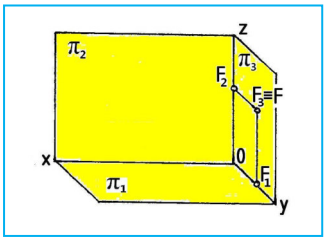


Рис. 1.29. Наочне зображення точки F та її проекцій (F Є π_3, $x_F = 0$)
Fig. 1.29. A visual image F and its projections (F Є π_3, $x_F = 0$)

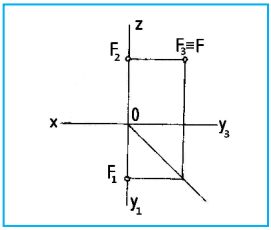


Рис. 1.30. Епюр точки F (F Є π_3, $x_F = 0$)
Fig. 1.30. The epure of the point F (FЄ π_3, $x_F = 0$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

D, що належить площині π_2.

На рис. 1.29 дано наочне зображення точки F, що належить площині проекцій π_3. Координата z цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площини π_3. На рис. 1.30 дано епюр точки F, що належить площині π_3.

Таким чином, у точки, що належить одній площині проекцій, дві проекції знаходяться на осях проекцій, а третя збігається з самою точкою.

У точки, що належить одній площині проекцій, одна координата дорівнює нулю; це саме та, яка вказує на віддаленість точки до тієї площини проекцій, де знаходиться дана точка.

Розглянемо точки, які лежать на осях проекцій, а, отже, належать двом площинам проекцій водночас.

На рис. 1.31 дано наочне зображення точки E, яка лежить на осі x, тобто належить двом площинам проекцій π_1 і π_2 водночас ($x = \pi_2 \cap \pi_1$). У цієї точки координати y і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1, і площині π_2, то горизонтальна E_1 і фронтальна E_2 проекції точки E збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.32 дано епюр точки E, що лежить на осі проекцій x.

given.

In Fig. 1.29 a visual image of the point F that belongs to the plane of projection π_3 is given. The coordinate z of this point equals zero since this point lies in the plane π_3. In Fig. 1.30 the epure of the point F that belongs to the plane π_3 is given.

Consequently, the point that belongs to one plane of projection has two projections located on the axes of projections, and the third one coincides with the point itself.

The point that belongs to one plane of projection has one coordinate equal to zero; it is the one that indicates the distance of the point to the plane of projections where the given point is located.

Let's look at the points that lie on the axes of projections, thus, belong to two planes of projections simultaneously.

In Fig. 1.31 a visual image of the point E that lies on the axis x, thus belongs to two planes of projection π_1 and π_2 simultaneously($x = \pi_2 \cap \pi_1$) is given. This point has coordinates y and z that are equal to zero. Since the point belongs to both planes π_1 and π_2, then the horizontal E_1 and frontal E_2 projections of the point E coincide with each other and with the point itself. In Fig. 1.32 the epure of the point E that lies on the axis of projection x is given.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

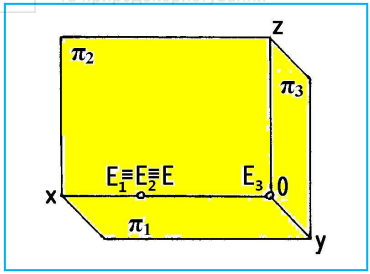


Рис. 1.31. Наочне зображення точки Е та її проекцій (Е Є x)
Fig. 1.31. A visual image of the point E and its projections (E Є x)

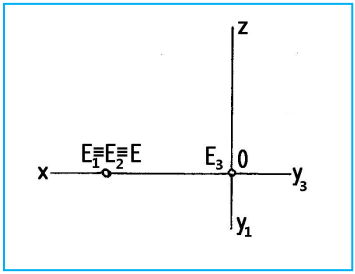


Рис. 1.32. Епюр точки Е (Е ∈ x)
Fig. 1.32. The epure of the point E (E ∈ x)

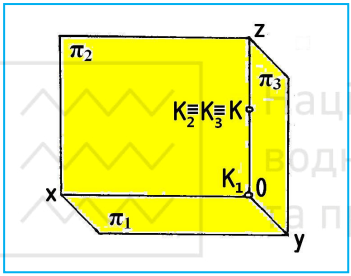


Рис. 1.33. Наочне зображення точки К та її проекцій (Е ∈ z)
Fig. 1.33. A visual image of the point K and its projections (E ∈ z)

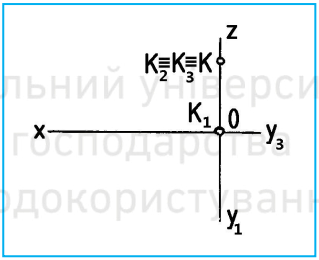


Рис. 1.34. Епюр точки К (К ∈ z)
Fig. 1.34. The epure of the point K (K ∈ z)

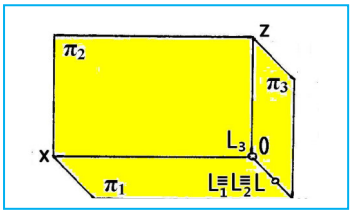


Рис. 1.35. Наочне зображення точки L та її проекцій (L ∈ y)
Fig. 1.35. A visual image of the point L and its projections (L ∈ y)

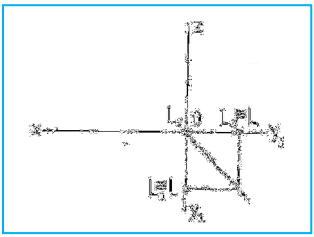


Рис. 1.36. Епюр точки L (L ∈y)
Fig. 1.36. The epure of the point L (L ∈ y)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 1.33 дано наочне зображення точки К, яка лежить на осі z, тобто належить двом площинам проекцій π_2 і π_3 водночас ($z = \pi_2 \cap \pi_3$). У цієї точки координати x і y дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_2, і площині π_3, то фронтальна K_2 і профільна K_3 проекції точки К збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.34 дано епюр точки К, що лежить на осі проекцій z.

На рис. 1.35 дано наочне зображення точки L, яка лежить на осі y, тобто належить двом площинам проекцій π_1 і π_3 водночас ($y = \pi_1 \cap \pi_3$). У цієї точки координати x і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1, і площині π_3, то горизонтальна L_1 і профільна L_3 проекції точки L збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.36 дано епюр точки L, що лежить на осі проекцій y.

Таким чином, у точок, що лежать на осях проекцій, тобто належать двом площинам проекцій водночас, дві координати дорівнюють нулю; це саме ті, які вказують на віддаленість точок від тих площин проекцій, на яких водночас лежать ці точки, при цьому дві з трьох проекцій даних точок збігаються між собою і з самою точкою.

In Fig. 1.33 a visual image of the point K that lies on the axis z, thus, belongs to two planes of projection π_2 and π_3 simultaneously ($z = \pi_2 \cap \pi_3$) is given. This point has coordinates x and y that are equal to zero. Since the point belongs to the plane π_2 as well as to the plane π_3, then the frontal K_2 and the cross K_3 projections of the point K coincide with each other and with the point itself. In Fig. 1.34 the epure of the point K that belongs to the axis of projection z is given.

In Fig. 1.35 a visual image of the point L that lies on the axis y thus belongs to two planes of projections π_1 and π_3 simultaneously ($y = \pi_1 \cap \pi_3$) is given. This point has coordinates x and z that are equal to zero. Since the point belongs to the plane π_1 as well as to the plane π_3, then the horizontal L_1 and the cross L_3 projections of the point L coincide with each other and with the point itself. In Fig. 1.36 the epure of the point L that lies on the axis of projection y is given.

Consequently, the points that lie on the axes of projections, thus, belong to two planes of projections simultaneously, have two coordinates that are equal to zero; they are the ones that indicate the distance of the points from those planes of projections in which these points lie simultaneously, whilst two of three projections of the given points coincide with each other and with the point itself.

Національний університет
водного господарства

Нарисна геометрія. Розділ 2 Проекціювання прямої

2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення

Пряма – найкоротша відстань між двома точками.

Проекцією прямої лінії в загальному випадку є також пряма лінія. Так, на рис. 2.1 дано наочне зображення прямої l і її проекцій – горизонтальної l_1 та фронтальної l_2 – в системі двох площин проекцій π_1 і π_2.

На рис. 2.2 дано епюр прямої l у вигляді прямих ліній – проекцій l_1 і l_2. Якщо пряма зображена прямими лініями, то вона сама і її проекції позначаються малими літерами латинського алфавіту – l, b, k тощо.

Пряма в просторі може бути визначена двома нетотожними точками. На рис. 2.3 дано наочне зображення прямої, що проходить через точки A і B простору. Отримавши горизонтальні (A_1, B_1) та фронтальні (A_2, B_2) проекції цих точок та провівши пряму через точки A_1 і B_1, дістанемо горизонтальну проекцію A_1B_1 прямої AB, а провівши пряму через точки A_2 і B_2, – фронтальну проекцію A_2B_2 прямої AB.

На рис. 2.4 дано епюр прямої AB. Якщо пряма визначена двома

Descriptive geometry. Chapter 2 Projecting a straight line

2.1. Projections of a straight line. Straight lines of general position.

A straight line is the shortest distance between two points.

The projection of a straight line is, in general, also a straight line. Thus, in Fig. 2.1 a visual image of the straight line l is given as well as its projections: the horizontal l_1 and the frontal l_2 in the system of two planes of projections π_1 and π_2.

In Fig. 2.2 the epure of the straight line l is given in the form of straight lines i.e. projections l_1 and l_2. If the line is represented by the straight lines, then the line itself and its projections are marked by lower case Latin letters, such as l, b, k etc.

The straight line in space can be determined by two non-identical points. In Fig. 2.3 a visual image of a straight line crossing the points of space A and B is given. Having received the horizontal (A_1, B_1) and the frontal (A_2, B_2) projections of these points and having drawn the straight line through the points A_1 and B_1, we shall obtain the horizontal projection A_1B_1 of the line AB, and having drawn the straight line through the points A_2 and B_2, we shall obtain the frontal projection A_2B_2 of the line AB.

In Fig. 2.4 the epure of the straight line AB is given. If the line

Національний університет
водного господарства
та природокористування

нетотожними точками, то вона і її проекції позначаються великими літерами латинського алфавіту за назвою двох її точок – AB, CD і т.д.

Таким чином, пряму лінію на епюрі зображують:

1) прямими лініями – її проекціями (рис. 2.2);
2) проекціями двох її нетотожних точок (рис. 2.4).

Залежно від розміщення прямих відносно площин проекцій розрізняють прямі загального положення, прямі рівня та проекціюючі прямі.

Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій.

На епюрі у прямих загального положення проекції не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій *x*. Це характерна графічна ознака епюрів прямих загального положення, яка дозволяє відрізнити епюри прямих загального положення від епюрів прямих рівня та проекціюючих прямих. На рис. 2.2 і 2.4 зображено епюри прямих загального положення, оскільки l_1, A_1B_1 і l_2, A_2B_2 не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій *x*.

З означення прямої загального положення випливає, що координати *x*, як і координати *y*

is determined by two non-identical points, then the line and its projections are marked by upper case Latin letters by the name of its two points, such as AB, CD, etc.

Consequently, on the epure the straight line is given:

1) by the straight lines, i.e. its projections (Fig. 2.2);
2) by the projections of its two non-identical points (Fig. 2.4).

There are straight lines in general position, level lines and project lines, depending on the location of lines in the planes of projection.

The straight lines of general position are the lines which are neither parallel to each other nor perpendicular to any plane of projection.

On the epure the straight lines of general position have projections which are neither parallel nor perpendicular to the axis of projections *x*. It is a graphical attribute of the epures of general position straight lines. It allows us to differentiate the epures of straight lines of general position from level lines and project lines. In Fig. 2.2 and 2.4 the epures of straight lines of general position are shown, since l_1, A_1B_1 and l_2, A_2B_2 are neither parallel and nor perpendicular to the axis of projection *x*.

The definition of the straight line of general position indicates that the *x* coordinate as well as the *y* and

Національний університет
водного господарства
та природокористування

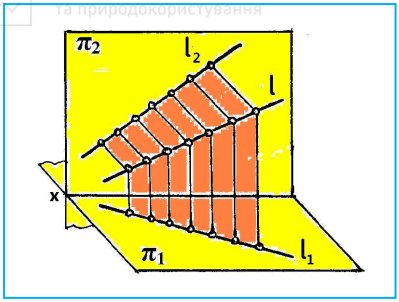


Рис. 2.1. Зображення прямої *l* у вигляді прямих ліній – її проекцій
Fig. 2.1. A visual image of the line *l* in the form of straight lines, i.e. its projections

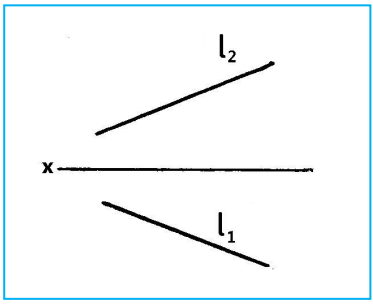


Рис. 2.2. Епюр прямої *l*
Fig. 2.2. The epure of the straight line *l*

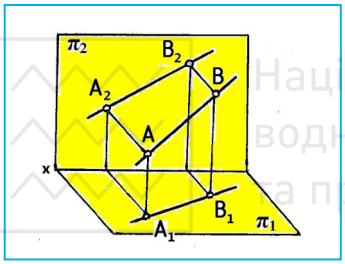


Рис. 2.3. Зображення прямої AB у вигляді проекцій двох її нетотожних точок
Fig. 2.3. A visual image of the line AB in the form of its two non-identical points projections

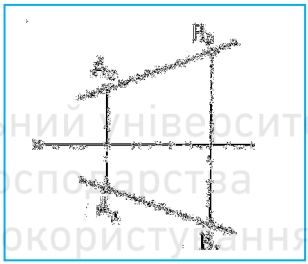


Рис. 2.4. Епюр прямої AB
Fig. 2.4. The epure of the straight line AB

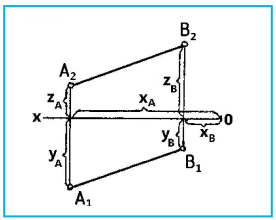


Рис. 2.5. Епюр прямої AB із зазначеними координатами точок A і B
Fig. 2.5. The epure of the straight line AB with the given coordinates of the points A and B

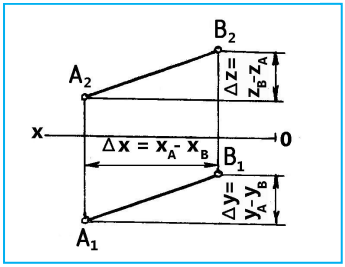


Рис. 2.6. Епюр прямої AB із зазначеними різницями координат точок A і B
Fig. 2.6. The epure of the straight line AB with the given difference between coordinates of the points A and B

Національний університет
водного господарства
та природокористування

та z, двох будь-яких нетотожних точок цієї прямої мають різні числові значення (рис. 2.5). Лише прямій загального положення властиве те, що різниці всіх трьох координат двох її нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю (рис. 2.6).

Зазначимо проекційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:

1) на епюрі проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні осям проекцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення;

2) кожна проекція відрізка прямої коротша за натуральну величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проекцій;

3) різниці координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.

2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення. Сліди прямої

Оскільки проекції відрізка прямої загального положення коротші за натуральну величину самого відрізка, визначити дійсну величину відрізка безпосередньо за епюром неможливо. Проте існує спосіб, який називається

the z, coordinates of two any non-identical points of this line have different numerical values. (Fig. 2.5). Only a straight line of general position is characterized by the fact that the difference between all three coordinates of its two non-identical points of the line is not equal to zero. (Fig. 2.6).

Let's sum up project attributes and coordinate characteristics of a straight line of general position:

1) on the epure the projections of the line are neither parallel nor perpendicular to the axes of projections. It is a graphical characteristic of a straight line of general position only;

2) every projection of the line segment is shorter than its true size of the segment itself, since the line is not parallel to any plane of projections;

3) the difference between the x, y and the z coordinates of two non-identical points of the straight line is not equal to zero.

2.2. A true size of general position line segment. Traces of a straight line

Since the projections of general position line segment are shorter than a true size of the segment itself, it is impossible to define its true size by the epure. However, there is a method, called the method of the right triangle, which allows us to

Національний університет
водного господарства
та природокористування

способом прямокутного трикутника, що дозволяє, виконавши деякі графічні побудови, визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення.

На рис. 2.7 дано наочне зображення відрізка АВ прямої загального положення та його проекцій – горизонтальної A_1B_1 та фронтальної A_2B_2. Кут α – це кут нахилу прямої АВ, що проходить через відрізок АВ до горизонтальної площини проекцій π_1. Він визначається як кут між самою прямою та її горизонтальною проекцією.

На рис. 2.7 також показано визначення натуральної величини відрізка прямої АВ та кута α її нахилу до площини проекцій π_1, а на рис. 2.8 – знаходження цих величин на епюрі.

На рис. 2.9 показано визначення натуральної величини відрізка АВ прямої загального положення та кута β її нахилу до площини проекцій π_2, а на рис. 2.10 – побудова цих величин на епюрі.

ВИСНОВКИ

Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один з катетів – проекція відрізка прямої на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює

determine a true size of general position line segment after drawing some graphs.

In Fig. 2.7 a visual image of the segment AB of a straight line of general position is given, as well as the segment's projections: the horizontal A_1B_1 and the frontal A_2B_2. The angle α is the angle of slope of the line that cuts the segment AB to the horizontal plane of projection π_1. It is determined as the angle between the line itself and its horizontal projection.

Fig. 2.7 also shows the determination of the true size of AB line segment as well as the angle α of its slope to the plane of projection π_1, and Fig.2.8 shows the location of these values on the epure.

Fig. 2.9 shows the determination of a full size of the segment AB of the line of general position and the angle β of its slope to the plane of projection π_2, and Fig. 2.10 shows the location of these values on epure.

CONCLUSIONS

The true size of the segment of general position line is defined by the hypotenuse of the right triangle. One of the legs of this triangle is the projection of the line segment in one of the planes of projection and the other leg is equal to

Національний університет
водного господарства
та природокористування

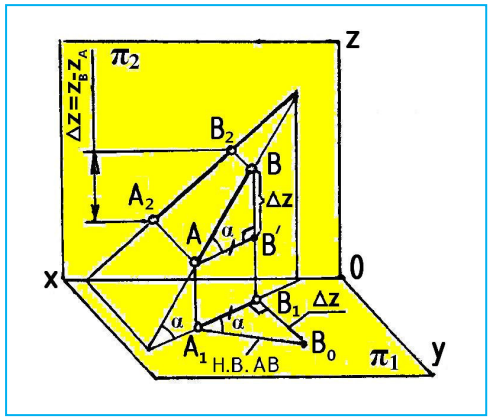


Рис. 2.7. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проекцій π_1

Fig. 2.7. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope α of the line to the plane of projection π_1 on the visual image

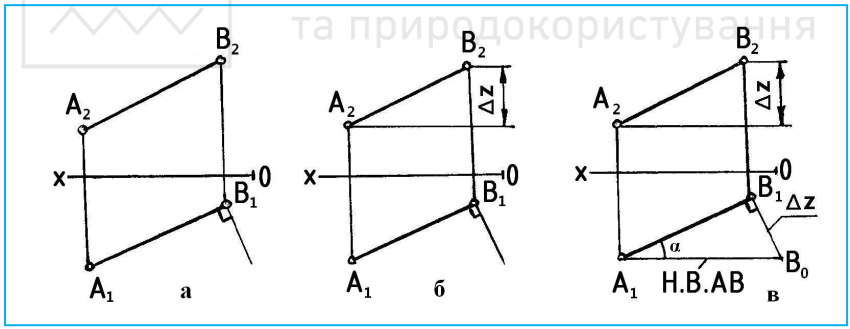


Рис. 2.8. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проекцій π_1 (а –1 дія, б – 2 дія, в – 3 дія)

Fig. 2.8. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope α of the line to the plane of projection π_1 (а – step 1, б – step 2, в – step 3) on the epure

Національний університет
водного господарства
та природокористування

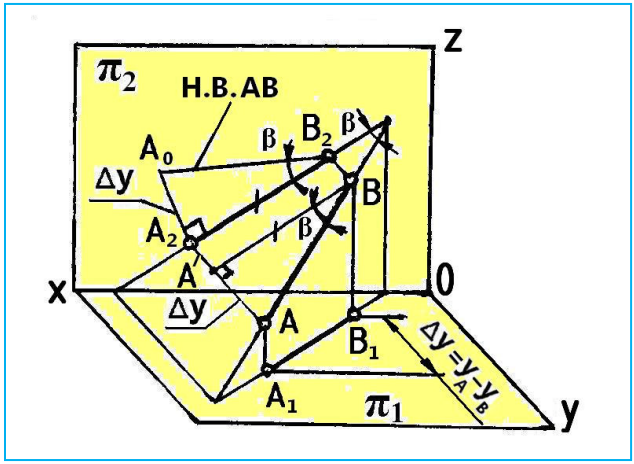


Рис. 2.9. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проекцій π_2

Fig. 2.9. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope β of the line to the plane of projection π_2 on the visual image

Національний університет
водного господарства
та природокористування

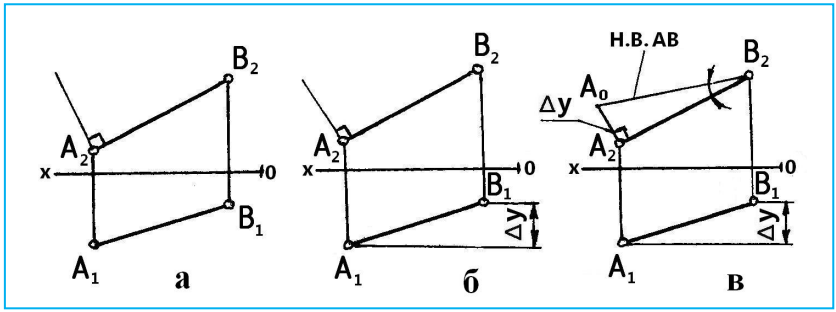


Рис. 2.10. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проекцій π_2 (а –1 дія, б – 2 дія, в – 3 дія)

Fig. 2.10. Determination of the true size of AB line segment of general position and the angle slope β of the line to the plane of projection π_2 (а – step 1, б – step 2, в – step 3) on the epure

Національний університет
водного господарства

різниці відстаней точок – кінців відрізка прямої – до тієї площини проекцій, на якій побудований прямокутний трикутник.

Із цього прямокутного трикутника визначають кут нахилу прямої до тієї площини проекцій, на якій побудований прямокутний трикутник. Цей кут дорівнює куту між гіпотенузою та катетом – проекцією.

Слідом прямої лінії називається точка перетину прямої з площиною проекцій.

На рис. 2.11 точка M – точка перетину прямої AB з горизонтальною площиною проекцій π_1, а точка N – точка перетину прямої AB з фронтальною площиною проекцій π_2.

Ці точки мають такі назви:

- точка M – горизонтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_1);
- точка N фронтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_2).

На рис. 2.12 і 2.13 показано послідовність побудови слідів прямої відповідно на наочному зображенні та епюрі.

2.3. Прямі часткового положення

Прямі часткового положення – це прямі рівня та проекціюючі прямі.

distance, i.e. the ends of the line segments, to that plane of projections in which the right angle is drawn.

From this right angle we find the angle slope of the line to that plane of projections in which the right triangle is drawn. This angle is equal to the angle between the hypotenuse and the leg of the right triangle – projection.

The trace of the straight line is the intersection point of the line and the plane of projections.

In Fig. 2.11 the point M is the intersection point of the line AB and the horizontal plane of projection π_1, the point N is the intersection point of the line AB and the frontal plane of projection π_2.

These points are called:

- the point M is the horizontal trace of the line (the point of intersection of the line and plane π_1);
- the point N is the frontal trace of the line (the point of intersection of the line and plane π_2).

In Fig. 2.12 and 2.13 the construction sequence of the line traces is shown with respect to the visual image and the epure.

2.3. Lines of partial position

The lines of partial position are the level lines and the project lines.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

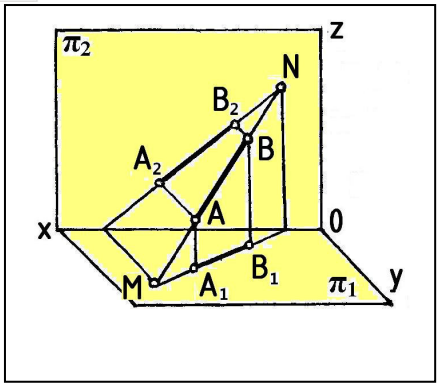


Рис. 2.11. Сліди прямої AB (M – горизонтальний слід прямої, M = AB ∩ π_1; N – фронтальний слід прямої, N = AB ∩ π_2)
Fig. 2.11. The traces of the straight line AB (M is the horizontal trace of the line, M = AB ∩ π_1; N is the frontal trace of the line, N = AB ∩ π_2)

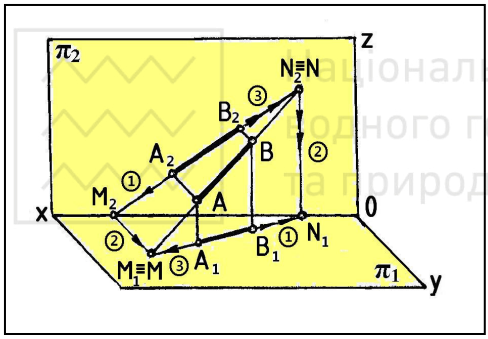


Рис. 2.12. Послідовність побудови слідів прямої
Fig. 2.12. The construction sequence of the line traces

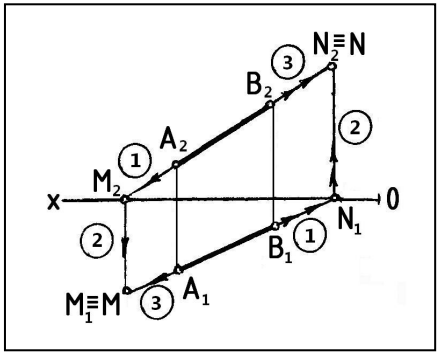


Рис. 2.13. Послідовність побудови слідів прямої на епюрі
Fig. 2.13. The construction sequence of the line traces on the epure

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прямими рівня називають прямі, які паралельні до однієї з площин проекцій, а проекціюючими – прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій.

Слід зазначити, що проекціюючі прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій, паралельні водночас до двох інших площин проекцій. Тобто, прямі часткового положення паралельні до однієї (прямі рівня) або до двох площин проекцій (проекціюючі прямі).

Розглянемо прямі часткового положення в системі двох площин проекцій.

Прямі рівня

2.3.1. Пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтальною прямою або горизонталлю і позначається буквою h.

На рис. 2.14-2.17 дано наочне зображення та епюр горизонтальної прямої AB.

Горизонтальна пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:

1) фронтальна проекція паралельна до осі *x*. Це характерна графічна ознака, яка притаманна саме цій прямій (на рис. 2.14-2.17 $A_2B_2 // x$);

The level lines are the lines that are parallel to one of the planes of projections, and the project lines are the lines that are perpendicular to one of the planes of projection.

It should be noted that the project lines which are perpendicular to one of the planes of projections, are, at the same time, parallel to two other planes of projections. Thus, the lines in partial position are parallel either to one (level lines) or to two planes of projections (project lines).

Let us now consider the lines of partial position in the system of two planes of projections.

Level lines

2.3.1. The level line, which is parallel to horizontal plane of projection, is called a horizontal line or the horizontal and it is marked by the letter h.

In Fig. 2.14-2.17 a visual image and the epure of the horizontal line AB is given.

The horizontal line has the following attributes and coordinate characteristics:

1) the frontal projection is parallel to the axis *x*. It is a graphical attribute of this particular line (Fig. 2.14-2.17 $A_2B_2 // x$);
2) the coordinate *z* of all points

Національний університет
водного господарства
та природокористування

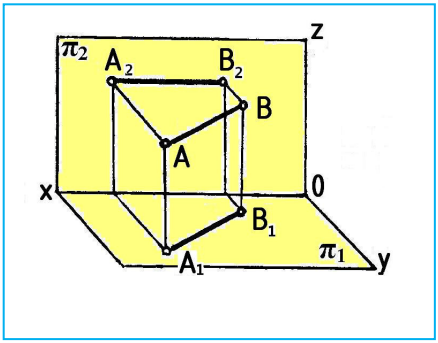


Рис. 2.14. Наочне зображення горизонтальної прямої АВ (АВ ∥ π_1, A_2B_2 ∥ x)
Fig. 2.14. A visual image of the horizontal line AB (AB ∥ π_1, A_1B_1 ∥ x)

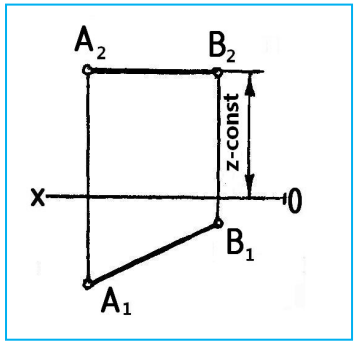


Рис. 2.15. Епюр горизонтальної прямої АВ
Fig. 2.15. The epure of the horizontal line AB (A_2B_2 ∥ x)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

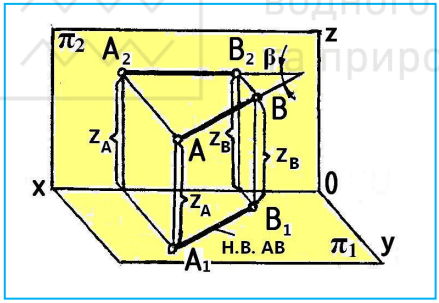


Рис. 2.16. Наочне зображення горизонтальної прямої АВ (∠ β - кут нахилу прямої до площини π_2 , A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)
Fig. 2.16. A visual image of the horizontal line AB (∠ β is the slope of line to the plane π_2 , A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)

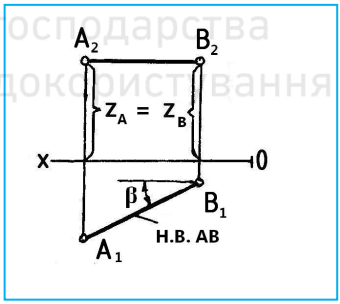


Рис. 2.17. Епюр горизонтальної прямої АВ (∠ β - кут нахилу прямої до площини π_2 , A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)
Fig. 2.17. The epure of the horizontal line AB (∠ β is the slope of line to the plane π_2 , A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2) координата z всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.15-2.17);	of the line is a constant value (Fig. 2.15-2.17);
3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.14-2.17 A_1B_1 = Н.В. AB, A_1B_1 // AB);	3) the horizontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it (Fig. 2.14-2.17 A_1B_1 = Н.В. AB, A_1B_1 // AB);
4) $\angle\beta$ – кут нахилу горизонтальної прямої до площини π_2 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.	4) $\angle\beta$ is the angle slope of the horizontal line to the plane π_2 and it is defined directly be the epure without any additional graphical constructions.
2.3.2. Пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проекції, називається фронтальною прямою або фронталлю і позначається буквою f.	2.3.2. The level line, which is parallel to the frontal plane of projection, is called a frontal line or the frontal and it is marked by the letter f.
На рис. 2.18-2.21 дано наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD.	In Fig. 2.18-2.21 a visual image and the epure of the frontal line CD is given.
Фронтальна пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:	The frontal line has the following project attributes and coordinate characteristics:
1) горизонтальна проекція паралельна до осі x. Це характерна графічна ознака цієї прямої (на рис. 2.18-2.21 C_1D_1 // x);	1) the horizontal projection is parallel to the axis x. It is a graphical attribute of this particular line (Fig. 2.18-2.21 C_1D_1 // x);
2) координата y всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.19-2.21);	2) the coordinate y of all points of the line is a constant value (Fig. 2.19-2.21);
3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.18-2.21 C_2D_2 = НВ	3) the frontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it (Fig. 2.18–2.21 C_2D_2 = НВ

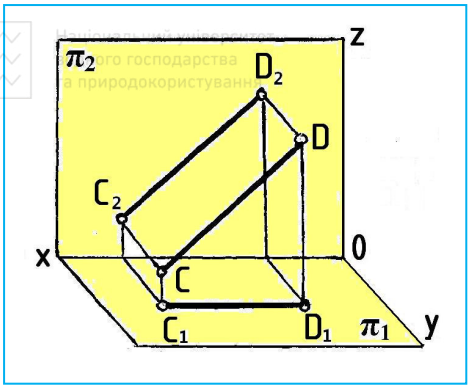


Рис. 2.18. Наочне зображення фронтальної прямої CD (CD ∥ π_2, C_1D_1 ∥ x)
Fig. 2.18. A visual image of the frontal line CD (CD ∥ π_2, C_1D_1 ∥ x)

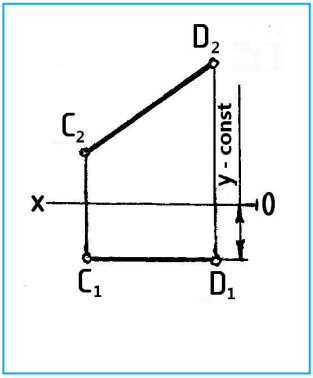


Рис. 2.19. Епюр фронтальної прямої CD (C_1D_1 ∥ x)
Fig. 2.19. The epure of the frontal line CD (C_1D_1 ∥ x)

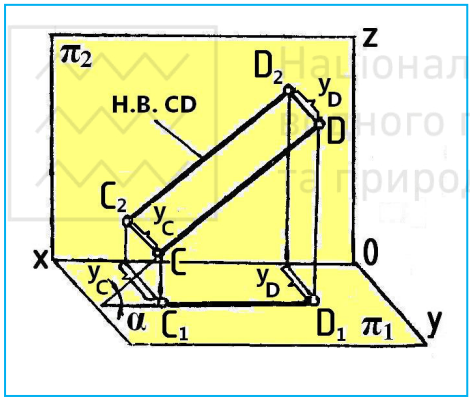


Рис. 2.16. Наочне зображення фронтальної прямої CD (∠ α - кут нахилу прямої до площини π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)
Fig. 2.16. A visual image of the frontal line AB (∠α is the angle slope of line to the plane $\pi 1$, C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)

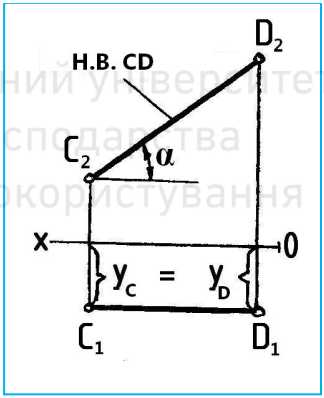


Рис. 2.17. Епюр фронтальної прямої CD (∠ α - кут нахилу прямої до площини π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)
Fig. 2.17. The epure of the frontal line CD (∠ α is the angle slope of line to the plane $\pi 1$, C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

CD, C_2D_2 // CD);

4) $\angle\alpha$ – кут нахилу фронтальної прямої до площини π_1 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

ВИСНОВКИ

На площину проекцій, до якої пряма рівня паралельна, її відрізок проекціюється в натуральну величину, а на іншу площину проекцій – паралельно до осі проекцій. За епюром без додаткових графічних побудов визначається величина кута нахилу прямої до тієї площини проекцій, до якої пряма рівня не паралельна.

Проекціюючі прямі

2.3.3. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтально-проекціюючою прямою.

На рис. 2.22-2.25 дано наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB.

Горизонтально-проекціююча пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:

1) горизонтальна проекція прямої – точка, а фронтальна проекція перпендикулярна осі *x* (на рис. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$);

2) координати *x* і *y* всіх точок

CD, C_2D_2 // CD);

4) $\angle\alpha$ is the angle slope of the frontal line to the plane π_1 and it is defined directly by the epure without any additional graphical constructions.

CONCLUSIONS.

On the plane of projection, to which the level line is parallel, we project its segment of true size, and on the other plane of projection we project it in parallel with the axis of projection. By the epure and without any additional graphical constructions we define the degree of the angle slope of the line to the plane of projection which is not parallel to level line.

Project lines

2.3.3. The project line which is perpendicular to the horizontal plane of projection is called horizontal and project line.

In Fig. 2.22-2.25 a visual image and the epure of the horizontal and project line AB is given.

The horizontal and project line has the following project attributes and coordinate characteristics:

1) the horizontal projection of the line is the point, and the frontal projection is perpendicular to the axis *x* (Fig. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$);

2) the coordinates *x* and *y* of all

Національний університет
водного господарства
та природокористування

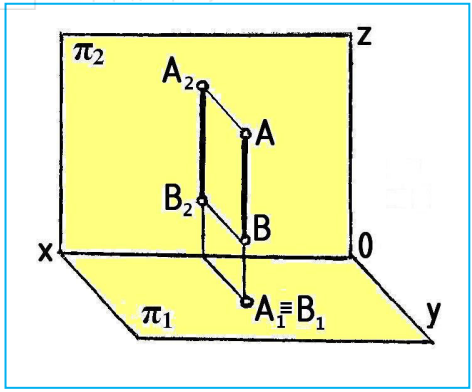


Рис. 2.22. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB)

Fig. 2.22. A visual image of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB)

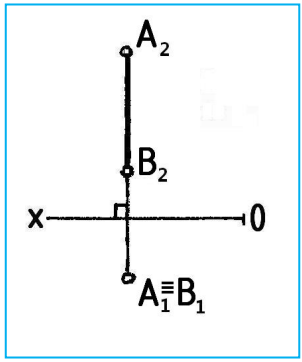


Рис. 2.23. Епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Fig. 2.23. The epure of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

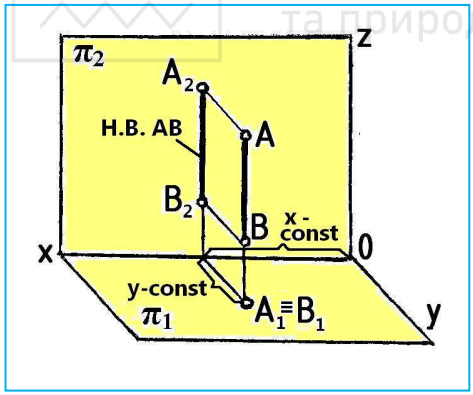


Рис. 2.24. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB, A_2B_2 = H.B. AB)

Fig. 2.24. A visual image of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB, A_2B_2 = H.B. AB)

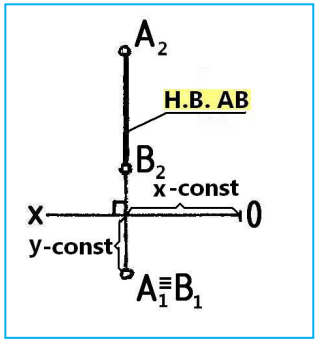


Рис. 2.25. Епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 = H.B. AB)

Fig. 2.25. The epure of horizontal and project line ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 = H.B. AB)

Національний університет водного господарства та природокористування

прямої – сталі величини (див. рис. 2.24, 2.25);

3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.22-2.25 A_2B_2 = НВ АВ, A_2B_2 //АВ).

2.3.4. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально-проекціюючою прямою.

На рис. 2.26-2.29 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої прямої CD.

Фронтально-проекціююча пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:

1) фронтальна проекція прямої – точка, а горизонтальна проекція перпендикулярна осі x (на рис. 2.26-2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$);

2) координати x і z всіх точок прямої – сталі величини (див. рис. 2.28, 2.29);

3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.26-2.29 C_1D_1 = Н.В. CD).

ВИСНОВКИ

На площину проекції, до якої проекціююча пряма перпендикулярна, вона проекціюється в точку, а на іншу площину

points of the line are constant values (see Fig. 2.24, 2.25);

3) the frontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it (Fig. 2.22-2.25 A_2B_2 = НВ АВ, A_2B_2 //АВ).

2.3.4. The project line, which is perpendicular to the frontal plane of projection, is called frontal and project line.

In Fig. 2.26-2.29 a visual image and the epure of frontal and project line CD is given.

The frontal and project line has the following project attributes and coordinate characteristics:

1) the frontal projection of the line is a point, and horizontal projection is perpendicular to the axis x (Fig. 2.26-2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$);

2) the coordinates x and z of all points of the line are constant values (see Fig. 2.28, 2.29);

3) the horizontal projection of the segment defines a true size of the segment itself and is parallel to it. (Fig. 2.22-2.25 C_1D_1 = H.B. CD).

CONCLUSIONS

On the plane of projection to which the project line is perpendicular, we project the line on the point, and on the other plane

Національний університет
водного господарства
та природокористування

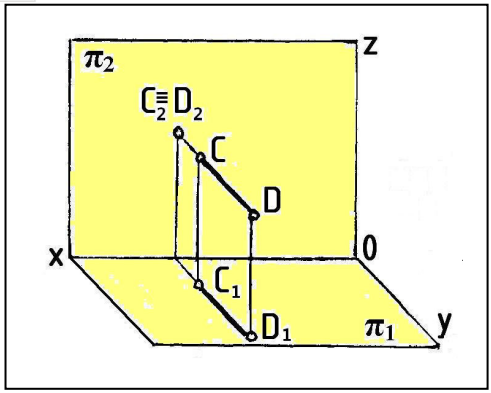


Рис. 2.26. Наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD)

Fig. 2.26. A visual image of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD)

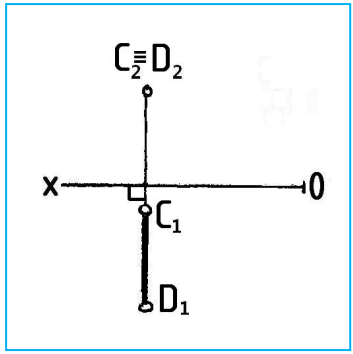


Рис. 2.27. Епюр фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

Fig. 2.27. The epure of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

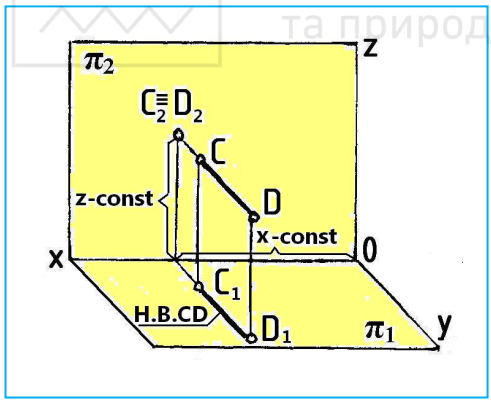


Рис. 2.28. Наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD, C_1D_1 = H.B. CD)

Fig. 2.28. A visual image of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD, C_1D_1 = H.B. CD)

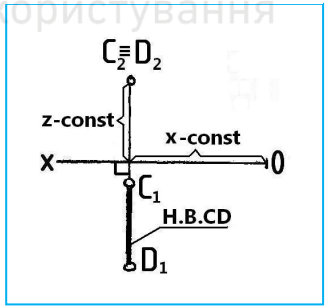


Рис. 2.29. Епюр фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 = H.B. CD)

Fig. 2.29. The epure of the frontal and project line CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 = H.B. CD)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцій, до якої вона паралельна, – перпендикулярно до осі проекцій, а її відрізок – в натуральну величину.

of projections, to which it is parallel we project it perpendicularly to the axis of projection, and its segment is projected in true size.

2.4. Взаємне положення двох прямих

2.4. Mutual alignment of two straight lines

Точка належить прямій, якщо на епюрі проекції точки належать однойменним проекціям прямої.

The point belongs to the line if the points on the epure of projection belong to the analogous projections of the line.

На рис. 2.30 тільки точка D належить прямій f, оскільки $D_1 \equiv f_1$ і $D_2 \equiv f_2$. Решта точок не належать прямій f.

In Fig. 2.30 only point D belongs to the line f, since $D_1 \equiv f_1$ і $D_2 \equiv f_2$. The rest don't belong to the line f.

Прямі в просторі можуть бути:

The lines in the space can be:

1) паралельними;
2) прямими, що перетинаються (пересічними прямими);
3) мимобіжними, тобто прямими, що не паралельні і не перетинаються.

1) parallel;
2) intersecting;
3) skew, i.e. lines that are neither parallel nor intersecting.

2.4.1. Проекції паралельних прямих на площини проекцій, до яких вони не перпендикулярні, паралельні між собою або паралельні та збігаються.

2.4.1. The projections of parallel lines on planes of projections, to which they are not perpendicular, are either parallel to each other or parallel and coincide.

На рис. 2.31, 2.32 дано епюри паралельних прямих ($l \parallel m$ і $k \parallel n$), оскільки $l_1 \parallel m_1$ і $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ і $k_1 \equiv n_1$.

In Fig. 2.31, 2.32 the epures of the parallel lines are given ($l \parallel m$ і $k \parallel n$), since $l_1 \parallel m_1$ and $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ and $k_1 \equiv n_1$.

2.4.2. Проекції прямих, що перетинаються, проекціюються на площини проекцій прямими лініями, що також перетинаються, або перетинаються та збігаються, причому точки перетину

2.4.2. The projections of intersecting lines are drawn on the planes of projections by straight lines that either intersect or intersect and coincide, whilst the intersection points of analogous lines projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

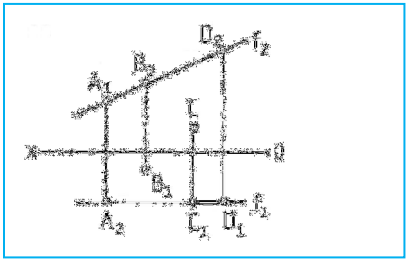


Рис. 2.30. Приналежність точки прямій лінії
Fig. 2.30. Belonging of the point to the line

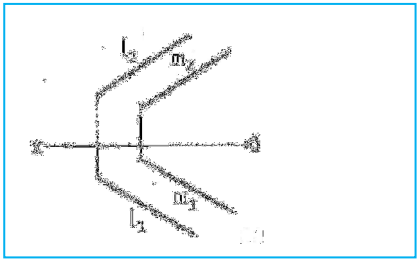


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих *l* і *m*
Fig. 2.31. The epure of the parallel lines *l* and *m*

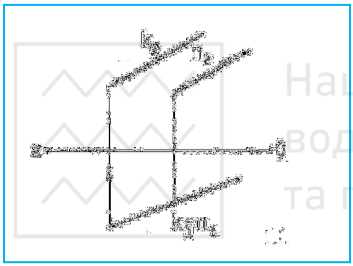


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих *k* і *n*
Fig. 2.31. The epure of the parallel lines *k* and *n*

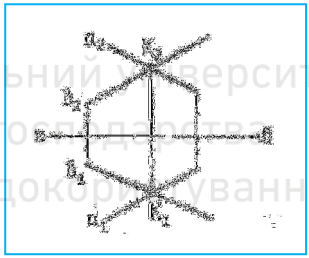


Рис. 2.32. Епюр прямих *а* і *в*, що перетинаються
Fig. 2.32. The epure of intersecting lines *a* and *в*

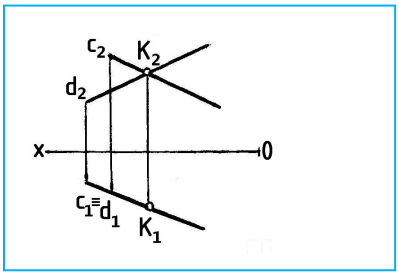


Рис. 2.33. Епюр прямих *c* і *d*, що перетинаються
Fig. 2.33. The epure of intersecting lines *c* and *d*

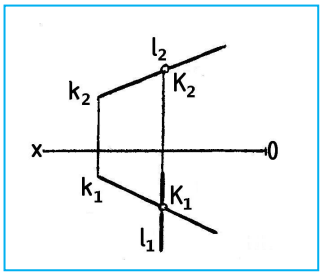


Рис. 2.34. Епюр прямих *k* і *l*, що перетинаються
Fig. 2.34. The epure of intersecting lines *k* and *l*

Національний університет
водного господарства

однойменних проекцій прямих лежать на одній лінії проекційного зв'язку, оскільки є проекціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.

На рис. 2.33 дано епюр прямих a і b, що перетинаються в точці К, оскільки $К_1 = a_1 \cap b_1$, $К_2 = a_2 \cap b_2$ (горизонтальна проекція $К_1$ і фронтальна проекція $К_2$ точки К лежать на одній вертикальній лінії проекційного зв'язку).

На рис. 2.34, 2.35 дано також епюри пересічних прямих c, d і k, l, що перетинаються в точці К. Прямі c, d і k, l лежать в одній площині, яка перпендикулярна до π_1 (рис. 2.34) і до π_2 (рис. 2.35). За проекціями цих прямих, які не збігаються, видно, що це епюри не паралельних прямих, а саме пересічних прямих.

2.4.3. Якщо прямі мимобіжні, тобто не паралельні і не перетинаються, то точки перетину їх однойменних проекцій не лежать на одній лінії проекційного зв'язку, а проекції ніколи не збігаються.

Через дві мимобіжні прямі неможливо провести одну площину, тобто мимобіжні прямі не можуть лежати в одній площині,на відміну від паралельних прямих та прямих, що перетинаються, а, отже, їх проекції ніколи не збігаються.

are located on the common line of project connection, since they are the projections of the same point, i.e. the intersection point of lines.

In Fig. 2.33 the epure of the lines a and b is given, these lines intersect in the point К, since $К_1 = a_1 \cap b_1$, $К_2 = a_2 \cap b_2$ (the horizontal projection $К_1$ and the frontal projection $К_2$ of the point К lie on the common vertical line of project connection).

In Fig. 2.34, 2.35 the epures of the intersecting lines c, d and k, l are given, these lines intersect in the point К. The lines c, d and k, l lie on the common plane which is parallel to π_1 (Fig. 2.34) and π_2 (Fig. 2.35). By the projections of these lines that do not coincide, we can see that these are not the epures of the parallel lines but of intersecting lines.

2.4.3. If the lines are skew, i.e. neither parallel nor intersecting, then the points of intersection of their analogous projections do not lie on common line of project connection, and the projections never coincide.

It is impossible to draw one plane through two skew lines, i.e. skew lines cannot lie in the common plane unlike parallel lines and intersecting lines, thus their projections never coincide.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 2.36 і 2.37 дано епюр прямих *a*, *b* і *c*, *d*. Незважаючи на те, що проекції прямих перетинаються, тільки на рис. 2.36 зображено епюр прямих, що перетинаються, оскільки 1_1 і 1_2 лежать на одній лінії проекційного зв'язку. На рис. 2.37 зображено епюр мимобіжних прямих, оскільки 1_1 (точка перетину c_1 і d_1) і точка 1_2 (точка перетину c_2 і d_2) не лежать на одній лінії проекційного зв'язку.

Можна іншим способом визначити, що прямі *c* і *d* – мимобіжні (рис. 2.38). З точки 1_2 проводимо вертикальну лінію проекційного зв'язку, яка перетинає як c_1, так і d_1, тобто точка 1 може належати як прямій *c*, так і прямій *d*, а, отже, точка 1 не є точкою перетину прямих *c* і *d*. А на рис. 2.36 точка 1 належить як прямій *a*, так і прямій *b*, тобто є точкою перетину прямих *a* і *b*.

На рис. 2.39 дано наочне зображення мимобіжних прямих *a* і *b*, а на рис. 2.40 – їх епюр.

Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі. Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній лінії

In Fig. 2.36 and 2.37 the epure of the lines *a*, *b* and *c*, *d* is given. Although the projections of the lines intersect, only in Fig. 2.36 we can see the epure of the lines that intersect, since 1_1 and 1_2 lie on the common line of the project connection. In Fig. 2.37 the epure of the skew lines is given, since 1_1 (the point of intersection c_1 and d_1) and the point 1_2 (the point of intersection c_2 and d_2) do not lie on the common line of project connection.

Another method can be used to define that lines *c* and *d* are skew lines (Fig. 2.38). From the point 1_2 we draw a vertical line of project connection which intersects c_1 as well as d_1, i.e. the point 1 may belong to the line *c*, as well as to the line *d*, thus, the point 1 is not a point of intersection of the lines *c* and *d*. And in Fig. 2.36 the point 1 belongs to the line *a* as well as to the line *b*, consequently it is a point of intersection of the lines *a* and *b*.

In Fig. 2.39 a visual image of the skew lines *a* and *b* is given, and in Fig. 2.40 their epure is shown.

The skew lines are characterized by the presence of the collinear points which are helpful in defining the visibility of the geometric figure elements on the epure. Collinear points are the points that lie on the same line of the project connection

Національний університет
водного господарства
та природокористування

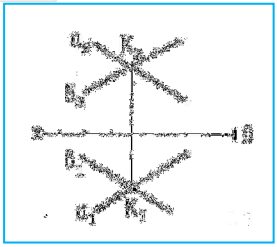


Рис. 2.36. Епюр пересічних прямих *а* і *в*
Fig. 2.36. The epure of intersecting lines *a* and *в*

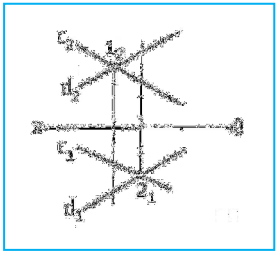


Рис. 2.37. Епюр мимобіжних прямих *с* і *d*
Fig. 2.37. The epure of skew lines *c* and *d*

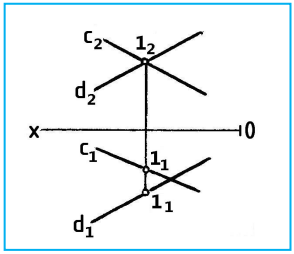


Рис. 2.38. Епюр мимобіжних прямих *с* і *d*
Fig. 2.38. The epure of skew lines *c* and *d*

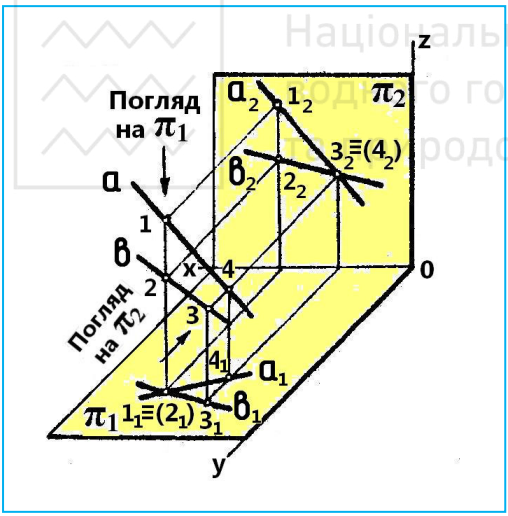


Рис. 2.39. Наочне зображення мимобіжних прямих *а* і *в* (1, 2 і 3, 4 – пари конкуруючих точок)
Fig. 2.39. A visual image of skew lines *a* and *в* (1, 2 and 3, 4 are the pairs of collinear points)

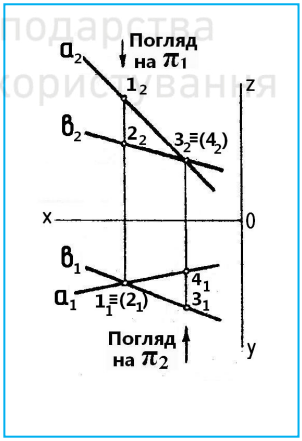


Рис. 2.40. Епюр мимобіжних прямих *а* і *в* (1, 2 і 3, 4 – пари конкуруючих точок)
Fig. 2.40. The epure of skew lines *a* and *в* (1, 2 and 3, 4 are the pairs of the collinear points)

Національний університет
водного господарства

На рис. 2.39 пари точок 1, 2 і 3, 4 є конкуруючими точками. Точки 1 і 2 лежать на одній горизонтально-проекціюючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_1, тому горизонтальні проекції цих точок збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). Точки 3 і 4 лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_2, тому фронтальні проекції цих точок збігаються ($3_2 \equiv 4_2$).

Отже, якщо проекції обох точок збігаються, то це означає, що ці точки є конкуруючими і лежать на одній проекціюючій прямій.

З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проекцій буде та, у якої проекція, що не збігається з проекцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі *x*, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача.

Видимість елемента фігури на епюрі розв'язується для кожної проекції елемента окремо, а саме для тієї проекції елемента, на якій проекції конкуруючих точок збігаються.

Видимість елементів фігури зводиться до визначення видимості проекцій конкуруючих точок, що збігаються, і належать заданим елементам.

На рис. 2.40 серед

(see Fig. 1.3).

In Fig. 2.39 the point pair 1, 2 and 3, 4 are collinear points. The points 1 and 2 lie on the same horizontal and project line which is perpendicular to the plane π_1, thus, the horizontal projections of these points coincide ($1_1 \equiv 2_1$). The points 3 and 4 lie on the same frontal and project line which is perpendicular to the plane π_2, thus, the frontal projections of these point coincide ($3_2 \equiv 4_2$).

Therefore, if the projections of both points coincide it means that these points are collinear and lie on the same project line.

Having two collinear points, the visible on the plane of projections will be the one whose projection doesn't coincide with the projection of another collinear point, located farther from the axis *x*, i.e. this point will be located closer to the observer.

The visibility of the element on the epure is defined individually for every projection of the element, i.e. for that projection of the element on which the projections of collinear points coincide.

The visibility of the elements amounts to the definition of the visibility of collinear points projections that coincide and belong to the given elements.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

конкуруючих точок 1 і 2 видимою на π_1 є точка 1, фронтальна проекція 1_2 якої розміщена далі від осі *x*, а сама точка 1 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_1 буде точка 2, тому її горизонтальну проекцію 2_1 взяли в дужки. Серед конкуруючих точок 3 і 4 видимою є точка 3, горизонтальна проекція 3_1 якої розміщена далі від осі *x*, а сама точка 3 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_2 буде точка 4, тому її фронтальну проекцію 4_2 взяли в дужки.

In Fig. 2.40 from the collinear points 1 and 2 the visible on π_1 is the point1 whose frontal projection 1_2 is located farther from the axis *x*, and the point1 itself is closer to the observer. The invisible point on π_1 will be the point 2 that is why its horizontal projection 2_1 is written in brackets. Among the collinear points 3 and 4 the visible is the point 3 whose horizontal projection 3_1 is located farther from the axis *x*, and the point 3 itself is situated closer to the observer. The invisible point on π_2 will be the point 4 that is why its frontal projection 4_2 is written in brackets.

На рис. 2.41 показано, як за допомогою конкуруючих точок визначено видимість ребер піраміди ABCS.

Точки 1 і 2 є конкуруючими, що лежать на одній горизонтально-проекціюючій прямій, їх горизонтальні проекції збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). За допомогою цих точок визначено видимість горизонтальних проекцій A_1S_1 і B_1C_1 ребер AS і BC, які є мимобіжними прямими (1 Є AS, 2 Є BC). Горизонтальна проекція 1_1 є видимою, а 2_1 – невидимою, оскільки точка 1_2 розміщена далі від осі *x*, ніж точка 2_2. Точка 1 належить ребру AS, тому горизонтальна проекція A_1S_1 ребра AS буде видимою, а ребра BC – невидимою, оскільки точка 2_1 невидима.

In Fig. 2.41 you can see how to define the visibility of pyramid edges ABCS by means of collinear points.

The points 1 and 2 are collinear points that lie on the same horizontal and project line, their horizontal projections coincide ($1_1 \equiv 2_1$). By means of these points we define the visibility of horizontal projections A_1S_1 and B_1C_1 of the edges AS and BC that are the skew lines (1 Є AS, 2 Є BC). The horizontal projection 1_1 is visible and the projection 2_1 is invisible since the point 1_2 is located farther from the axis *x*, than the point 2_2. The point 1 belongs to the edge AS, that's why the horizontal projection A_1S_1 of the edge AS will be visible and of the edge BC invisible, since the point 2_1 is invisible.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Точки 3 і 4 є також конкуруючими, вони лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, їх фронтальні проекції збігаються ($3_2 \equiv 4_2$). За допомогою цих точок визначено видимість фронтальних проекцій A_2C_2 і B_2S_2 ребер АС і ВС, які є мимобіжними прямими (3 Є BS, 4 Є AC). Фронтальна проекція 3_2 є видимою, а 4_2 – невидимою, оскільки точка 3_1 розміщена далі від осі *x*, ніж точка 4_1. Точка 3 належить ребру BS, тому фронтальна проекція B_2S_2 ребра BS буде видимою, а ребра AC – невидимою, оскільки точка 4_1 невидима.

The points 3 and 4 are collinear, they lie on the same frontal and project line, their frontal projections coincide ($3_2 \equiv 4_2$). By means of these points we define the visibility of the frontal projections A_2C_2 and B_2S_2 of the edges AC and BC, which are skew lines (3 Є BS, 4 Є AC). The frontal projection 3_2 is visible and the projection 4_2 is invisible since the point 3_1 is located farther from the axis *x*, than the point 4_1. The point 3 belongs to the edge BS, that's why the frontal projection B_2S_2 of the edge BS will be visible and of the edge AC invisible since the point 4_1 is invisible.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих

Прямий кут, утворений взаємно перпендикулярними прямими, проекціюється у вигляді прямого кута на ту площину проекцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга не перпендикулярна.

На рис. 2.42 показано наочне зображення прямого кута, утвореного сторонами АВ і ВС, які є відрізками прямих, що перетинаються, причому ВС // π_1, а АВ $\perp \pi_1$. На площині проекцій π_1 побудовано горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ прямого кута

2.5. Projecting of mutually perpendicular lines

The right angle formed by mutually perpendicular lines is projected as the right angle on that plane of projections to which one of the lines (the side of an angle) is parallel, and the other is not perpendicular.

In Fig. 2.42 a visual image of the right angle is shown. It was formed by the sides AB and BC, which are intersecting segments whilst BC // π_1, and AB $\perp \pi_1$. In the plane of projections π_1 a horizontal projection $A_1B_1C_1$ of the right angle ABC is formed, which considering the

Національний університет
водного господарства
та природокористування

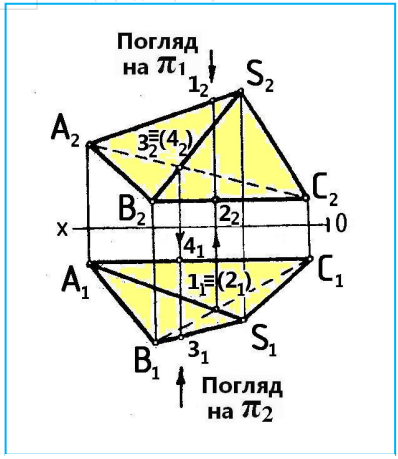


Рис. 2.41. Визначення видимості ребер піраміди ABCS
Fig. 2.41. Defining visibility of ABCS pyramid edges

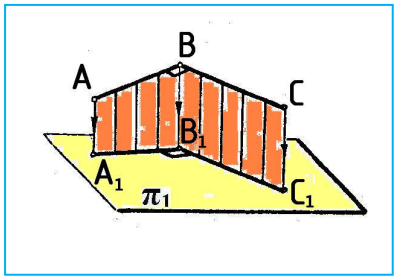


Рис. 2.42. Проекціювання прямого кута
Fig. 2.42. Projecting of the right angle

Національний університет
водного господарства
та природокористування

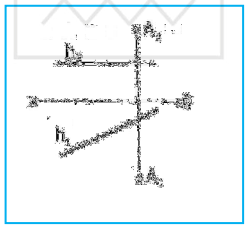


Рис. 2.43. Початкова умова задачі на визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h
Fig. 2.43. The initial condition of the problem for defining the distance from the point A to the horizontal line h

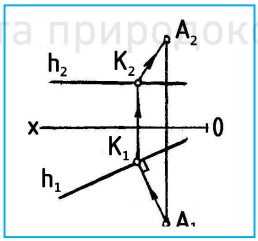


Рис. 2.44. Визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h (1 дія)
Fig. 2.44. Defining of the distance from the point A to the horizontal line h (step 1)

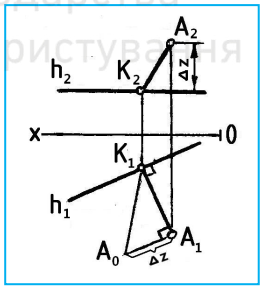


Рис. 2.45. Визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h (2 дія)
Fig. 2.45. Defining the distance from the point A to the horizontal line h (step 2)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

властивість проекціювання прямого кута, також утворює кут 90°. Іншими словами, якщо кут ABC прямий, тобто сторони кута AB і BC є взаємно перпендикулярними прямими, причому сторона BC цього кута паралельна площині π_1, а друга сторона AB не перпендикулярна до площини π_1, то ортогональна проекція $A_1B_1C_1$ прямого кута на площині π_1 складає кут 90° (кут $A_1B_1C_1 = 90°$) або горизонтальні проекції сторін кута будуть взаємно перпендикулярними ($A_1B_1 \perp B_1C_1$).	right angle projecting also forms the angle measured in 90^0. Stated differently, if the angle ABC is right, i.e. the sides of the angle AB and BC are mutually perpendicular lines, whilst the side BC of this angle is parallel to the plane π_1, and the other side AB is not perpendicular to the plane π_1, than the orthogonal projection $A_1B_1C_1$ of the right angle on the plane π_1 forms the angle measured in 90° (the angle $A_1B_1C_1 = 90°$) or horizontal projections of the sides of the angle will be mutually perpendicular ($A_1B_1 \perp B_1C_1$).
Навпаки, якщо ортогональна проекція кута, який утворений двома прямими, що перетинаються, складає кут 90°, а одна сторона кута паралельна до тієї площини проекцій, де розміщена ортогональна проекція кута, а друга сторона кута не перпендикулярна до цієї ж площини проекцій, то в просторі такий кут складає також 90°.	On the contrary, if the orthogonal projection of the angle, which is constructed by two lines that intersect, forms the angle measured in 90°, and one side of an angle is parallel to that plane of projection where the orthogonal projection of the angle is located, whereas the other side of the angle is not perpendicular to the given plane of projections, then in space the measure of such angle is also 90°.
На рис. 2.43-2.45 показано розв'язування задачі на визначення відстані від точки A до горизонтальної прямої h.	In Fig. 2.43-2.45 the solution of the problem for defining the distance from the point A to the horizontal line h is given.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства

Нарисна геометрія. Розділ 3 Площина	**Descriptive geometry. Chapter 3 The plane**
3.1. Задання площини на епюрі	3.1. Determining a plane on the epure
Найчастіше на епюрі площину задають: 1) проекціями двох паралельних прямих (рис. 3.1); 2) проекціями двох прямих, що перетинаються (рис. 3.2); 3) проекціями трикутника – відсіка плоскої фігури (рис. 3.3). Площину позначають малими літерами грецького алфавіту. На рис. 3.1-3.3, крім позначення площини літерою, в дужках можна вказувати спосіб задання площини. Наприклад, запис α (*a* ∥ *b*) розшифровується таким чином: площина α задана двома паралельними прямими *a* і *b* (рис. 3.1). Площина може бути задана слідами площини (рис. 3.4, 3.5). Слід площини – це пряма лінія, по якій площина перетинає площину проекцій. Розрізняють: 1. Горизонтальний слід площини – це лінія перетину площини з горизонтальною площиною проекцій π_1. На рис. 3.4, 3.5 h^0_α – горизонтальний слід площини α (нульова горизонталь площини α, тобто горизонталь, яка знаходиться в площині α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$. 2. Фронтальний слід площини – це лінія перетину площини з	The plane on the epure is often determined by means of: 1) projections of two parallel lines (Fig. 3.1); 2) projections of two straight lines that intersect (Fig. 3.2); 3) projections of a triangle, i.e. a segment of a plane figure (Fig. 3.3). The plane is marked by low-case Greek letters. In Fig. 3.1- 3.3, except marking the plane by letter, in the brackets you can also indicate the method of determining the plane. For example, the formula α (*a* ∥ *b*) can be defined as follows: the plane α is determined by two parallel lines *a* and *b* (Fig. 3.1). The plane can be determined by the traces of a plane. (Fig. 3.4, 3.5). The trace of a plane is a straight line on which the plane intersects the plane of projections. There are: 1. Horizontal trace of a plane. It is a line of intersection between the plane and horizontal plane of projection π_1. In Fig. 3.4, 3.5 h^0_α we can see the horizontal trace of a plane α (the initial horizontal level of the plane α, i.e. the horizontal line which is located in the plane α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$. 2. Frontal trace of a plane. It is a line of intersection between the plane and

Національний університет
водного господарства
та природокористування

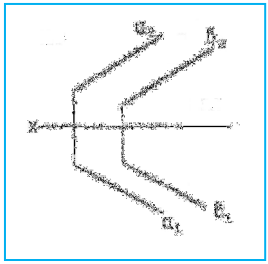


Рис. 3.1. Задання площини двома паралельними прямими
Fig. 3.1. Determining the plane by two parallel lines

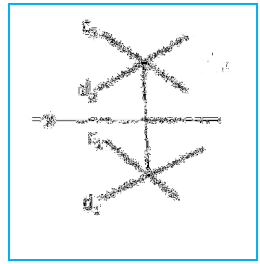


Рис. 3.2. Задання площини двома прямими, що перетинаються
Fig. 3.2. Determining the plane by two intersecting lines

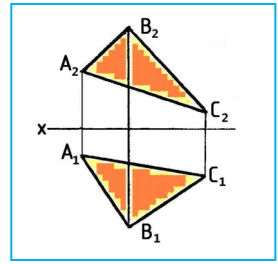


Рис. 3.3. Задання площини трикутником
Fig. 3.3. Determining the plane by triangle

Національний університет
водного господарства
та природокористування

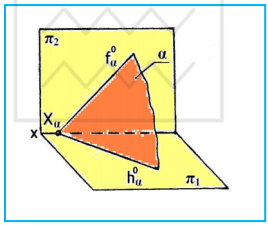


Рис. 3.4. Наочне зображення площини α, що задана слідами: h^0_α і f^0_α – горизонтальний і фронтальний слід площини, X_α – точка сходу слідів
Fig. 3.4. A visual image of the plane α, determined by the traces: h^0_α and f^0_α, horizontal and frontal traces of a plane, X_α is the point of trace intersection

Рис. 3.5. Епюр площини α, що задана слідами: h^0_α і f^0_α – горизонтальний і фронтальний слід площини, X_α – точка сходу слідів
Fig. 3.5. The epure of the plane α, determined by the traces: h^0_α and f^0_α, horizontal and frontal traces of the plane, X_α is the point of trace intersection

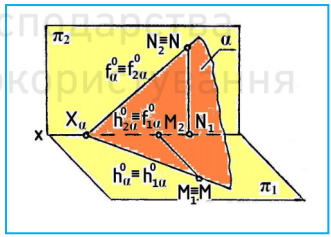


Рис. 3.6. Позначення на наочному зображенні проекцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)
Fig. 3.6. Notation on the visual image of projections for traces of the plane α and points M, N, that belong to the traces (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)

Національний університет водного господарства та природокористування

фронтальною площиною проекцій π_2.

На рис. 3.4. 3.5 f_α^0 – фронтальний слід площини α (нульова фронталь площини α), $f_\alpha^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. Точка сходу слідів – точка, в якій перетинаються сліди площини, розміщена на осі проекцій.

На рис. 3.4, 3.5 X_α – точка сходу слідів, $X_\alpha = h^0{}_\alpha \cap f_\alpha^0$.

На наочному зображенні (рис. 3.6) і епюрі (рис. 3.7) показано розміщення проекцій слідів площини. Крім того, зображено проекції точок M і N, що належать слідам площини (M $\in h^0{}_\alpha$, N $\in f_\alpha^0$).

Епюр площини, зображений на рис. 3.7 з позначенням всіх проекцій слідів, на практиці не застосовують, а користуються для задання площини на епюрі зображенням, показаним на рис. 3.5, де позначені тільки самі сліди і немає позначень їх проекцій. Проте, для розв'язування багатьох задач треба пам'ятати, де саме розміщені проекції слідів площини, про що буде нагадувати епюр, зображений на рис. 3.7.

На наочному зображенні (рис. 3.8) і епюрі (рис. 3.9) показано побудову слідів площини β, що задана ΔABC.

the frontal plane of projections π_2.

In Fig. 3.4. 3.5 f_α^0 we can see the frontal trace of a plane α (the initial frontal level of the plane α), $f_\alpha^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. The point of trace intersection is the point where traces of the plane traverse, it is located on the axis of projections.

In Fig. 3.4, 3.5 X_α the point of traces intersection is shown, $X_\alpha = h^0{}_\alpha \cap f_\alpha^0$.

On the visual image (Fig. 3.6) and the epure (Fig. 3.7) the location of projection of the traces of a plane is shown. Moreover, the projections of the points M and N are drawn, they belong to the traces of a plane (M $\in h^0{}_\alpha$, N $\in f_\alpha^0$).

The epure of the plane shown in Fig. 3.7, all notations for projections of the traces being given, is not used in practice. Instead, it is used for determining a plane on the epure by a drawing shown in Fig. 3.5 where only the traces are marked but not their projections. However, for multiple problems-solving we should remember where exactly the projections of the traces of a plane are located. The epure given in Fig. 3.7 will show this location.

On the visual image (Fig. 3.8) and the epure (Fig. 3.9) the construction of the traces of a plane β, which is determined ΔABC is shown.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

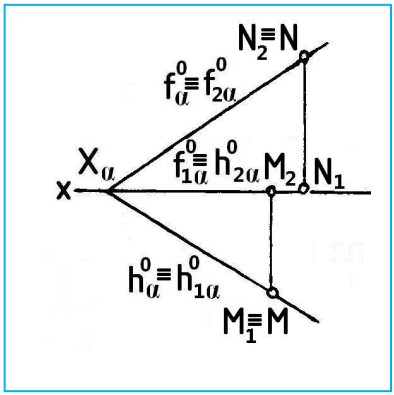


Рис. 3.7. Позначення на епюрі проекцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)
Fig. 3.7. Notation of projections for the traces of the plane α and points M, N, that belong to the traces (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α) on the epure

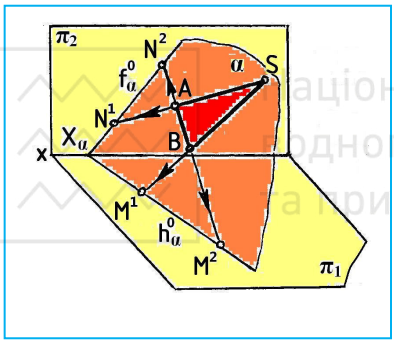


Рис. 3.8. Побудова на наочному зображенні слідів площини α, що задана трикутником ABC
Fig. 3.8. The construction of the traces of the plane α, that is determined by triangle ABC on the visual image

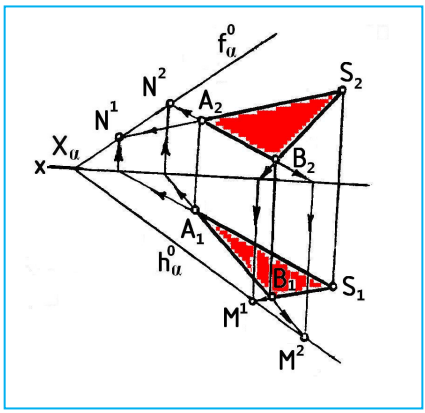


Рис. 3.9. Побудова на епюрі слідів площини α, що задана трикутником ABC
Fig. 3.9. The construction of the traces of the plane α, that is determined by triangle ABC on the epure

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.2 Площини загального та часткового положення	3.2. Planes of general and partial position
Площини, як і прямі лінії, класифікують залежно від їх розміщення відносно площин проекцій на площини загального та часткового положення.	Planes as well as straight lines are classified according to their location in the planes of projections. There are planes of general and partial position.
3.2.1. Площина загального положення – це площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій.	3.2.1. Plane of general position is the plane which is neither parallel nor perpendicular to any of the planes of projections.
На епюрі у площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій. На рис. 3.5 показано епюр саме площини загального положення, оскільки $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ не паралельні і не перпендикулярні до осі x. Це характерна графічна ознака площини загального положення, що задана слідами.	On the epure the plane of general position has the traces that are neither parallel nor perpendicular to the axis of projection. In Fig. 3.5 we can see the epure of the plane of general position, since $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ are neither parallel nor perpendicular to the axis x. This is a graphical attribute of the plane of general position determined by the traces.
Площина загального положення не перпендикулярна до площин проекцій, тому при заданні її іншими елементами, наприклад, трикутником, ці елементи на жодну з площин проекцій не проекціюються в одну спільну пряму лінію. На рис. 3.1-3.3 задано епюри площин загального положення.	The plane of general position is not perpendicular to the planes of projections that is why when projecting it by means of other elements, such as triangle, these elements are not projected on either part of projections as one common straight line. In Fig. 3.1-3.3 the epures of the planes of general position are given.
Площини часткового положення поділяються на проекціюючі та площини рівня. Проекціюючі площини перпендикулярні до однієї з площин проекцій, а площини рівня – паралельні.	The planes of partial position are divided into project planes and level planes. Project planes are perpendicular to one of the planes of projection and level planes are parallel.
3.2.2. Площина, яка перпендикулярна до горизон-	3.2.2. The plane which is perpendicular to horizontal plane of

Національний університет
водного господарства
та природокористування

тальної площини проекцій, називається горизонтально-проекціюючою площиною.

На рис. 3.10 дано наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α. Вона перпендикулярна до площини π_1 і проекціюється на цю площину прямою лінією α_1`, тобто α_1 – проекція площини α на площину π_1, до якої площина α перпендикулярна. Лінію α_1 називають слідом-проекцією площини α.

На рис. 3.11 наведено епюр горизонтально-проекціюючої площини α у вигляді тільки однієї прямої лінії α_1. І таке зображення площини повністю визначає положення площини в просторі, оскільки на епюрі можна визначити сліди площини – горизонтальний і фронтальний (рис. 3.12, 3.13).

В горизонтально-проекціюючій площині α (рис. 3.14) розмістимо трикутник ABC. Оскільки площина α перпендикулярна до π_1, горизонтальна проекція ΔABC буде проекціюватися на слід-проекцію α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). На рис. 3.15 показано епюр горизонтально-проекціюючої площини, якій належить ΔABC. Отже, якщо проекція трикутника збігається зі слідом-проекцією площини, то сам трикутник належить цій площині (на рис. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$).

Дамо означення сліду-

projection is called horizontal and project plane.

In Fig. 3.10 a visual image of horizontal and project plane α is given. It is perpendicular to the plane π_1 and is projected on the plane as a straight line α_1, i.e. α_1 is a projection of the plane α on the plane π_1, to which the plane α is perpendicular. The line α_1 is called trace-projection of the plane α.

In Fig. 3.11 the epure of horizontal and project plane α is given in the form of only one straight line α_1. Such drawing of the plane fully determines the location of the plane in space since the traces of the plane (horizontal and frontal) can be determined in the epure (Fig. 3.12, 3.13).

On the horizontal and project plane α (Fig. 3.14) we shall locate the triangle ABC. Since the plane α is perpendicular to π_1, the horizontal projection ΔABC will be projected on the trace-projection α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). In Fig. 3.15 we can see the epure of horizontal and project plane to which ΔABC belongs.
Thus, if the projection of triangle coincides the trace-projection of the plane then the triangle itself belongs to this plane (in Fig. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$).

Let's define trace-projection

Національний університет
водного господарства
та природокористування

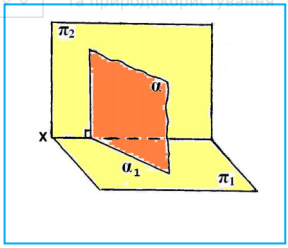


Рис. 3.10. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α (α1 – слід-проекція площини α)

Fig. 3.10. A visual image of horizontal and project plane α (α1 is the trace-projection of the plane α)

Рис. 3.11. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α (α1 – слід-проекція площини α)

Fig. 3.11. The epure of horizontal and project plane α (α1 is the trace-projection of the plane α)

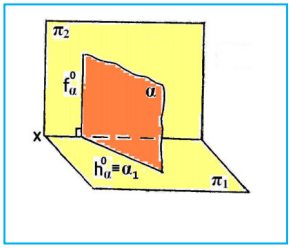


Рис. 3.12. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Fig. 3.12. A visual image of horizontal and project plane α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

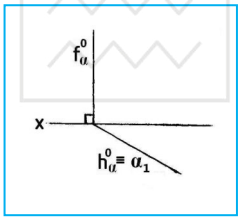


Рис. 3.13. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Fig. 3.13. The epure of horizontal and project plane α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

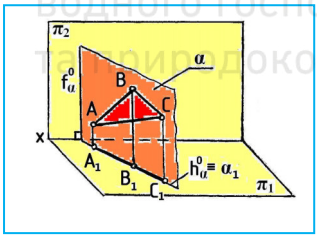


Рис. 3.14. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Fig. 3.14. A visual image of horizontal and project plane α with ΔABC being located in it ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

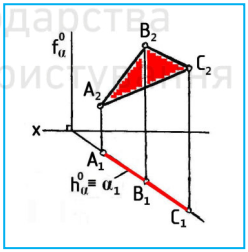


Рис. 3.15. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Fig. 3.15. The epure of horizontal and project plane α with ΔABC being located in it ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекції:

Слід-проекція – це лінія перетину площини з площиною проекції, до якої ця площина перпендикулярна.

Всі площини часткового положення мають слід-проекцію, оскільки вони перпендикулярні хоча б до однієї з площин проекцій.

Слід-проекція має таку збірну властивість: проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в заданій площині часткового положення, проекціюються саме на слід-проекцію (див. рис. 3.15).

На рис. 3.16 дано епюр горизонтально-проекціюючої площини, що задана ΔABC, оскільки горизонтальна проекція трикутника – пряма лінія. Ця пряма лінія є слідом-проекцією заданої площини, вона лежить в площині π_1, і по ній площина перетинає площину π_1, до якої перпендикулярна.

На рис. 3.17 через точку А проведено горизонтально-проекціюючу площину α, тобто точка А стала належати площині α. Можна сказати по-іншому: якщо горизонтальна проекція A_1 збігається з α_1, то це означає, що сама точка А належить площині α.

Горизонтально-проекціююча площина має такі властивості:

1. При заданні площини слідами горизонтальний слід h_α^0 площини є слідом-проекцією цієї

Trace-projection is the line where the plane and plane of projection to which this plane is perpendicular intersect.

All planes of partial position have the trace-projection since they are perpendicular at least to one of the planes of projection.

The trace-projection possesses a common attribute which can be described as: the projections of points, straight lines, plane figures located in a given plane of partial position, are projected on the trace-projection. (see Fig. 3.15).

In Fig. 3.16 the epure of horizontal and project plane, given as ΔABC is shown, since the horizontal projection of triangle is the straight line. This straight line is the trace-projection of a determined plane, it lies in the plane π_1, to which it is perpendicular.

In Fig. 3.17 through the point A the horizontal and project plane α is drawn, i.e. the point A now belongs to the plane α. In other words, if the horizontal projection A_1 coincides α_1 then it means that the point A belongs to the plane α.

Horizontal and project plane has the following attributes:

1. When determining the plane by traces the horizontal trace h_α^0 of the plane is the trace-projection of this

Національний університет
водного господарства

площини, а фронтальний слід f_α^0 перпендикулярний до осі x.	plane, and the frontal trace f_α^0 is perpendicular to the axis x.
2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_1 проекціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини.	2. When determining the plane by other elements (triangle, two parallel or straight lines that intersect) these elements are projected on the plane π_1 in the form of one straight line which is the trace-projection of the plane.
3. Горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтально-проекціюючій площині, проекціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією горизонтально-проекціюючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або горизонтально-проекціююча площина проходить через дані фігури.	3. Horizontal projections of the points, straight lines, plane figures that belong to horizontal and project plane are projected on the horizontal trace of the plane which is the trace-projection and vice versa. If horizontal projections of the points, straight lines and plane figures coincide with trace-projection of the horizontal and project plane then these figures either lie in this plane or the horizontal and project plane traverses them.
3.2.3. Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально-проекціюючою площиною.	3.2.3. The plane that is perpendicular to the frontal plane of projection is called frontal and project plane.
На рис. 3.18-3.21 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої площини β, заданої слідами, а на рис. 3.22, 3.23 епюр – фронтально-проекціюючої площини β, заданої трикутником DEF.	In Fig. 3.18-3.21 a visual image and the epure of the frontal and project plane β is shown, it is determined by the traces. In Fig. 3.22, 3.23 the epure of the frontal and project plane β is shown, it is determined by the triangle DEF.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

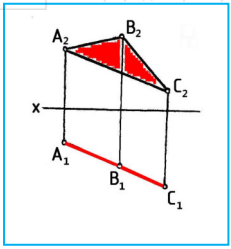


Рис. 3.16. Епюр горизонтально-проекціюючої площини, заданої ΔABC
Fig. 3.16. The epure of horizontal and project plane determined by ΔABC

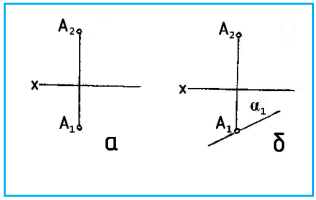


Рис. 3.17. Проведення через точку А горизонтально-проекціюючої площини α (а – початкова умова, б – через точку А проведена площина α)
Fig. 3.17. Drawing the horizontal and project plane α through the point A (а shows the initial condition, б shows the plane α drawn through the point A)

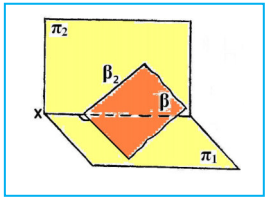


Рис. 3.18. Наочне зображення фронтально-проекціюючої площини β ($β_2$ – слід-проекція площини β)
Fig. 3.18. A visual image of frontal and project plane β ($β_2$ is the trace-projection of the plane β)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

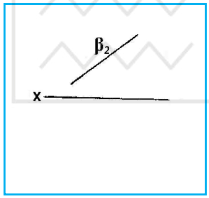


Рис. 3.19. Епюр фронтально-проекціюючої площини β ($β_2$ – слід-проекція площини β)
Fig. 3.19. The epure of the frontal and project plane β ($β_2$ is the trace-projection of the plane β)

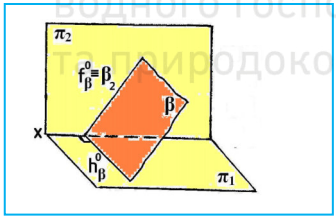


Рис. 3.20. Наочне зображення фронтально-проекціюючої площини β ($f_β^0 ≡ β_2$, $h_β^0 ⊥ x$)
Fig. 3.20. A visual image of the frontal and project plane β ($f_β^0 ≡ β_2$, $h_β^0 ⊥ x$)

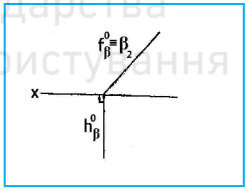


Рис. 3.21. Епюр фронтально-проекціюючої площини β ($f_β^0 ≡ β_2$, $h_β^0 ⊥ x$)
Fig. 3.21. The epure of the frontal and project plane β ($f_β^0 ≡ β_2$, $h_β^0 ⊥ x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

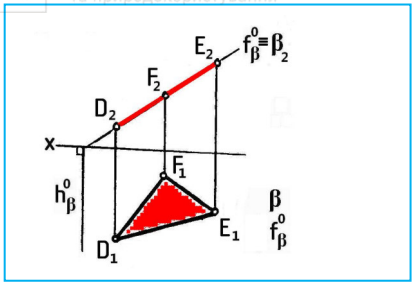


Рис. 3.22. Епюр фронтально-проекціюючої площини β з розміщеним в ній ΔDEF ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$)

Fig. 3.22. The epure of the frontal and project plane β with ΔDEF being located in it ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$)

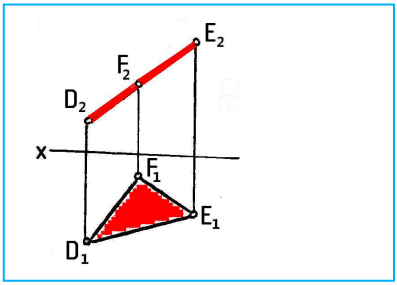


Рис. 3.23. Епюр фронтально-проекціюючої площини β, заданої ΔDEF

Fig. 3.23. The epure of the frontal and project plane β determined by ΔDEF

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Фронтально-проекціююча площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини, а горизонтальний слід перпендикулярний до осі *x*. 2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_2 проекціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини. 3. Фронтальні проекції всіх точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтально-проекціюючій площині, проекціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо	The frontal and project plane has the the following attributes: 1. When determining a plane by the traces, the frontal trace f_β^0 of the plane is the trace-projection of this plane and the horizontal trace h_β^0 is perpendicular to the axis *x*. 2. When determining a plane by other elements (triangle, two parallel or straight lines that intersect) these elements are projected on the plane π_2 in the form of one straight line which is the trace-projection of the plane. 3. Frontal projections of all points, straight lines, plane figures that belong to frontal and project plane are projected on the frontal trace of the plane which is the trace-projection and vice versa. If frontal projections of the points, straight

Національний університет
водного господарства
та природокористування

фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією фронтально-проекціюючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або фронтально-проекціююча площина проходить через дані фігури.	lines, plane figures coincide with the trace-projection of frontal and project plane then the given figures either lie in this plane or the frontal and project plane traverses them.
3.2.4. Площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтальною площиною або горизонтальною площиною рівня.	3.2.4. The plane that is parallel to the horizontal plane of projection is called horizontal plane or horizontal level plane.
На рис. 3.24 дано наочне зображення горизонтальної площини α, а на рис. 3.25, 3.26 – епюр горизонтальної площини α зображений своїм слідом-проекцією α_2, який паралельний до осі *x*.	In Fig. 3.24 a visual image of horizontal plane α is given, and in Fig. 3.25, 3.26 the epure of the horizontal plane α is shown determined by its trace-projection α_2 which is parallel to the axis *x*.
На рис. 3.27 в горизонтальній площині α розміщено ΔABC, який на площину π_2 проекціюється на слід-проекцію α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), а на площину π_1 – в натуральну величину ($A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔABC).	In Fig. 3.27 ΔABC is located in the horizontal plane α, it is projected on the plane π_2, on the trace-projection α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), and on the plane π_1 it is projected in its true size ($A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔABC).
На рис. 3.28 дано епюр горизонтальної площини, що задана ΔABC, оскільки $A_2B_2C_2$ // *x*.	In Fig. 3.28 the epure of the horizontal plane that is determined by ΔABC is given, since $A_2B_2C_2$ // *x*.
Горизонтальна площина має такі властивості:	Horizontal plane has the following attributes:
1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі *x*.	1. When determining the plane by the traces, the frontal trace of the plane is the trace-projection of this plane and it is parallel to the axis *x*.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

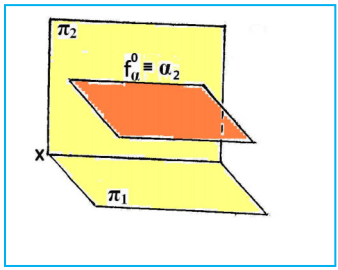


Рис. 3.24. Наочне зображення горизонтальної площини α (α_2 – слід-проекція, $\alpha_2 // x$, f_α^0 – фронтальний слід, горизонтальний слід відсутній)
Fig. 3.24. A visual image of the horizontal plane α (α_2 is the trace-projection, $\alpha_2 // x$, f_α^0 is the frontal trace, the horizontal trace is missing)

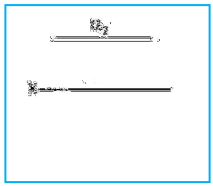


Рис. 3.25. Епюр горизонтальної площини α (α_2 – слід-проекція, $\alpha_2 // x$)
Fig. 3.25. The epure of the horizontal plane α (α_2 is the trace-projection, $\alpha_2 // x$)

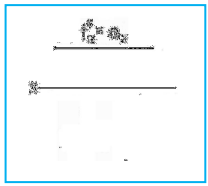


Рис. 3.26. Епюр горизонтальної площини α (α_2 – слід-проекція, $\alpha_2 // x$, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)
Fig. 3.26. The epure of the horizontal plane α (α_2 is the trace-projection, $\alpha_2 // x$, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

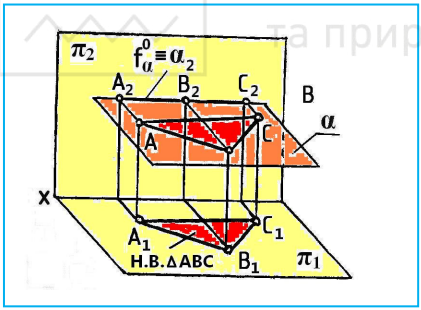


Рис. 3.27. Наочне зображення горизонтальної площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)
Fig. 3.27. A visual image of the horizontal plane α with ΔABC being located in it ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)

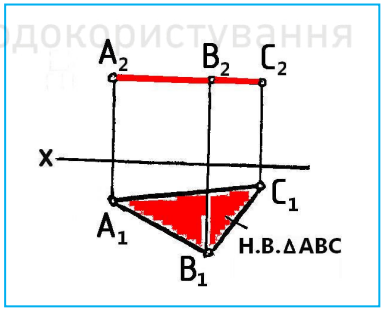


Рис. 3.28. Епюр горизонтальної площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 // x$)
Fig. 3.28. The epure of the horizontal plane α with ΔABC being located in it ($A_2B_2C_2 // x$)

Національний університет
водного господарства

Горизонтальний слід відсутній.	There is no horizontal trace.
2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_2 проекціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і паралельна до осі x, а на площину π_1, до якої площина паралельна, – в свою натуральну величину.	2. When determining the plane by other elements, such as triangle, these elements are projected on the plane π_2 in the form of one common straight line which is the trace-projection and is parallel to the axis x, and on the plane π_1, to which the plane is parallel they are projected in their true size.
3. Фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтальній площині, проекціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією.	3. Frontal projections of the points, straight lines, plane figures that belong to horizontal plane are projected on the frontal trace of the plane which is the trace-projection.
3.2.5. Площина, яка паралельна до фронтальної площини проекцій, називається фронтальною площиною або фронтальною площиною рівня.	3.2.5. The plane that is parallel to the frontal plane of projection is called frontal plane or frontal level plane.
На рис. 3.29 дано наочне зображення фронтальної площини β, а на рис. 3.30, 3.31 епюр фронтальної площини β, зображений своїм слідом-проекцією β_2, який паралельний до осі x.	In Fig. 3.29 a visual image of the frontal plane β is given, and in Fig. 3.30, 3.31 the epure of frontal plane β is given, determined by its trace-projection β_2 which is parallel to the axis x.
На рис. 3.32 у фронтальній площині β розміщено ΔDEF, який на площину π_1 проекціюється на слід-проекцію β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), а на площину π_2 – в натуральну величину ($\Delta D_2E_2F_2$ = Н.В. ΔDEF).	In Fig. 3.32 ΔDEF is located in the frontal plane β, it is projected on the plane π_1, on the trace-projection β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), and on the plane π_2 it is projected in its true size ($D_2E_2F_2$ = Н.В. ΔDEF).
На рис. 3.33 дано епюр фронтальної площини, що задана Δ DEF, оскільки $D_1E_1F_1 // x$.	In Fig. 3.33 the epure of the frontal plane is given, it is determined by ΔDEF since $D_1E_1F_1 // x$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

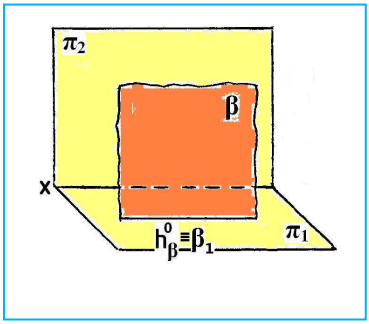


Рис. 3.29. Наочне зображення фронтальної площини β (β_1 – слід-проекція, $\beta_1 // x$, h_β^0 – горизонтальний слід, фронтальний слід відсутній)
Fig. 3.29. A visual image of the frontal plane β (β_1 is the trace-projection, $\beta_1 // x$, h_β^0 is the horizontal trace, the frontal trace is missing)

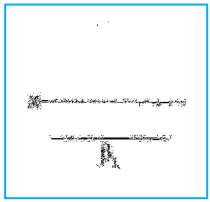


Рис. 3.30. Епюр фронтальної площини β (β_1 – слід-проекція, $\beta_1 // x$)
Fig. 3.30. The epure of the frontal plane β (β_1 is the trace-projection $\beta_1 // x$)

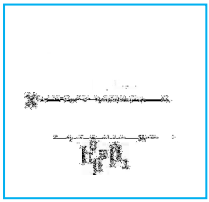


Рис. 3.31. Епюр фронтальної площини β (β_1 – слід-проекція, $\beta_1 // x$, $h_\beta^0 \equiv \beta_1$)
Fig. 3.31. The epure of the frontal plane β (β_1 is the trace-projection, $\beta_1 // x$, $h_\beta^0 \equiv \beta_1$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

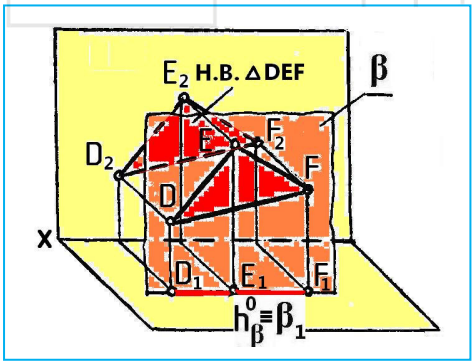


Рис. 3.32. Наочне зображення фронтальної площини β з розміщеним в ній ΔDEF ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)
Fig. 3.32. A visual image of the frontal plane β with ΔDEF being located in it ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)

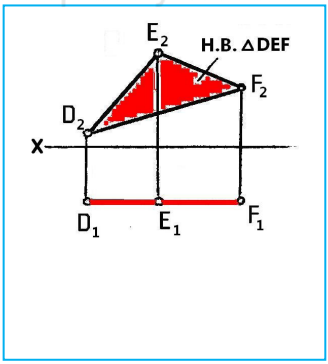


Рис. 3.33. Епюр фронтальної площини β, заданої ΔDEF ($D_1E_1F_1 // x$)
Fig. 3.33. The epure of the frontal plane β determined by ΔDEF ($D_1E_1F_1 // x$)

Національний університет
водного господарства

Фронтальна площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами горизонтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі *x*. Фронтальний слід відсутній. 2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_1 проекціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і яка паралельна осі *x*, а на площину π_2, до якої фронтальна площина паралельна, вона проекціюється в свою натуральну величину. 3. Горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтальній площині, проекціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією.	Frontal plane has the following attributes: 1. When determining the plane by the traces, the horizontal trace of the plane is the trace-projection of this plane and is parallel to the axis *x*. There is no frontal trace. 2. When determining the plane by other elements, such as triangle, these elements are projected on the plane π_1 in the form of one common straight line, which is the trace-projection and is parallel to the axis *x*, and on the plane π_2, to which the frontal plane is parallel it is projected in its true size. 3. Horizontal projections of the points, straight lines, plane figures that belong to the frontal plane are projected on the horizontal trace of the plane, which is the trace-projection.
3.3. Точка і пряма в площині Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини. Пряма лінія належить площині, якщо вона: 1) проходить через дві точки цієї площини або 2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини. На рис. 3.34 дано площину α (AB∩BC). Побудуємо в ній прямі, використовуючи зазна-	3.3. The point and the straight line in the plane The point belongs to the plane if it lies on the straight line of this plane. The straight line belongs to the plane if it: 1) cuts through two points of this plane or 2) cuts through one point and is parallel to the straight line of this plane. In Fig. 3.34 a plane α is given (AB∩BC). Let's construct lines in it, using the following two methods.

Національний університет водного господарства та природокористування

чені два способи.

1 спосіб. Візьмемо дві точки 1 і 2 (рис. 3.35) на прямих АВ і ВС площини α. Пряма 12, що проходить через ці точки, є прямою, що належить площині α. В свою чергу, точка 3, що лежить на прямій 12, буде належати площині α, оскільки пряма 12 належить площині α.

2 спосіб. Через точку С (рис. 3.36) площини α проводимо пряму *l* паралельно до прямої АВ. Пряма *l* належить площині α і точка 4, , яка лежить на ній, також буде належати площині α.

Задача. Побудувати відсутню на епюрі горизонтальну проекцію D_1 точки D, що належить площині α(ΔABC), рис. 3.37.

Оскільки через точку D не проходить будь-яка пряма площини α, то для розв'язання задачі потрібно через цю точку провести пряму, що буде належати площині, заданій трикутником.

На рис. 3.38, а, б показано розв'язування задачі 1 способом.

Якщо площина задана слідами, то принципової різниці в проведенні прямої, що лежить в цій площині, або у визначенні точки, яка належить площині, немає, оскільки задання площини слідами це не що інше, як задання площини двома

1st method. Let's take two points 1 2 (Fig. 3.35) on the lines AB and BC of the plane α. The line 12, that cuts throught these points, is the line that belongs to the plane α. The point 3 which, in its turn, lies on the straight line 12, will belong to the plane α, since the line 12 belongs to the plane α.

2nd method. Draw a line *l* parallel to the line AB through the point C (Fig. 3.36) The line *l* belongs to the plane α and the point 4, which lies on it, also belongs to the plane α.

Problem. Build the missing on the epure horizontal projection D_1 of the point D, which belongs to the plane α(ΔABC), Fig. 3.37.

Since no line of the plane α crosses the point D, then, to solve the task, we need to draw a line through this point. The line will belong to the plane determined by triangle.

In Fig. 3.38,а,б the solution of the problem by the 1st method is given.

If the plane is determined by the traces, then there is no significant difference in drawing the line that lies in this plane or in defining the point that belongs to the plane, since determining the plane by the traces is nothing else but determining the plane by two intersecting lines. Their

Національний університет
водного господарства
та природокористування

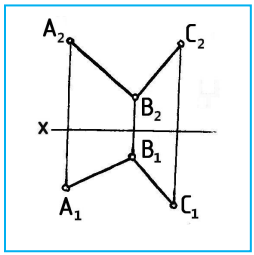


Рис. 3.34. Епюр площини α (AB∩BC) – початкова умова задачі
Fig. 3.34. The epure of the plane α (AB∩BC) is the initial condition of the problem

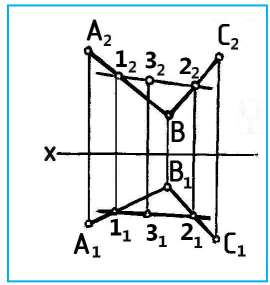


Рис. 3.35. Епюр площини α (AB∩BC), якій належить пряма 12 і точка 3
Fig. 3.35. The epure of the plane α (AB∩BC) to which the line 12 and the point 3 belong

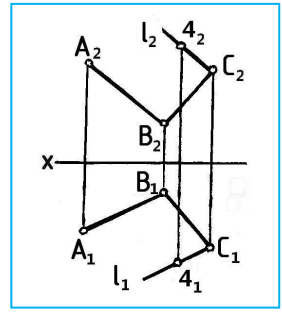


Рис. 3.36. Епюр площини α (AB∩BC), якій належить пряма *l* і точка 4
Fig. 3.36. The epure of the plane α (AB∩BC) to which the line ***l*** and the point 4 belong

Національний університет
водного господарства
та природокористування

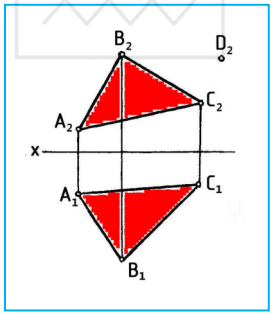


Рис. 3.37. Епюр площини α(ΔABC) – початкова умова задачі
Fig. 3.37. The epure of the plane α (ΔABC) is the initial condition of the problem

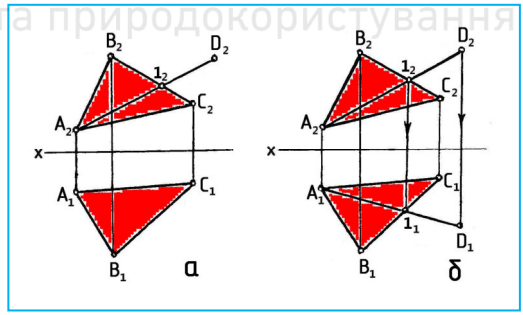


Рис. 3.38. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.37: а – 1 дія, б – 2 дія
Fig. 3.38. Solution of the problem with the initial condition in Fig. 3.37: а – step 1, б – step 2

Національний університет водного господарства та природокористування

прямими, що перетинаються, точка перетину яких лежить на осі проекцій.

Таким чином, у разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо:

1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини або

2) пряма паралельна одному із слідів площини і має спільну точку з іншим слідом.

На рис. 3.39 дано наочне зображення, а на рис. 3.40 – епюр площини α, що задана слідами, де пряма MN за 1 способом належить площині α, оскільки дві її точки M і N лежать відповідно на слідах h_α^0 і f_α^0 площини α.

Пряма h_α^1 за 2 способом належить площині α, оскільки має спільну точку N^1 з фронтальним слідом f_α^0 і паралельна до іншого – горизонтального сліду h_α^0 площини α. Пряма h_α^1 паралельна до горизонтальної площини проекцій π_1 і є горизонтальною прямою площини α.

Задача. Побудувати відсутню фронтальну проекцію K_2 точки K, що належить площині α, заданої слідами, якщо відома горизонтальна проекція K_1 точки K (рис. 3.41).

Розв'язування 1 способом показано на рис. 3.42.

point of intersection lies on the axis of projection.

Therefore, when determining the plane by the traces, the straight line belongs to the plane if:

1) the traces of the line (i.e. its two points) belong to analogous traces of the plane or

2) the line is parallel to one of the traces of the plane and has a common point with another trace.

In Fig. 3.39 a visual image is given and in Fig. 3.40 the epure of the plane α is given. It is determined by the traces, where the line MN by the 1st method belongs to the plane α, since its two points M and N lie on the traces h_α^0 and f_α^0 of the plane α.

The line h_α^1 by the 2nd method belongs to the plane α, since it has a common point N^1 with the frontal trace f_α^0 and it is parallel to the horizontal trace h_α^0 of the plane α. The line h_α^1 is parallel to the horizontal plane of projection π_1 and is a horizontal line of the plane α.

Problem. Build the missing frontal projection K_2 of the point K, that belongs to the plane α, determined by the traces if the horizontal projection K_1 of the point K is given (Fig. 3.41).

Solution by the 1st method is given in Fig. 3.42.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

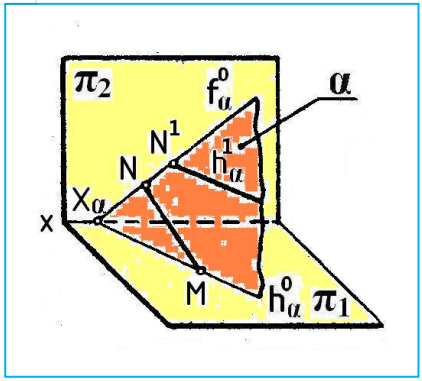


Рис. 3.39. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, якій належить пряма l і пряма h_α^1
Fig. 3.39. A visual image of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ to which the line l and the line h_α^1 belong

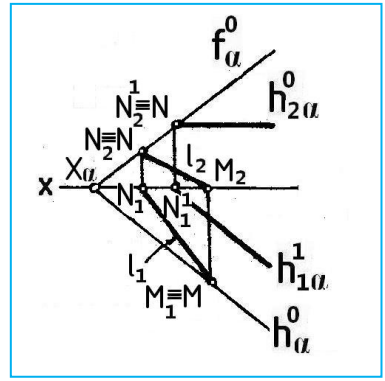


Рис. 3.40. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, якій належить пряма l і пряма h_α^1
Fig. 3.40. The epure of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ to which the line l and the line h_α^1 belong

Національний університет
водного господарства
та природокористування

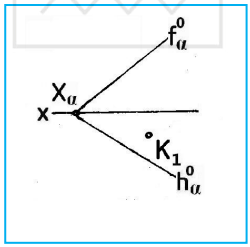


Рис. 3.41. Початкова умова задачі
Fig. 3.41. The initial condition of the problem

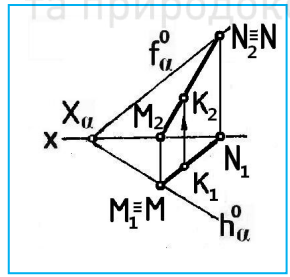


Рис. 3.42. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 1 способом
Fig. 3.42. Solution of the problem with the initial condition in Fig. 3.41 by the 1st method

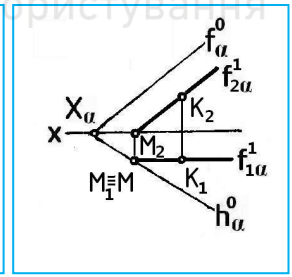


Рис. 3.43. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 2 способом
Fig. 3.43. Solution of the problem with the initial condition in Fig. 3.41 by the 2nd method

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування 2 способом показано на рис. 3.43.

Якщо проекціююча площина або площина рівня задана своїм слідом-проекцією, то цим площинам буде належати будь-яка точка і пряма лінія, відповідні проекції яких збігаються зі слідом-проекцією проекціюючої або площини рівня.

На рис. 3.44 точка А належить фронтально-проекціюючій площині β, оскільки її фронтальна проекція A_2 збігається зі слідом-проекцією β_2 площини β. На рис. 3.45 пряма b належить горизонтально-проекціюючій площині α, тому що її горизонтальна проекція b_1 збігається зі слідом-проекцією α_1 площини α. На рис. 3.46 пряма h_ω належить горизонтальній площині рівня ω, оскільки її фронтальна проекція $h_{2\omega}$ збігається зі слідом-проекцією ω_2 площини ω. Пряма h_ω є горизонтальною прямою, що належить площині ω.

3.4. Головні лінії площини

Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого схилу площини.

Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні одній з площин проекцій. Це горизонталі та фронталі площини.

Solution by the 2nd method if given in Fig. 3.43.

If the project plane or the level plane is determined by its trace-projection, then any point or straight line whose projections coincide with the trace-projection of the project or the level plane will belong to these planes.

In Fig. 3.44 the point A belongs to the frontal and project plane β, since its frontal projection A_2 coincides with the trace-projection β_2 of the plane β. In Fig. 3.45 the line b belongs to the horizontal and project plane α, because its horizontal projection b_1 coincides with the trace-projection α_1 of the plane α. In Fig. 3.46 the line h_ω belongs to the horizontal level plane принадлежит ω, since its frontal projection $h_{2\omega}$ coincides with the trace-projection ω_2 of the plane ω. The line h_ω is a horizontal line that belongs to the plane ω.

3.4. The main lines of the plane

The main lines of the plane are the level lines and the highest slope line of the plane.

The level lines of the plane are the lines that lie in the plane and are parallel to one of the planes of projection. These are horizontals and frontals of the plane.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

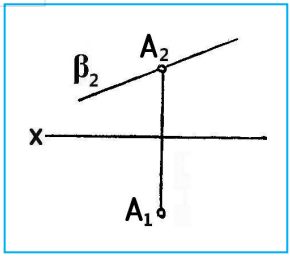


Рис. 3.44. Епюр фронтально-проекціюючої площини β, якій належить точка А
Fig. 3.44. The epure of the frontal and project plane β to which the point A belongs

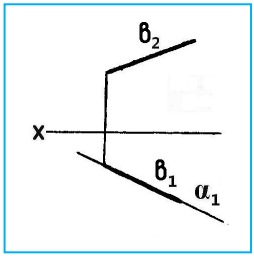


Рис. 3.45. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α, якій належить пряма в
Fig. 3.45. The epure of the horizontal and project plane α to which the line в belongs

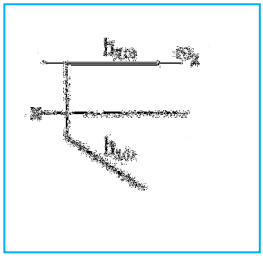


Рис. 3.46. Епюр горизонтальної площини ω, якій належить пряма h_ω
Fig. 3.46. The epure of the horizontal plane ω to which the line h_ω belongs

Національний університет
водного господарства
та природокористування

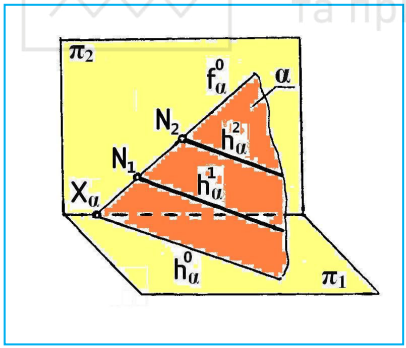


Рис. 3.47. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_α^1 і h_α^2 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$)
Fig. 3.47. A visual image of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, horizontal lines h_α^1 and h_α^2 being drawn in it ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$)

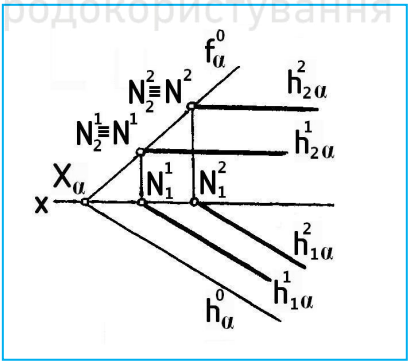


Рис. 3.48. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_α^1 і h_α^2
Fig. 3.48. The epure of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, horizontal lines h_α^1 and h_α^2 being drawn in it

Національний університет
водного господарства

3.4.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проекцій π_1.

На рис. 3.47 дано наочне зображення, а на рис. 3.48 – епюр площини α, що задана слідами і в якій проведені горизонталі h_α^1 і h_α^2. Вони належать площині, оскільки мають спільні точки N^1, N^2 з фронтальним слідом f_α^0 площини і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 (див. рис. 3.39, 3.40). Прямі h_α^1 і h_α^2 також паралельні до площини π_1, тому що паралельні до горизонтального сліду h_α^0, який лежить в площині π_1.

Таким чином, горизонталі площини мають такі властивості:

1. Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини $h_{0\alpha}$ ($h_{1\alpha} // h_{2\alpha} // h_{0\alpha}$).

2. Мають спільні точки з фронтальним слідом f_α^0 (точки N^1, N^2) і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 площини.

На рис. 3.50 за допомогою горизонтальної прямої h_α побудовано відсутню горизонтальну проекцію точки К (див. рис. 3.49), причому спочатку проведено фронтальну проекцію $h_{2\alpha}$ горизонталі h_α паралельно до осі x, а потім і горизонтальну $h_{1\alpha}$ паралельно до h_α^0.

3.4.1. Horizontals of the plane are the lines that belong to the plane and are parallel to the horizontal plane of projections π_1.

In Fig. 3.47 a visual image is given and in Fig. 3.48 the epure of the plane α determined by the traces and graphed with the horizontals h_α^1 and h_α^2 is drawn. They belong to the plane, since they have a common points N^1, N^2 with the frontal trace f_α^0 of the plane and are parallel to the horizontal trace h_α^0 (see Fig. 3.39, 3.40). The lines h_α^1 and h_α^2 are also parallel to the plane π_1, because they are parallel to the horizontal trace h_α^0, that lies in the plane π_1.

Therefore, the horizontals of the plane have the following attributes:

1. All horizontals of the plane are parallel to each other and to the horizontal trace of the plane h_α^0 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$).

2. They have common points with the frontal trace f_α^0 (the points N^1, N^2) and are parallel to the horizontal trace h_α^0 of the plane.

In Fig. 3.50 by means of horizontal line h_α the missing horizontal projection of the point K is constructed (see Fig. 3.49). At first a frontal projection $h_{2\alpha}$ of the horizontal h_α is drawn, it is parallel to the axis x, and then, a horizontal projection $h_{1\alpha}$ is constructed, it is parallel to h_α^0.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

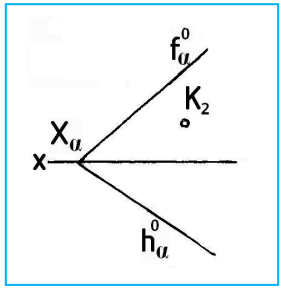


Рис. 3.49. Початкова умова задачі
Fig. 3.49. The initial condition of the problem

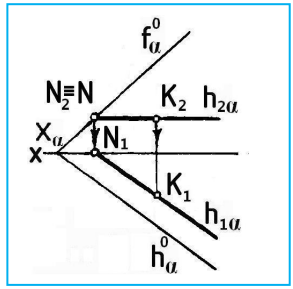


Рис. 3.50. Розв'язування задачі (рис. 3.49) за допомогою горизонтальної прямої h_α
Fig. 3.50. Solution of the problem (Fig. 3.49) by means of the horizontal line h_α

При побудові на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проекцію паралельно до осі проекцій *x*. На рис. 3.51 в площині ΔABC спочатку проведено фронтальну проекцію $h_{2\alpha}$, а потім горизонтальну $h_{1\alpha}$ горизонталі h_α.	When constructing a horizontal of the plane on the epure, at first, its frontal projection is drawn. It should be parallel to the axis *x*. In Fig. 3.51 in the plane ΔABC a frontal projection $h_{2\alpha}$ is drawn first and then a horizontal projection $h_{1\alpha}$ of the horizontal h_α.
3.4.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проекцій π_2.	3.4.2. Frontals of the plane are the lines that belong to the plane and are parallel to the frontal plane of projections π_2.
На рис. 3.52 дано наочне зображення, а на рис. 3.53 – епюр площини β, що задана слідами, і в якій проведені фронталі площини f_β^1 і f_β^2.	In Fig. 3.52 a visual image is given and in Fig. 3.53 the epure of the plane β determined by the traces and graphed with the frontals of the plane f_β^1 and f_β^2 is drawn.
Фронталі площини мають такі властивості:	The frontals of the plane have the following attributes:
1. Всі фронталі площини паралельні між собою і до	1. All frontals of the plane are parallel to each other and to

Національний університет
водного господарства
та природокористування

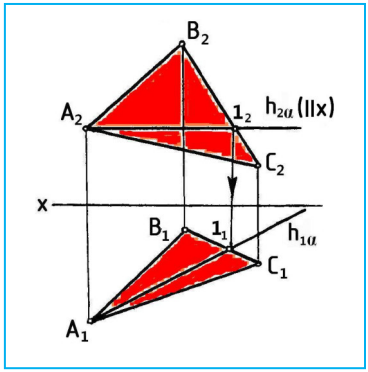


Рис. 3.51. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої h_α
Fig. 3.51. Drawing of the horizontal line h_α in the plane ΔABC h_α

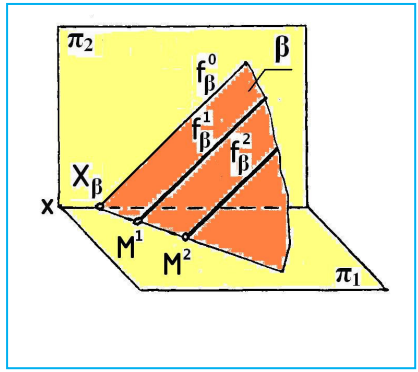


Рис. 3.52. Наочне зображення площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2 $(f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0)$
Fig. 3.52. A visual image of the plane $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, frontal lines f_β^1 and f_β^2 being drawn in it $(f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0)$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

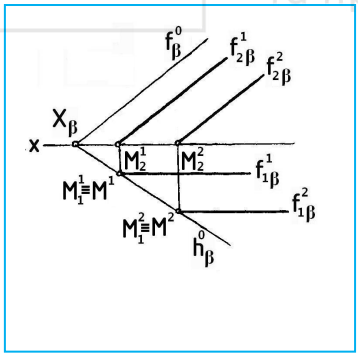


Рис. 3.53. Епюр площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2
Fig. 3.53. The epure of the plane $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, frontal lines f_β^1 and f_β^2 being drawn in it

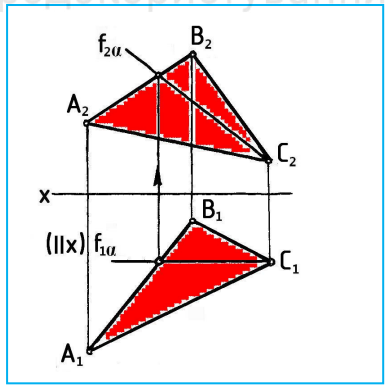


Рис. 3.54. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої f_α
Fig. 3.54. Drawing of the horizontal line f_α in the plane ΔABC

Національний університет
водного господарства

фронтального сліду площини $f_{0\beta}$ ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_{0\beta}$).

2. Мають спільні точки з горизонтальним слідом h_β^0 (точки M^1, M^2) і паралельні до фронтального сліду f_β^0 площини.

На рис. 3.43 за допомогою фронтальної прямої f_α^1 побудовано відсутню фронтальну проекцію K_2 точки К (рис. 3.41).

На рис. 3.54 в площині ΔАВС проведено фронталь f_α, причому спочатку проведено її горизонтальну проекцію $f_{1\alpha}$ паралельно осі x, а потім фронтальну проекцію $f_{2\alpha}$.

3.4.3. Лінія найбільшого схилу площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут її нахилу до площини π_1 визначає кут нахилу самої площини до тієї ж площини π_1.

На рис. 3.55 пряма MN – лінія найбільшого схилу площини $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$, оскільки $MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$.

Побудову лінії найбільшого схилу площини починають з її горизонтальної проекції, яку проводять перпендикулярно (під прямими кутом) до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду.

На рис. 3.56 побудовано епюр прямої MN – лінії найбільшого схилу, оскільки $M_1N_1 \perp h_\alpha^0$, тобто

the frontal trace of the plane $f_{0\beta}$ ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_{0\beta}$).

2. They have common points with the horizontal trace h_β^0 (points M^1, M^2) and are parallel to the frontal trace f_β^0 of the plane.

In Fig. 3.43 by means of the frontal line f_α^1 the missing frontal projection K_2 of the point K is constructed (Fig. 3.41).

In Fig. 3.54 in the plane ΔABC the frontal f_α is drawn, whilst at first its horizontal projection $f_{1\alpha}$ has been drawn parallel to the axis x, and then the frontal projection $f_{2\alpha}$.

3.4.3. The highest slope line is the line of the plane which is perpendicular to the horizontals of the plane or to the horizontal trace of the plane. Its angle slope to the plane π_1 defines the angle slope of the plane itself to the same plane π_1.

In Fig. 3.55 the line MN is the highest slope line of the plane α ($h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha}$), since $MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$.

The construction of the highest slope line begins from its horizontal projection which is drawn perpendicularly (at right angle) to the horizontal projection of the horizontal of the plane or to its horizontal trace.

In Fig. 3.56 the epure of the straight line MN is drawn, the highest slope line, since $M_1N_1 \perp h_\alpha^0$, then

Національний університет
водного господарства
та природокористування

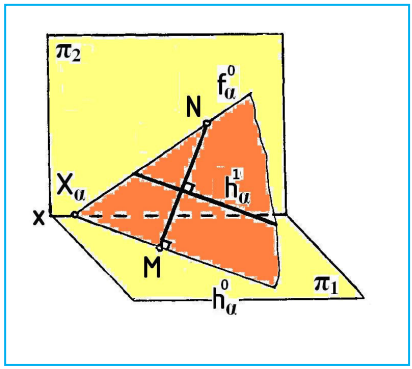


Рис. 3.55. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN ($MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$)

Fig. 3.55. A visual image of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, the highest slope line MN being located in it ($MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$)

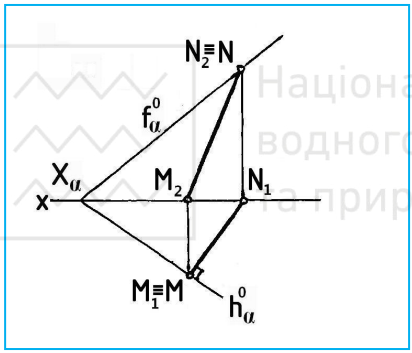


Рис. 3.56. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN ($M_1N_1 \perp h_\alpha^0$)

Fig. 3.56. The epure of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, the highest slope line MN being located in it ($M_1N_1 \perp h_\alpha^0$)

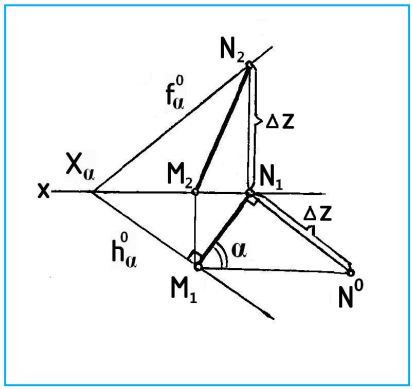


Рис. 3.57. Визначення кута нахилу α площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ до горизонтальної площини проекцій π_1 (MN – лінія найбільшого схилу площини)

Fig. 3.57. Defining the the angle slope α of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ to the horizontal plane of projections π_1 (MN is the highest slope line)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

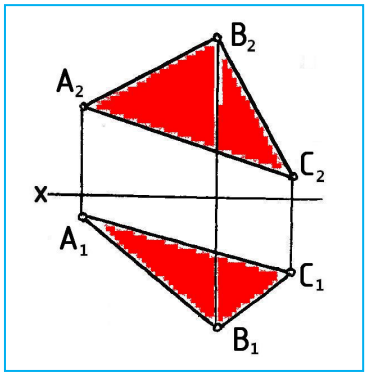


Рис. 3.58. Початкова умова задачі на визначення кута нахилу α площини β(ΔABC) до горизонтальної площини проекцій π_1

Fig. 3.58. The initial condition of the problem for defining the angle slope α of the plane β(ΔABC) to the horizontal plane of projections π_1

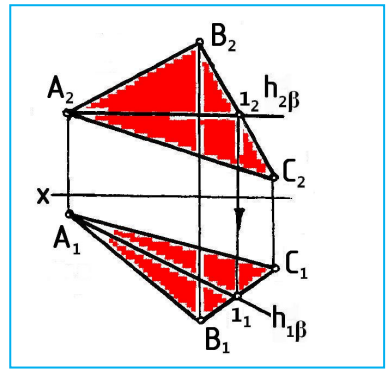


Рис. 3.59. Проведення в площині β(ΔABC) горизонтальної прямої h_β (1 дія)

Fig. 3.59. Drawing of the horizontal line h_β in the plane β(ΔABC) (step 1)

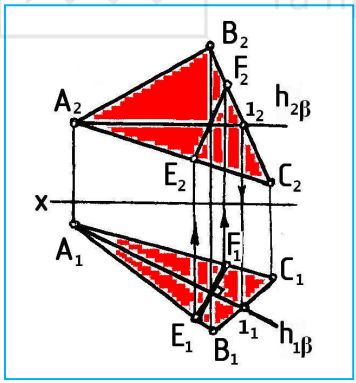


Рис. 3.60. Проведення в площині β(ΔABC) відрізка EF лінії найбільшого схилу (2 дія)

Fig. 3.60. Drawing of the segment EF of the highest slope line in the plane β (ΔABC) (step 2)

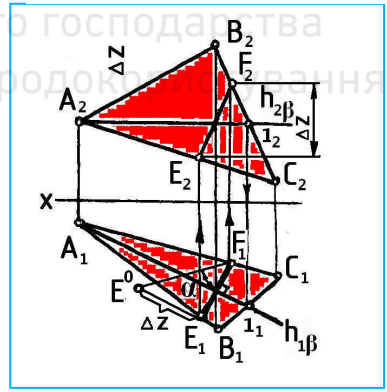


Рис. 3.61. Визначення способом прямокутного трикутника кута нахилу α площини β(ΔABC) до площини π_1

Fig. 3.61. Defining the angle slope α of the plane β(ΔABC) to the plane π_1 using the method of the right triangle

Національний університет
водного господарства
та природокористування

в просторі MN ⊥ $h_{0\alpha}$, а точки M і N належать слідам площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$. На рис. 3.57 способом прямокутного трикутника визначено кут нахилу лінії найбільшого схилу MN до площини π_1, а, отже, і кут нахилу самої площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ до площини π_1.

На рис. 3.58 дано початкову умову задачі на визначення кута нахилу α площини β (ΔABC) до площини π_1. На рис. 3.59-3.61 наведено графічне розв'язування цієї задачі.

the space MN ⊥ $h_{0\alpha}$ and the points M and N belong to the traces of the plane $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$. In Fig. 3.57 the angle slope of the highest slope line MN to the plane π_1 is defined using the method of the right triangle, thus is the angle slope of the plane α itself $(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ to the plane π_1.

In Fig. 3.58 the initial condition of the problem for defining the angle slope α of the plane β (ΔABC) to the plane π_1 is given. In Fig. 3.59-3.61 we can see graphical solution of this problem.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

Нарисна геометрія. Розділ 4 Поверхні. Точка на поверхні	**Descriptive geometry. Chapter 4 The point on the surface**
4.1. Багатогранники та їх зображення	4.1. Polygons and their forms
Багатогранниками називаються геометричні тіла, які обмежені плоскими багатокутниками _ гранями (рис. 4.1, 4.2).	Polygons are geometrical figures that are closed by the plane polyhedrons – faces. (Fig. 4.1, 4.2).
Елементи багатогранника: ребра – лінії перетину граней та вершини – точки перетину ребер.	Elements of the polygon are: edges are intersections of the faces, and vertices are intersections of the edges.
З великої кількості багатогранників практичний інтерес становлять піраміди (рис. 4.1) та призми (рис. 4.2).	From the huge amount of polygons, the most interesting in practice are pyramids (Fig. 4.1) and prisms (Fig. 4.2).
Зображення багатогранника зводиться до зображення його ребер та вершин.	Drawing of a polygon implies drawing its edges and vertices.
Лінія, яка обмежує проекцію багатогранника, називається обрисом поверхні багатогранника. Обрис поверхні – завжди видима лінія, вона позначається суцільною основною лінією.	The line that closes the projection of the polygon is called the contour of the polygon surface. The contour of the surface is always a visible line, it is marked by a solid base-line.
На рис. 4.3 зображено піраміду ABCS, де на горизонтальній проекції обрисом є лінія $A_1B_1C_1A_1$, а на фронтальній проекції – лінія $A_2B_2S_2A_2$.	In Fig. 4.3 a pyramid ABCS is shown, where the contour is the line $A_1B_1C_1A_1$ on the horizontal projection, and the line $A_2B_2S_2A_2$ on the frontal projection.
Точка і пряма лінія на поверхні багатогранника визначається так, як і в площині.	The point and the rectilinear line on the surface of the polygon is determined in the same way as in the plane.
На рис. 4.3 точка 1 належить ребру AS, де горизонтальну	In Fig. 4.3 the point 1 belongs to the edge AS, where the horizontal

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцію точки знайдено за допомогою лінії проекційного зв'язку.

Точка 2 належить ребру SC, проте горизонтальну проекцію точки визначити за допомогою лінії проекційного зв'язку неможливо, оскільки SC – відрізок профільної прямої, паралельної до площини π_3 (у цієї прямої проекції розміщені на одній лінії, перпендикулярній до осі *x*). В даному випадку горизонтальну проекцію 2_1 знайдено за допомогою прямої 23, яку проведено в грані ASC піраміди паралельно до сторони AC основи і тому є горизонталлю *h*.

Точка К лежить у середині грані BCS і її фронтальну проекцію $К_2$ знайдено за допомогою прямої S4, проведеної в грані BCS. Точка К розміщена на прямій S4 грані BCS і тому належить поверхні піраміди.

На рис. 4.4 зображено трикутну призму, нижня основа якої паралельна до горизонтальної площини проекцій, а верхню основу не показано. Відома фронтальна проекція $К_2$ точки К, що знаходиться на поверхні призми. Оскільки $К_2$ є видимою, то точка К знаходиться в грані призми, що примикає до сторони AC. Горизонтальну проекцію $К_1$ знайдено за допомогою прямої К1, що проведено паралельно до

projection of the point was determined by the line of the project connection.

The point 2 belongs to the edge SC, however, the horizontal projection of the point cannot be determined by the line of the project connection because SC is the line segment of the lateral line which is parallel to the plane π_3 (this line has projections located on one line which is perpendicular to the axis *x*). In this particular case we determine the horizontal projection 2_1 by means of the straight line 23 which is drawn on the face ASC of the pyramid parallel to the side AC of the base and thus it is horizontal *h*.

The point K lies inside the edge BCS and its frontal projection K_2 has been determined by the line S4 drawn on the face BCS. The point K is located on the line S4 of the face BCS thus it belongs to the surface of the pyramid.

In Fig. 4.4 triangular prism is shown, its lower base is parallel to the horizontal plane of projections and its upper base is not shown. The frontal projection K_2 of the point K is given. It is located on the surface of the prism. Since K_2 is visible, then the point K is located on the face of the prism that is adjacent to the side AC. Horizontal projection K_1 has been determined by the line K1 which is parallel to lateral edges of the prism.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

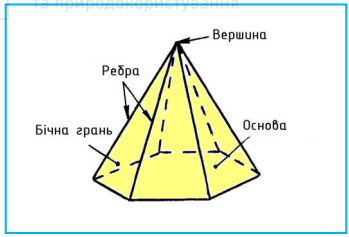


Рис. 4.1. Наочне зображення піраміди
Fig. 4.1. A visual image of the pyramid

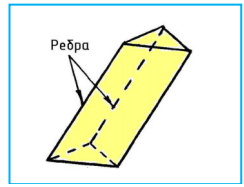


Рис. 4.2. Наочне зображення призми
Fig. 4.2. A visual image of the prism

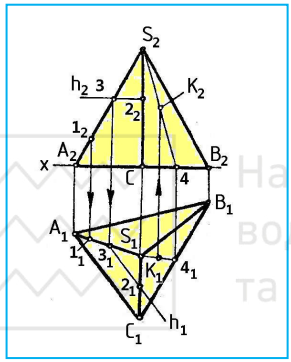


Рис. 4.4. Епюр піраміди
Fig. 4.4. The epure of the pyramid

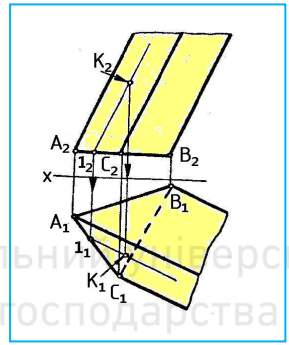


Рис. 4.4. Епюр призми
Fig. 4.4. The epure of the prism

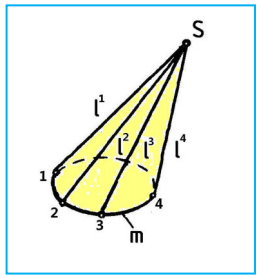


Рис. 4.5. Утворення конічної поверхні
Fig. 4.5. Constructing of a conical surface

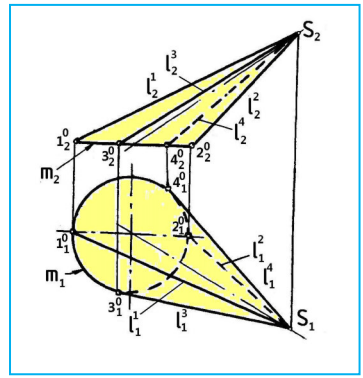


Рис. 4.6. Епюр похилого кругового конуса з проекціями обрисових твірних
Fig. 4.6. The epure of the oblique circular cone with projections of the contour generatrices

Національний університет
водного господарства
та природокористування

бічних ребер призми.

4.2. Криві поверхні та їх зображення

Криві поверхні можна розглядати як сукупність безперервних положень лінії, що називається твірною, яка переміщується по напрямній лінії. Залежно від виду твірної криві поверхні поділяються на 2 класи: лінійчасті (твірна – пряма лінія) та нелінійчасті або криволійні (твірна – крива лінія).

4.2.1. Конічна поверхня

Конічна поверхня - це лінійчаста поверхня, що утворена рухом прямолінійної твірної l (рис. 4.5) уздовж криволійної напрямної m, і яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) перетинаються в точці S, яка називається вершиною.

Криві поверхні, зокрема конічні, зображуються на площинах проекцій своїми обрисами поверхні.

На рис. 4.6 зображено обриси геометричного тіла – похилого кругового конуса (еліптичного конуса), обмеженого конічною поверхнею і площиною (основою конуса), що перетинає всі твірні поверхні, причому лінія m

4.2. Curved surfaces and their forms

Curved surfaces can be identified as the unity of infinite positions of the line called generatrix, which moves along the directrix. Depending on the type of generatrix, curved surfaces can be divided into 2 classes: ruled surfaces (the generatrix is the straight line) double-curved surfaces (the generatrix is the curve).

4.2.1. Conical surface

Conical surface is a ruled surface formed by the motion of the rectilinear generetrix l (Fig. 4.5) along the curved directrix m. The surface in its all positions intersects directrix, while all generetrices (l^1, l^2, l^3 and so on) intersect in the point S, called vertex.

Curved surfaces, particularly conical, are drawn in the planes of projections by the contours of the surface.

In Fig. 4.6 the contours of the geometrical figure are shown, i.e. an oblique circular cone (elliptical cone), closed by a conical surface and the plane (the base) which intersects all generatrix surfaces, whilst the line m is called the base line of the cone.

Національний університет водного господарства та природокористування

називається лінією основи конуса.

На рис. 4.6 показано проекції обрисових твірних l^1, l^2 (на фронтальній проекції) і l^3, l^4 (на горизонтальній проекції). Ці твірні проходять через вершину S і перетинають лінію основи m в точках 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.

Точки лінії основи m, через які проходять обрисові твірні, ділять лінію основи на видиму та невидиму частини. Так, на горизонтальній проекції твірні l^3 і l^4 ділять горизонтальну проекцію m_1 в точках $3_1{}^0$ і $4_1{}^0$ на видиму та невидиму частини.

Покажемо, як визначити видимість твірних на рис. 4.6.

На горизонтальній проекції твірні, що перетинають лінію основи між точками $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$- $4_1{}^0$ – невидимі (перетинають невидиму зверху частину лінії основи m), а між точками $3_1{}^0$ - $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ – видимі.

Твірні, які на горизонтальній проекції перетинають лінію основи m між точками $1_1{}^0$ - $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$, на фронтальній проекції видимі, а ті твірні, які перетинають лінію основи між точками $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ - $2_1{}^0$, – невидимі.

Так, на рис. 4.7 показано видимість твірних l^5 і l^6, які проведено у середині обрису

In Fig. 4.6 the projections of the contour generatrices l^1, l^2 (on the frontal projection) and l^3, l^4 (on the horizontal projection) are shown. These generatrices cut through the vertex S and cross the base line m in the points 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.

The points of the base line m that are crossed by the contour generatrices cut the base line into visible and invisible parts. Thus, on the horizontal projection the generatrices l^3 and l^4 cut the horizontal projection m_1 in the points $3_1{}^0$ and $4_1{}^0$ into visible and invisible parts.

Let's show how to define the visibility of the generatrices in Fig. 4.6.

In the horizontal projection the generatrices that cut the base line between the points $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$- $4_1{}^0$ are invisible (they intersect the invisible upper part of the base line m) and between the points $3_1{}^0$ - $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ are visible.

Generatrices that cut the base line m in the horizontal projection between the points $1_1{}^0$ - $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$ are visible in the frontal projection, and the generatrices that cut the base line between the points $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ - $2_1{}^0$ are invisible.

Thus, in Fig. 4.7 the visibility of the generatrices l^5 and l^6 are shown. They are drawn inside the surface.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

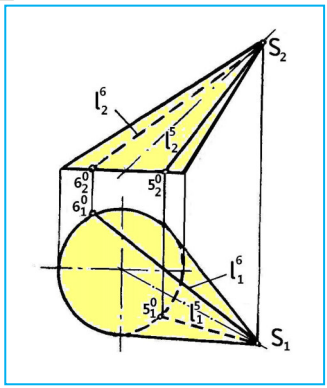


Рис. 4.7. Епюр похилого кругового конуса з проекціями твірних, проведених у середині обрису
Fig. 4.7. The epure of the oblique circular cone with projections drawn inside the contour

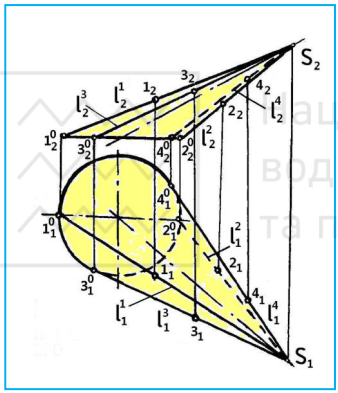


Рис. 4.8. Епюр похилого кругового конуса з проекціями точок, що лежать на обрисових твірних
Fig. 4.8. The peure of the oblique circular cone with projections of the points that lie on the contour generatrices

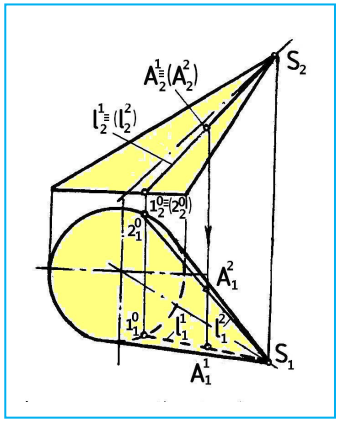


Рис. 4.9. Проекції точки А, зазначеної у середині обрису похилого кругового конуса
Fig. 4.9. The projections of the point A marked inside the contour of the oblique circular cone

Національний університет водного господарства та природокористування

поверхні.

Точка належить поверхні, зокрема конічній, якщо вона знаходиться на лінії цієї поверхні. Точка на конічній поверхні визначається за допомогою твірної, що проходить через цю точку, перетинаючи вершину S і лінію основи *m*.

Точці, яка лежить на обрисовій твірній, відповідає одна точка поверхні конуса. Так, на рис. 4.8 показано проекції точок 1, 2, 3, 4, що лежать на відповідних обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4.

Якщо лінія основи є замкненою лінією, наприклад колом, то точка, що задана на одній проекції у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні геометричного тіла.

Так, на рис. 4.9 точці А, що зазначена у середині обрису на фронтальній проекції, відповідають дві точки поверхні A^1 і A^2, фронтальні проекції яких збігаються ($A_2^2 \equiv A_2^1$). Ці точки лежать на твірних l^1 і l^2. Видимість точок A^1 і A^2 на горизонтальній проекції визначена за видимістю твірних l^1 і l^2.

4.2.2. Циліндрична поверхня

Циліндрична поверхня – це лінійчаста поверхня, яка утворена паралельним рухом

The point belongs to the surface, particularly to the conical surface, if it is located on the line of this surface. The point on the conical surface is determined by the generatrix that cuts through this point, intersecting the vertex S and the base line *m*.

The point which lies on the contour generatrix has one corresponding point of the cone surface. Thus, in Fig. 4.8 the projections of the points 1, 2, 3, 4 that lie on the corresponding contour generatrices l^1, l^2, l^3, l^4 are shown.

If the base line is a closed line, for example, a circle, then the point determined on one projection inside the contour, defines the position of two points of the geometrical figure surface.

Thus, in Fig. 4.9 the point A, marked inside the contour on the frontal projection, has two corresponding points of the surface A^1 and A^2 whose frontal projections coincide ($A_2^2 \equiv A_2^1$). These points lie on generatrices l^1 and l^2. The visibility of the points A^1 and A^2 on the horizontal projection is determined by the visibility of the generatrices l^1 and l^2.

4.2.2. Cylindrical surface

Cylindrical surface is a ruled surface which is formed by the parallel motion of the rectilinear generatrix l (Fig. 4.10) along the double-curved directrix *m*, whilst all

Національний університет
водного господарства

прямолінійної твірної l (рис. 4.10) уздовж криволійної напрямної m, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) паралельні між собою і перетинають напрямну m в точках 1^0, 2^0, 3^0 і т.д.

На рис. 4.11 показано обриси похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра), лінія основи якого – коло (верхню основу циліндра не показано). На рис. 4.11 зображено проекції обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4 та проекції точок 1, 2, 3, 4, що на них знаходяться, а на рис. 4.12 – проекції точки А, що розміщена у середині обрису.

Слід зазначити, що видимість твірних та точок на циліндричній поверхні визначається так само, як і для конічної.

4.2.3. Поверхня кулі (сфера)

Поверхня кулі (сфера) – це нелінійчаста поверхня, утворена обертанням кола, яке є твірною, навколо осі, що збігається з діаметром кола, і розміщена перпендикулярно до горизонтальної площини проекції.

Лініями обрису сфери на горизонтальних та фронтальних площинах проекцій є кола.

На рис. 4.13 показано обриси поверхні кулі, де зазначено: i – вісь обертання ($i \perp \pi_1$), $l^м$ – головний меридіан (обрис

generatrices (l^1, l^2, l^3 and so on) are parallel to each other and intersect the directrix m in the points 1^0, 2^0, 3^0 and so on.

In Fig. 4.11 the contours of the oblique circular cylinder (elliptical cylinder) are shown, its base is a circle (the upper base of the cylinder is not shown). In Fig. 4.11 the projections of the contour generatrices l^1, l^2, l^3, l^4 are given as well as the projections of the points 1, 2, 3, 4 that are located on them. In Fig. 4.12 the projections of the point A located inside the contour are shown.

It should be noted that the visibility of the generatrices and the points on the cylindrical surface are determined in the same manner as on the conical one.

4.2.2. The surface of the globe (the sphere)

The surface of the globe (the sphere) is a double-curved surface formed by the revolution of the circle around the axis. This circle is the generatrix and the axis coincides the diameter of the circle and is perpendicular to the horizontal plane of projection.

Circles are the lines of the sphere sketch in the horizontal and frontal planes of projection.

In Fig. 4.13 the contours of the globe are shown, where i is the axis of revolution ($i \perp \pi_1$), $l^м$ is the principal meridian (the sketch of

Національний університет
водного господарства
та природокористування

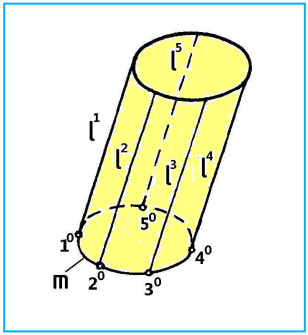


Рис. 4.10. Утворення циліндричної поверхні
Fig. 4.10. Construction of cylindrical surface

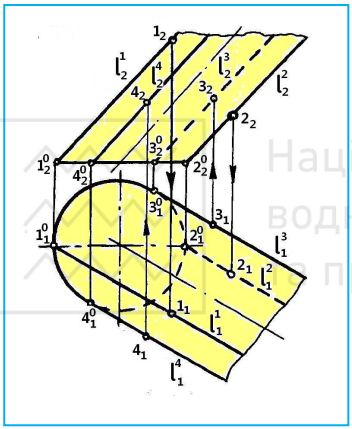


Рис. 4.11. Епюр похилого кругового циліндра з проекціями точок, що лежать на обрисових твірних
Fig. 4.11. The epure of the oblique circular cylinder with the projections of the points that lie on contour generatrices

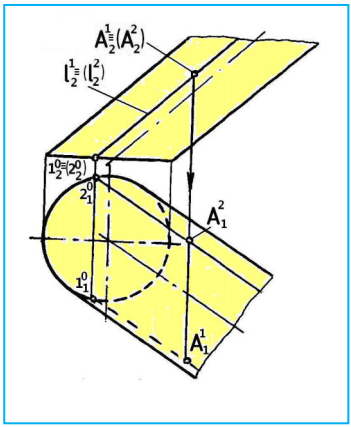


Рис. 4.12. Проекції точки А, зазначеної у середині обрису похилого кругового циліндра
Fig. 4.12. The projections of the point A marked inside the contour of the oblique circular cylinder

Національний університет
водного господарства
та природокористування

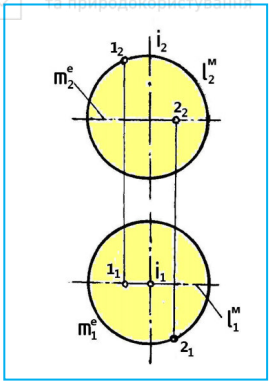


Рис. 4.13. Епюр поверхні кулі з проекціями точок 1 і 2 на обрисових лініях
Fig. 4.13. The epure of the surface of the sphere with projections of the points 1 and 2 on the contour lines

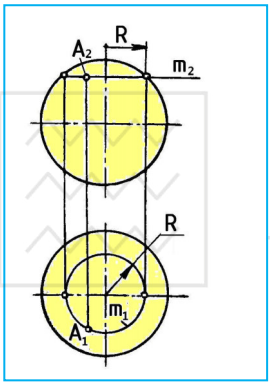


Рис. 4.14. Побудова проекцій точки А за допомогою паралелі m
Fig. 4.14. Construction of the projections of the point A by the parallel A m

Національний університет
водного господарства
та природокористування

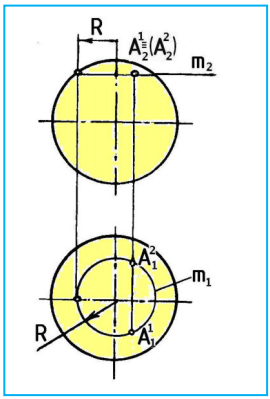


Рис. 4.15. Побудова проекцій точки А, зазначеної у середині обрису поверхні кулі
Fig. 4.15. Construction of the projections of the point A, marked inside the contour of the sphere surface

Національний університет
водного господарства
та природокористування

поверхні на площині π_2), m^e – екватор (обрис поверхні на площині π_1), а також проекції точки 1, що належить l^M, і точки 2, що належить m^e.

Поверхня кулі є поверхнею обертання, тобто точка поверхні при обертанні кулі описує коло відносно осі обертання. Ці кола називаються паралелями поверхні обертання. Найбільша паралель – це екватор.

На рис. 4.14 показано, що точка А при обертанні кулі описує коло *m* радіуса R. Оскільки площина кола паралельна площині π_1, то коло, яке називається параллеллю, проекціюється на π_1 в натуральну величину.

Точка на поверхні кулі, яка знаходиться у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні і будується за допомогою паралелей поверхні кулі.

Так, на рис. 4.15 точка А, зазначена у середині обрису сфери, визначає положення двох точок A^1 і A^2 поверхні кулі, причому горизонтальні проекції $A_1{}^1$ і $A_1{}^2$ побудовані за допомогою паралелі *m* радіуса R.

4.2.4. Поверхня прямого кругового конуса

Поверхня прямого кругового конуса утворена обертанням прямолінійної твірної *l* (рис. 4.16) навколо осі *i*, що

the plane π_1). The projections of the point 1 that belongs to l^M, and the point 2 that belongs to m^e are also noted.

The surface of the sphere is the surface of revolution, i.e. the point of the surface when revolving forms a circle against the axis of revolution. These circles are called parallels of the surface of revolution. The greatest parallel is the equator.

In Fig. 4.14 we can see that, when the sphere is revolving, the point A forms a circle *m* of the radius R. Since the plane of the circle is parallel to the plane π_1, then the circle called parallel is projected on π_1 in its true size.

The point on the surface of the sphere, located inside the contour, determines the position of two points of the surface and is constructed by the parallels of the surface of the sphere.

Thus, in Fig. 4.15 the point A, noted inside the contour of the sphere, determines the position of two points A^1 and A^2 of the surface of the globe, whilst the horizontal projections $A_1{}^1$ and $A_1{}^2$ are constructed by the parallels *m* of the radius R.

4.2.4. The surface of the right circular cone

The surface of the right circular cone is formed when rectilinear generatrix *l* is revolving (Fig. 4.16) around the axis *i*, which is

Національний університет
водного господарства
та природокористування

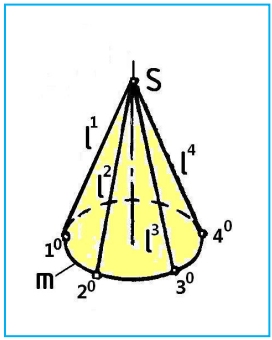


Рис. 4.16. Утворення поверхні прямого кругового конуса
Fig. 4.16. Construction of the surface of the right circular cone

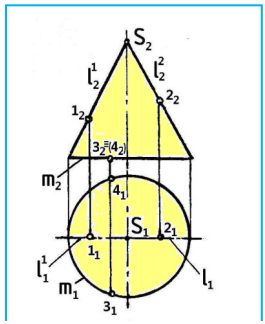


Рис. 4.17. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок на обрисових твірних і на лінії основи
Fig. 4.17. The epure of the right circular cone with projections of the points on the contour generatrices and on the base

Національний університет
водного господарства
та природокористування

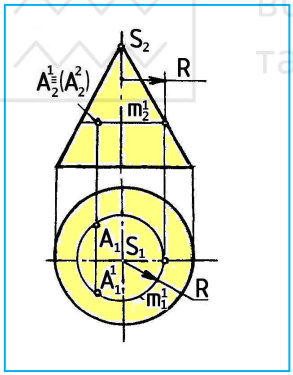


Рис. 4.18. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок A^1 і A^2, визначених за допомогою паралелі m^1
Fig. 4.18. The epure of the right circular cone with projections of the points A^1 and A^2, determined by the parallel m^1

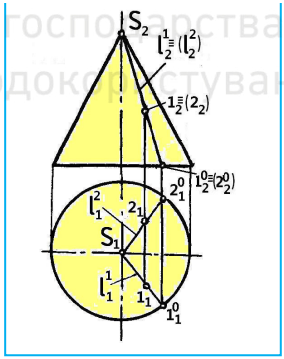


Рис. 4.19. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок 1 і 2, визначених за допомогою твірних l^1 і l^2
Fig. 4.19. The epure of the right circular cone with projections of the points 1 and 2, determined by the generatrices l^1 and l^2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

перпендикулярна до площини π_1, і є висотою конуса. Якщо поверхню прямого кругового конуса перетнути площиною, паралельною до π_1, то лінією основи m конуса буде коло.

plane parallel to π_1 then the base m of the cone will be a circle.

На рис. 4.17 зображено прямий круговий конус або конус обертання, на поверхні якого зазначені проекції точок 1 і 2, що лежать на обрисових твірних l^1 і l^2, а також проекції точок 3 і 4, що знаходяться на лінії основи m.

In Fig. 4.17 the right circular cone or cone of revolution is shown. On its surface the projections of the points 1 and 2 are marked. They lie on the contour generatrices l^1 and l^2. There are also projections 3 and 4 located on the base m.

Оскільки ця поверхня є поверхнею обертання, то точку на поверхні конуса обертання можна визначити за допомогою паралелі. На рис. 4.18 горизонтальні проекції точок A^1 і A^2 визначені за допомогою паралелі m^1.

Since this surface is the surface of the revolution then the point on the surface of the cone of revolution can be determined by the parallel. In Fig. 4.18 the horizontal projections of the points A^1 and A^2 are determined by the parallel m^1.

Точку на поверхні такого конуса можна визначити також і за допомогою твірної поверхні. Так, на рис. 4.19 горизонтальні проекції точок 1 і 2 визначені за допомогою твірних l^1 і l^2.

The point on the surface of such cone can also be determined by generatrix surface. Thus, in Fig. 4.19the horizontal projections of the points 1 and 2 are determined by the generatrices l^1 and l^2.

Звернемо увагу, що точці, зазначеній у середині обрису на фронтальній проекції конуса, відповідають дві точки поверхні (рис. 4.18, 419).

Note that the point marked inside the contour on the frontal projection of the cone has two corresponding points of the surface (Fig. 4.18, 4.19).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

КОРОТКИЙ УКРАЇНСЬКО- АНГЛІЙСЬКИЙ СЛОВНИК
найбільш широко вживаних термінів та словосполучень при вивченні нарисної геометрії та інженерної графіки

Ukrainian – English dictionary
of the most widely used words and word combinations in descriptive geometry and engineering graphics

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Український алфавіт Ukrainian alphabet

А а, Б б, В в, Г г, ґ ґ, Д д, Е е, Є є, Ж ж, З з, И и, І і, Ї ї, Й й, К к, Л л, М м, Н н, О о, П п, Р р, С с, Т т, У у, Ф ф, Х х, Ц ц, Ч ч, Ш ш, Щ щ, Ю ю, Я я, Ь ь.

Національний університет водного господарства та природокористування

Аксонометрія – axonometry Алгоритм – algorithm Аркуш (паперу) – a piece of paper Багатогранник – polygon Багатокутник – polyhedron Віддалений – spaced Від'ємний – negative Вид – type додатковий – supplementary зверху – above ззаду – behind зліва– on the left знизу – beneath місцевий – local основний – basic спереду – in front справа – on the right Видимість – visibility Виносна лінія – extension line Відношення – the ratio Відстань – distance Відображення – representation Відповідність – congruence Вісь – axis Властивість – attribute Вписаний – inscribed Геометрія – geometry Горизонталь – horizontal Горизонтальна лінія зв'язку – horizontal line of projection Горизонтальна площина проекцій – horizontal plane of projections Горизонтальна проекція – horizontal projection Горизонтальна пряма – horizontal line	Грань – face Двогранний кут – dihedron Діагональ – diagonal Діаметр – diameter Дійсна величина – fixed datum Довжина – length Довільний – arbitrary Додатний – positive Допоміжна площина – additional plane Дотик – tangency Дотична – tangent line Дуга – arc Еліпс – ellipse Епюр – epure Заміна – replace Засіб – means Збіг – coincidence Збігатися – coincide З'єднувати – join Зображення – image Зрізаний – truncated Ізометрія – isometry Індекс – reference mark Коло – circle Комплексне креслення – aggregated drawing Конічний переріз – conical cut Конкуруючі точки – collinear points Конус – cone Концентричні кола – coaxial circles Ознака – characteristic, feature Описаний – circumscribed Описане коло – circumscribed circle Опуклий – convex Ортогональна проекція – orthogonal projection

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Креслення – drawing
Креслити – to draw
Крива лінія – curve
Круг – circle
Куля – sphere
Кут – angle
Ламана лінія – open polygon
ламаний розріз – polygon cut
Лінійчата поверхня – linear surface
Межа – boundary
Мимобіжні прямі – skew lines
Множина – multitude
Модель – pattern
Накладений переріз – revolved section
Належати – to belong
Належність – belonging
Наочний – visual
Напрям – direction
Напрямна – directrix
Нарисна геометрія – descriptive geometry
Наслідок – consequence
Натуральна величина – true size
Нахил – slope
Невидимий – invisible
Неперервний – continuous
Нерозгортна поверхня – nondevelopable surface
Нескінченність – infinity
Нормаль – normal
Обертання – revolution, rotation
Оборотне креслення – reversible drawing
Обрис – contour
Просторове мислення – spatial reasoning
Просторове уявлення – spatial
Паралельний – parallel
Паралельні прямі – parallel lines
Параметр – parameter
Переріз – cross section
Перетворення – transformation
Перетинати – intersect, cut
Перпендикуляр – perpendicular
Піраміда – pyramid
Площа – area
Площина – plane
Побудова – construction
Поверхня – surface
Поздовжній – longitudinal
Позиційні задачі – position task
Початок координат – datum point, coordinate origin
Призма – prism
Проектування – drafting
Проекція – projection
Проекційний зв'язок – project connection
Проекціювання – projecting
Проекціююча пряма – project line
Промінь – ray
Простір – space
Просторовий – spatial
Просторова уява – spatial perception
Спряження – conjugation
Стала пряма креслення – fixed line of the drawing
Сумістити – to align
Суміщати – to align
Суміщення – alignment
Суцільний – continuous
Сфера – sphere
Твірна – generatrix
Тіло – body
Товщина – thickness
Точка – point

Національний університет
водного господарства
та природокористування

representation
Профільна площина проекцій – cross plane of projections
Пряма – straight line
Пряма рівня – level line
Прямий кут – right angle
Прямокутна проекція – rectangular projection
Прямокутник – rectangle
Радіус – radius
Риска – hyphen
Рівний – equal
Рівність – congruence, equity
Рівняння – equation
Рівновіддалені – equidistant
Рівнонахилені – equally inclined
Рівносторонній трикутник – equilateral triangle
Розв'язування – solution
Розгортка – involute
Розгортна поверхня – involute of surface
Розмір – size
Рух – movement
Симетрія – symmetry
Система координат – system of coordinates
Січна – traverse line
Січна площина – traverse plane
Слід – trace
Слід площини – trace of the plane
Слід прямої – trace of the line
Спільні точки – generic points
Спосіб – method
Спотворення – distortion
Точки конкуруючі – collinear points
Точка сходу слідів – point of trace intersection
Трикутник – triangle
Фігура – figure
Фронталь – frontal
Фронтальна площина – frontal plane
Фронтальна площина проекцій – frontal plane of projections
Фронтальна пряма – frontal line
Циліндр – cylinder
Циліндрична поверхня – cylindrical surface

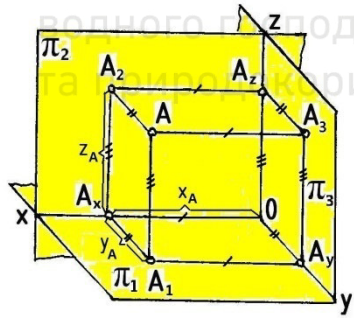
Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

УКРАЇНСЬКО-ФРАНЦУЗЬКА ЧАСТИНА НАВЧАЛЬНОГО ПОСІБНИКА

VERSION FRANCO-UKRAINIENNE DU MANUEL

Національний університет
водного господарства
та природокористування



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Нарисна геометрія. Розділ 1 **Метод проекцій** **Проекціювання точки**	**Géométrie descriptive. Chapitre 1** **Méthode de projections** **Projection d'un point**
1.1. Завдання нарисної геометрії	1.1.Tâches de la géométrie descriptive
Основне завдання нарисної геометрії полягає у визначенні способів зображення просторових об'єктів на площині (аркуші паперу або екрані комп'ютера).	La tâche principale de la géométrie descriptive consiste à définir les moyens de représentation des formes spatiales sur un plan (feuille de papier ou un écran d'un ordinateur).
Ще одним завданням нарисної геометрії є вивчення способів, що дозволяють уявити форми геометричних об'єктів за їх плоскими зображеннями, тобто опанування правилами читання креслень.	Un autre objectif de la géométrie descriptive est l'étude des méthodes permettant à imaginer les formes d'objets géométriques d'après leurs images planes, c'est à dire la maîtrise des règles de lecture des dessins techniques.
В основу нарисної геометрії покладено метод проекцій.	La méthode de projections est à la base de la géométrie descriptive.
1.2. Метод проекцій. Ортогональні проекції	1.2. Méthode de projections Projections orthogonales
Апарат відображення просторових фігур на площині (рис. 1.1) включає об'єкт, що проекціюється (точка А), площину проекцій, на яку проекціюється точка А (на рис. 1.1 це π_1 – горизонтальна площина проекцій).	L'appareil de visualisation des figures spatiales sur un plan comporte l'objet qui se projette (point A), plan de projections sur lequel se projette le point A (fig. 1.1 c'est π_1 – le plan horizontal de projections).
Третім елементом апарата відображення є спосіб проекціювання. Застосовуємо спосіб ортогонального або прямокутного проекціювання. За цим способом для отримання	La méthode de projection est un troisième élément de l'appareil de visualisation. On applique la méthode de la projection orthogonale ou celle rectangulaire. Afin d'obtenir la représentation du point A sur le plan π_1,avec cette

Національний університет
водного господарства
та природокористування

зображення точки А на площині π_1 потрібно через точку А (рис. 1.2) провести пряму перпендикулярно до площини проекцій π_1. Точка перетину цієї прямої з площиною π_1 (це точка A_1) і буде зображенням точки А на площині π_1. В нарисній геометрії зображення об'єктів, що отримані описаним чином, називаються проекціями об'єкта. Отже, точка A_1 – це ортогональна проекція точки А на площині π_1. Оскільки площина π_1 розміщена горизонтально, проекцію A_1 називають горизонтальною проекцією точки А.	méthode, il est nécessaire de tracer à travers le point A (fig. 1.2), la droite perpendiculairement au plan de projections π_1. Le point d'intersection de cette droite avec le plan π_1 (c'est le point A_1) est donc la représentation du point A sur le plan π_1. Les objets obtenus de la manière décrite ci-dessus sont appelés, en géométrie descriptive, les projections d'un objet. Ainsi le point A_1 – c'est la projection orthogonale du point A sur le plan π_1. Vue que le plan π_1 est placé horizontallement, la projection de A_1 est appelée la projection horizontale du point A.
Пряму AA_1, за допомогою якої знайдено проекцію A_1, називають проекціюючою прямою ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).	La droite $A A_1$, servant à trouver la projection A_1, est appelée la droite projective ($AA_1 \perp \pi_1$, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$).
Якщо точка С належить площині π_1 (рис. 1.3), то її горизонтальна проекція C_1 збігається з самою точкою С ($C_1 \equiv C$). На рис. 1.3 точкам простору В і D відповідають єдині горизонтальні проекції B_1 і D_1. Проте, одній горизонтальній проекції F_1 відповідає безліч точок простору (F, F`, F`` і т.д.), що знаходяться на одній проекціюючій прямій. Відзначимо, що точки, які лежать на одній проекціюючій прямій, називаються конкуруючими. Точки F, F`, F``, що зображені на рис. 1.3, це конкуруючі точки.	Si le point C appartient au plan π_1 (fig. 1.3), sa projection horizontale C_1 est amenée en coïncidence avec le point même C ($C_1 \equiv C$). Sur la fig 3.1. les seules projections horizontales B_1 et D_1 correspondent aux points B et D de l'espace. Cependant, sont nombreux les points de l'espace (F, F`, F`` et ctr.), se trouvant sur la même droite projective, qui correspondent à une seule projection horizontale $F_1$. Notons que les points se trouvant sur la même droite projective sont appelés les points concourants. Les points F, F`, F``, représentés sur la fig. 1.3, sont les points concourants.

Національний університет водного господарства та природокористування

Отже, судити про положення точки в просторі за однією її проекцією неможливо, а креслення з однією проекцією об'єкта є невизначеним, неоднозначним.	Ainsi il s'avère impossible de jujer sur la position d'un point dans l'espace par sa seule projection, et, le dessin avec une seule projection de l'objet reste incertain, ambiguë.
1.3. Метод Монжа – проекціювання точки на дві перпендикулярні площини проекцій. Епюр точки	1.3. Méthode de Monge – projection d'un point sur les deux plans perpendiculaires de projections. Epure d'un point
Французький вчений Гаспар Монж, засновник нарисної геометрії, запропонував для усунення неоднозначності креслення ортогональне проекціювання здійснювати не на одну, а на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій.	Gaspard Monge, le savant français, fondateur de la géométrie descriptive, a proposé, afin de lever l'ambiguïté des dessins techniques, de réaliser la projection orthogonale simultanée sur les deux plans perpendiculaires l'un par rapport à l'autre
На рис. 1.4 дано наочне зображення точки А в системі двох площин проекцій π_1 і π_2. Віднесемо до площин проекцій просторову прямокутну систему координат O*xyz*, де вісь *x* збігається з лінією перетину площин проекцій π_1 і π_2. Точка О – початок координат. Наочне зображення виконано у фронтальній диметрії. Площину π_2 називають фронтальною площиною проекцій. Лінію перетину площин проекцій називають віссю проекцій. Лінія перетину площин π_1 і π_2 – це вісь проекцій *x*, яка збігається з координатною віссю *x* ($x = \pi_1 \cap$	La fig. 1.4 propose la représentation visuelle du point A au système de deux plans de projections π_1 et π_2. Apportons aux plans de projections le système rectangulaire spatial de coordonnées O*xyz*, où l'axe *x* coïncide avec la ligne d'intersection des plans de projections π_1 et π_2. Le point O – origine des coordonnées. La représetation visuelle est réalisée en dimétrie frontale. Le plan π_2 est appelé le plan frontal de projections. La ligne d'intersection des plans de projections porte le nom de l'axe de projections. La ligne d'intersection des plans π_1 і π_2 – c'est l'axe de projections *x,* qui coïncide avec l'axe de coordonnées *x* ($x = \pi_1 \cap$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

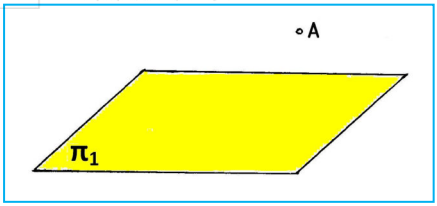


Рис. 1.1. Апарат відображення об'єктів на площині (А – точка простору , що не належить π_1; π_1 – горизонтальна площина проекцій)
Fig. 1.1. Représentation des objets sur un plan (A – point de l'espace, n'appartenant pas à π_1; π_1 – plan horizontal de projections)

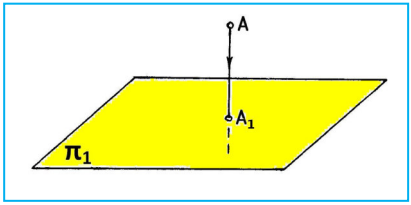


Рис. 1.2. Апарат відображення об'єктів на площині (AA_1 – проекціююча пряма, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 – горизонтальна проекція точки А, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)
Fig. 1.2. Représentation des objets sur un plan (AA_1 – droite projective, $AA_1 \perp \pi_1$; A_1 – projection horizontale du point A, $A_1 = AA_1 \cap \pi_1$)

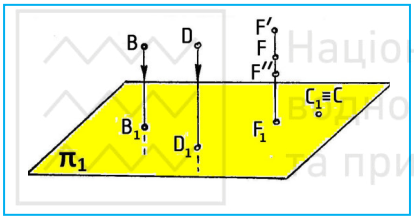


Рис. 1.3. Проекціювання точок на площину проекцій π_1
Fig. 1.3. Projection des points sur un plan de projections π_1

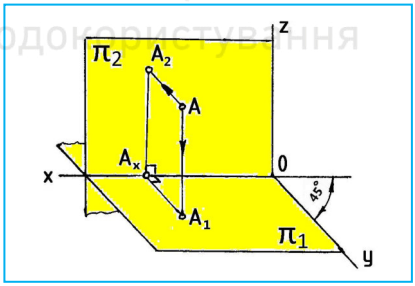


Рис. 1.4. Проекціювання точки на дві площини проекцій (π_2 – фронтальна площина проекцій, A_2 – фронтальна проекція точки А)
Fig. 1.4. Projection d'un point sur deux plans de projections (π_2 – plan frontal, A_2 – projection frontale du point A)

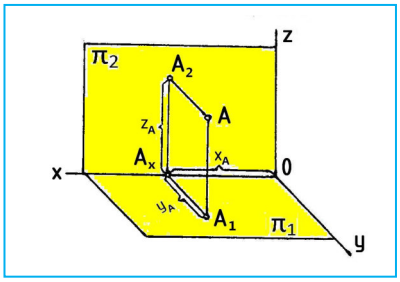


Рис. 1.5. Проекціювання точки на дві площини проекцій
Fig. 1.5. Projection d'un point sur deux plans de projections

Національний університет водного господарства та природокористування

π_2).	π_2).
Фронтальна проекція A_2 визначається таким чином. З точки А проводиться пряма перпендикулярно до площини π_2. Точка перетину цієї прямої з площиною π_2 (це точка A_2) і буде фронтальною проекцією точки А на площині π_2.	La projection frontale A_2 est définie d'une manière suivante. On trace la droite à partir du point A perpendiculairement au plan π_2. Le point d'intersection de cette droite avec le plan π_2 (point A_2) est la projection frontale du point A sur le plan π_2.
Дві проекції A_1 і A_2 однозначно вказують на положення точки А відносно системи площин проекцій π_1 і π_2.	Les deux projections A_1 et A_2 indiquent, d'une façon évidente, la position du point A par rapport au système des plans de projections π_1 et π_2.
Положення точки в просторі визначається трьома координатами. На рис. 1.5 показано всі три координати точки А. Таким чином, маючи дві проекції точки, можна визначити її положення в просторі відносно площин проекцій, тобто креслення з двома проекціями, на відміну від креслення з однією проекцією, є визначеним, однозначним.	La position du point dans l'espace est définie par trois coordonnées. Toutes les trois coordonnées du point A sont représentées sur la fig. 1.5. Ainsi, ayant deux projections d'un point, il est possible de définir sa position par rapport aux plans de projections. Soit le dessin avec deux projections, contrairement au dessin avec une seule projection, est défini, sans ambiguïté.
На рис. 1.4, 1.5 отримані проекції точки А на двох взаємно перпендикулярних площинах проекцій π_1 та π_2. Для того, щоб сумістити площини проекцій π_1 і π_2 в одну спільну площину креслення, обертаємо площину π_1 навколо осі x до її суміщення з фронтальною площиною проекцій π_2 в одну спільну площину. Обертання проводиться в напрямку, що вказаний на рис. 1.6. Після суміщення площин отримаємо епюр двох площин	Les fig. 1.4, 1.5 représentent les projections obtenues du point A sur les deux plans mutuellement perpendiculaires de projections π_1 et π_2. Afin d'aligner les plans de projections π_1 i π_2 en un plan commun du dessin, on tourne le plan π_1 autour de l'axe x jusqu'à son association avec le plan frontal de projections π_2 en un seul plan commun. La rotation se fait dans un sens indiqué sur la fig. 1.6. Une fois les plans alignés, on obtient l'épure pour deux plans de projections

Національний університет
водного господарства

проекцій (рис. 1.7) або так, як зображено на рис. 1.8 – без нанесення обмежень площин проекцій.	(fig. 7.1), ou celle représentée sur la fig. 1.8. – sans appliquer les restrictions des plans de projections.
Для отримання епюра точки в системі двох площин проекцій також обертаємо площину π_1, але разом з розміщеною на ній горизонтальною проекцією A_1, до суміщення з площиною π_2 в одну спільну площину креслення (рис. 1.9). Після суміщення отримаємо епюр точки А в системі двох площин проекцій (рис. 1.10).	Afin d'obtenir l'épure pour un point au système de deux plans de projections on tourne aussi le plan π_1, mais, avec la projection horizontale A_1, placée sur celle-ci, jusqu'à l'alignement avec le plan π_2 en un seul plan commun du dessin (fig 1.9). Une fois l'alignement terminé, on obtient l'épure du point A au système de deux plans de projections (fig. 1.10).
Епюром називається креслення, що отримане при уявному суміщенні площин проекцій разом із розміщеними на них проекціями об'єкта в одну спільну площину креслення.	L'épure c'est un dessin, obtenu par l'alignement imaginaire des plans de projections avec les projections d'un objet placées sur ces derniers, amenés en un seul plan commun du dessin.
На епюрі проекції точки з'єднані між собою прямою лінією, що називається лінією проекційного зв'язку. Вона завжди перпендикулярна до осі проекцій: AA_1 – вертикальна лінія проекційного зв'язку, що з'єднує горизонтальну та фронтальну проекції точки, причому $AA_1 \perp x$ (рис. 1.10).	Sur l'épure les projections d'un point sont reliées entre elles par une droite, appelée la ligne de connexion projective. Cette dernière est toujours parallèle à l'axe des projections: AA_1 – la ligne verticale de connexion projective, reliant les projections horizontale et frontales d'un point, en outre $AA_1 \perp x$ (fig. 1.10).
На епюрі точки А (рис. 1.11) позначено відрізки, які дорівнюють координатам x, y і z точки А. Це дозволяє за епюром, маючи тільки дві проекції точки, визначити положення точки у	Sur l'épure du point A (fig. 1.11) on voit désigné les segments, numériquement correspondant aux coordonées x, y et z du point A. Ceci rend possible, selon l'épure n'ayant que deux points de

Національний університет
водного господарства
та природокористування

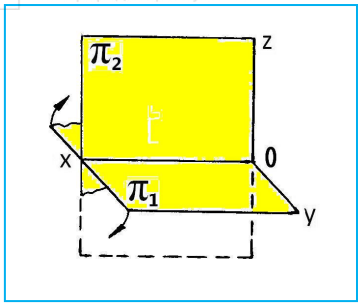


Рис. 1.6. Утворення епюра двох площин проекцій
Fig. 1.6. Formation de l'épure de deux plans de projections

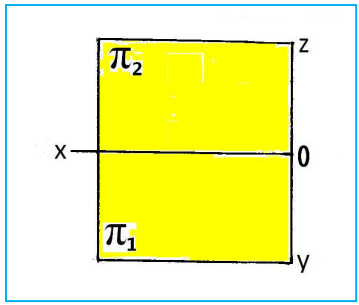


Рис. 1.7. Епюр двох площин проекцій
Fig. 1.7. Epure de deux plans de projections

Рис. 1.8. Епюр двох площин проекцій
Fig. 1.8. Epure de deux plans de projections

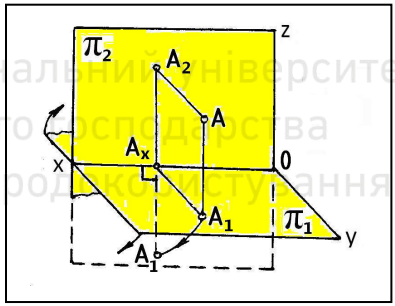


Рис. 1.9. Утворення епюра точки в системі двох площин проекцій
Fig. 1.9. Formation de l'épure d'un point au système de 2 plans projections

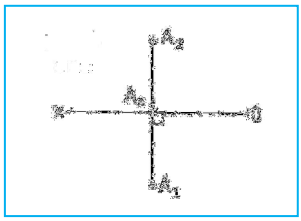


Рис. 1.10. Епюр точки в системі двох площин проекцій
Fig. 1.10. Epure d'un point au système de deux plans

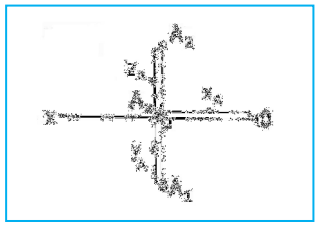


Рис. 1.11. Епюр точки в системі двох площин проекцій
Fig. 1.11. Epure d'un point au système de deux plans de projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

просторі відносно площин проекцій. Дійсно, відрізок AA_1 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки А до площини π_1, причому $A_1A = A_2A_x$, а, отже, координата z точки А визначає відстань точки А до площини π_1. Відрізок AA_1 (рис. 1.5) дорівнює відстані точки А до площини π_2, причому $AA_2 = A_1A_x$, а, отже, координата y точки А визначає відстань точки А до площини π_1.

Таким чином, двом проекціям точки відповідає єдина точка простору, і креслення з двома проекціями (зображеннями) є однозначним, визначеним.

1.4. Проекціювання точки на три площини проекцій

На рис. 1.12 дано наочне зображення системи трьох площин проекцій, де π_3 – профільна площина проекцій, y і z – осі проекцій ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

На рис. 1.13 показано проекції точки А на три площини проекцій, де A_3 – профільна проекція точки А, а на рис. 1.14 зазначено відрізки, які дорівнюють координатам x, y і z точки А. З рис. 1.14 випливає, що координата x точки А дорівнює відстані точки А до площини π_3, координата y точки А дорівнює відстані точки А до площини π_2, а координата z точки А дорівнює

projections déterminer la position d'un point dans l'espace par rapport aux plans de projections.

En effet le segment AA_1 (fig. 1.5) est égal à la distance du point A au plan π_1, de plus $A = A_2A_x$, et, alors, la coordonnée z du point A définie la distance du point A au plan π_1. Le segment AA_1 (fig. 1.5) est égal à la distance du point A au plan π_2, de plus $AA_2 = A_1A_x$, et, ainsi la coordonnée y du point A définie la distance du point A au plan π_1.

Ainsi, un seul point de l'espace correspond à deux projections d'un point et le dessin avec deux projections (images) est défini, sans ambiguïté

1.4. Projection d'un point sur trois plans de projections

La fig 1.12. illustre la représetation visuelle du système de trois plans de projections où π_3 – le plan profil de projections, y et z – axes de projections ($y = \pi_3 \cap \pi_1$, $z = \pi_3 \cap \pi_2$).

Sur la fig. 1.13 on voit les projections du point A sur trois plans de projections, où A_3 – la projection de profil du point A, sur celle 1.14 on indique les segments, correspondant aux coordonnées x, y i z du point. Il résulte de la fig. 1.14, que la coordonnée x du point A est égale à la distance du point A au plan π_3, la coordonnée y du point A est égale à la distance du point A au plan π_2, et la coordonnée z du point A est égale à la distance du point A

Національний університет
водного господарства
та природокористування

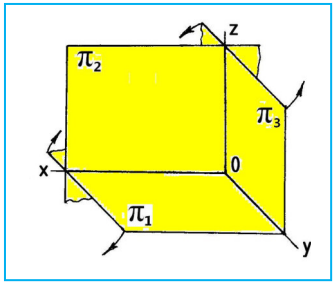


Рис. 1.12. Просторова система трьох площин проекцій (π_3 – профільна площина проекцій) та утворення епюра трьох площин проекцій
Fig. 1.12. Système spatial de trois plans de projections (π_3 – plan de profil de projections) et formation de l'epure de 3 plans de projections

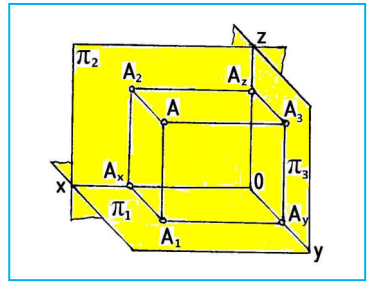


Рис. 1.13. Проекціювання точки на три площини проекцій (A_3 – профільна проекція точки А)
Fig. 1.13. Projection d'u point sur trois plans de projections (A_3 – projection de profil du point A)

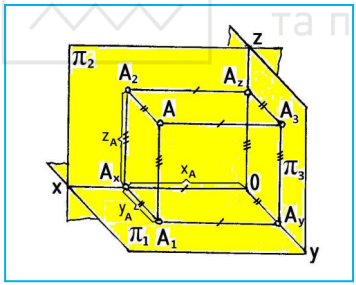


Рис. 1.14. Проекціювання точки на три площини проекцій
Fig. 1.14. Projection d'un point sur trois plans de projections

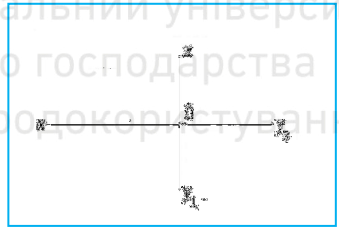


Рис. 1.15. Епюр системи трьох площин проекцій
Fig. 1.15. Epure du système de 3 plans de projections

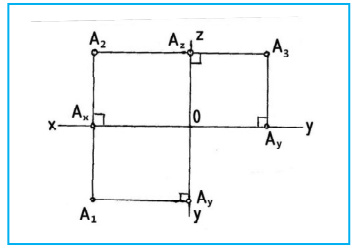


Рис. 1.16. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Fig. 1.16. Epure d'un point au système de trois plans de projections

Національний університет
водного господарства

відстані точки А до площини π_1.

Утворення епюра системи трьох площин проекцій досягається таким чином (рис. 1.12). Площина π_2 залишається нерухомою, обертанням навколо осей x і z з нею суміщаються площини π_1 і π_3. Для того, щоб площини π_1 і π_3 могли обертатися, їх умовно роз'єднують, розрізаючи площини по осі y. На рис. 1.15 дано епюр системи трьох площин проекцій. При утворенні епюра вісь y розпалася на два променя:один промінь (y_1) залишився на площині π_1, а другий промінь (y_3) – на площині π_3.

На рис. 1.16 дано епюр точки А в системі трьох площин проекцій, який утворений в результаті суміщення площин проекцій в одну спільну площину креслення. Проекції A_1 і A_2 розміщені на вертикальній лінії проекційного зв'язку ($A_1A_2 \perp x$), проекції A_2 і A_3 – на горизонтальній лінії проекційного зв'язку ($A_2A_3 \perp z$), а проекції A_1 і A_3 – на горизонтально-вертикальній лінії проекційного зв'язку ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), яка розпалася на два відрізки A_1A_y і A_3A_y, оскільки на два променя y_1 і y_3 розпалася при суміщенні площин проекцій і сама вісь проекції y.

au plan π_1.

La formation de l'épure du système de trois plans est réalisée d'une manière suivante fig. 1.12). Le plan π_2 reste immobile, les plans π_1 i π_3 sont associés par la rotation autour des axes x et z. Afin que les plans π_1 et π_3 puissent tourner, on les divise hypothétiquement, en coupant les plans suivant l'axe y. La fig 1.15 propose l'épure du système de trois plans de projections. Au moment de formation de l'épure l'axe y est désintégré en deux rayons: un rayon (y_1) reste sur le plan π_1, et le deuxième rayon (y_3) – sur le plan π_3.

La fig. 1.16 présente l'épure du point A au système de trois plans de projections, formée à la suite de l'association des plans de projections en un seul plan commun du dessin. Les projections A_1 et A_2 sont situées sur la ligne verticale de la connexion de projection ($A_1A_2 \perp x$), celles A_2 et A_3 – sur la ligne horizontale de la connexion de projection ($A_2A_3 \perp z$), et les projections A_1 et A_3 – sur la ligne verticale de la connexion de projection ($A_1A_y \cup A_3A_y \perp y$), qui s'est désintégrée en deux segments A_1A_y et A_3A_y, puisque l'axe même de la projection y s'est désintégré en deux rayons y_1 et y_3 lors de l'association des plans de projections.

Sur la fig. 1.17 on a désigné les

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 1.17 зазначено відрізки, які дорівнюють координатам *x*, *y* і *z* точки А, що дозволяє, вибравши величину одиниці масштабу, побудувати проекції точки, тобто епюр точки, за заданими чисельними значеннями її координат.

На рис. 1.18-1.20 побудований епюр точки В за її координатами: В (40,20,30).

Третю проекцію (профільну B_3) за двома заданими проекціями B_1 і B_2 точки В можна побудувати координатним або проекційним способами (рис. 1.21-1.23).

На рис. 1.24 дано епюр точки В в системі трьох площин проекцій.

segments égaux aux coordonnées *x*, *y* et *z* du point A, ce qui permet, après avoir choisi la grandeur de l'unité d'échelle, construire les projections d'un point, c'est à dire, l'épure d'un point, selon la valeur numérique donnée.

L'épure du point B selon ses coordonnées B (40,20,30) est construite sur la fig. 1.18-1.20.

La trosième projection (de profil B_3), selon les deux projections données B_1 i B_2 du point B, peut être construite aux moyens de coordonnées ou de projections (fig. 1.21-1.23).

La fig. 1.24 propose l'épure du point B au système de trois plans de projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

1.5. Класифікація точок

Точки ділять на точки простору, що не належать площинам проекцій, і точки, що належать площинам проекцій.

На рис. 1.25 дано наочне зображення точки С, що належить площині проекцій π_1. Координата *z* цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_1. На рис. 1.26 дано епюр точки С, що належить площині π_1.

На рис. 1.27 дано наочне зображення точки D, що належить площині проекцій π_2. Координата *y* цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площині π_2. На рис. 1.28 дано епюр точки

1.5. Classification des points

Les points se divisent en points de l'espace, qui n'appartiennent aux plans de projections, et ceux, appartenant aux plans de projections.

La fig. 1.25 propose la représentation visuelle du point C, appartenant au plan de projections π_1. La coordonnée *z* du point en question est égale à zéro, puisque ce dernier se trouve sur le plan π_1. Sur la fig 1.26 on voit l'épure du point C, appartenant au plan π_1.

Fig 1.27 donne la représentation visuelle du point D, appartenant au plan de projections π_2. La coordonnée *y* de ce point est égale à zéro, du fait que celui-là se trouve sur le plan π_2. Sur la fig 1.28 on

Національний університет
водного господарства
та природокористування

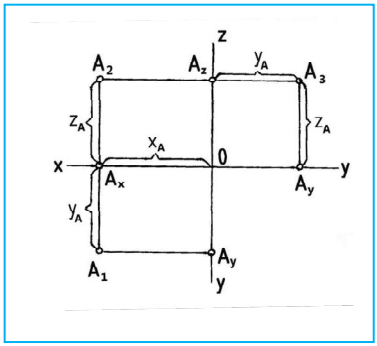


Рис. 1.17. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Fig. 1.17. Epure d'un point au système de 3 plans de projections

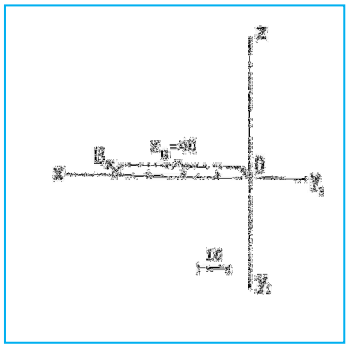


Рис. 1.18. Побудова епюра точки В за її координатами (1 дія)
Fig. 1.18. Construction de l'épure du point B selon ses coordonnées (1)

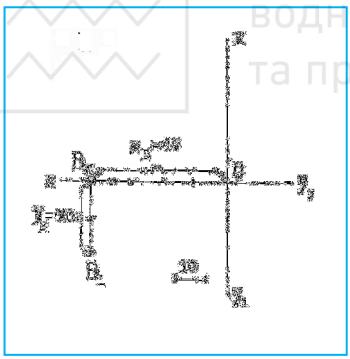


Рис. 1.19. Побудова епюра точки В за її координатами (2 дія)
Fig. 1.19. Construction de l'épure du point B selon ses coordonnées (2)

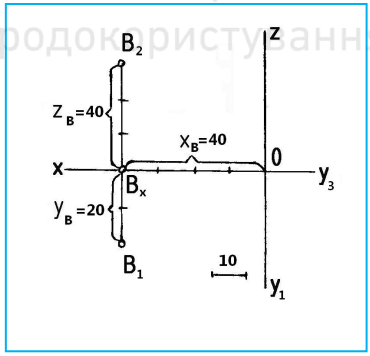


Рис. 1.20. Побудова епюра точки В за її координатами (3 дія)
Fig. 1.20. Construction de l'épure du point B selon ses coordonnées (3)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

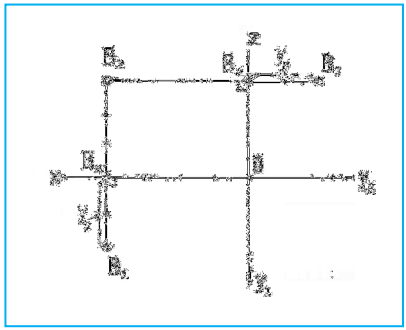


Рис. 1.21. Побудова профільної проекції точки В координатним способом
Fig. 1.21. Construction de la projection de profil du point B à l'aide de coordonnées

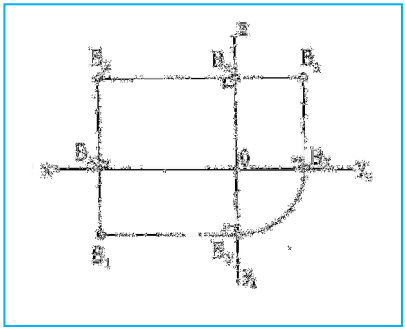


Рис. 1.22. Побудова профільної проекції точки В проекційним способом (за допомогою дуги)
Fig. 1.22. Construction de la projection de profil du point B par la méthode projective (à l'aide de l'arc)

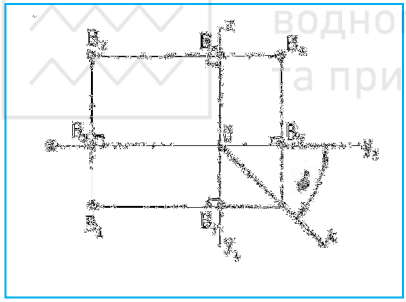


Рис. 1.23. Побудова профільної проекції точки В проекційним способом (за допомогою сталої прямої креслення)
Fig. 1.23 Construction de la projection de profil du point B par la méthode projective (à l'aide d'une droite constante)

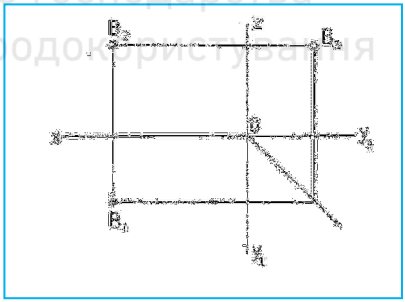


Рис. 1.24. Епюр точки в системі трьох площин проекцій
Fig. 1.24. Epure d'un point au système de 3 plans de projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

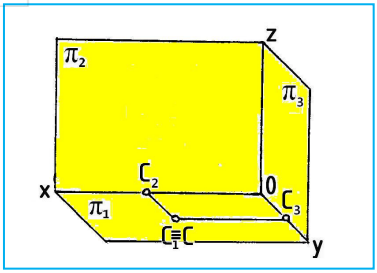


Рис. 1.25. Наочне зображення точки С та її проекцій (С Є π_1, $z_C = 0$)
Fig. 1.25. Image du point C et ses projections (CЄ π_1, $z_C = 0$)

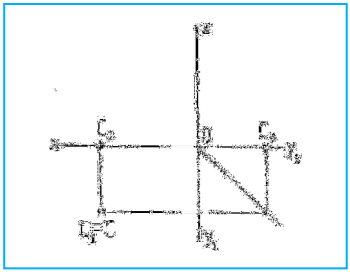


Рис. 1.26. Епюр точки С (С Є π_1, $z_C = 0$)
Fig. 1.26. Epure du point C (C Є π_1, $z_C = 0$)

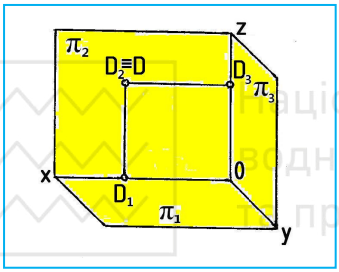


Рис. 1.27. Наочне зображення точки D та її проекцій (D Є π_2, $y_D = 0$)
Fig. 1.27. Image du point D et ses projections (D Є π_2, $y_D = 0$)

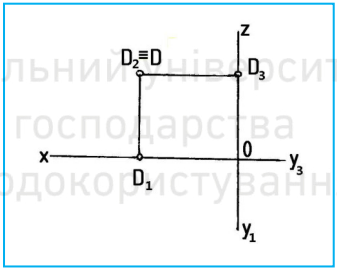


Рис. 1.28. Епюр точки D (D Є π_2, $y_D = 0$)
Fig. 1.28. Epure du point D (D Є π_2, $y_D = 0$)

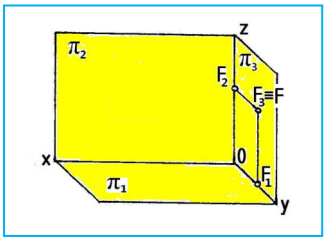


Рис. 1.29. Наочне зображення точки F та її проекцій (F Є π_3, $x_F = 0$)
Fig. 1.29. Image du point F et ses projections (F Є π_3, $x_F = 0$)

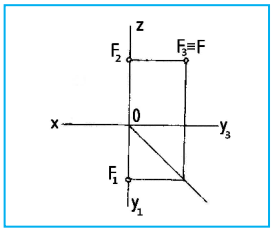


Рис. 1.30. Епюр точки F (F Є π_3, $x_F = 0$)
Fig. 1.30. Epure du point F (FЄ π_3, $x_F = 0$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

D, що належить площині π_2.

На рис. 1.29 дано наочне зображення точки F, що належить площині проекцій π_3. Координата z цієї точки дорівнює нулю, оскільки точка лежить на площини π_3. На рис. 1.30 дано епюр точки F, що належить площині π_3.

Таким чином, у точки, що належить одній площині проекцій, дві проекції знаходяться на осях проекцій, а третя збігається з самою точкою.

У точки, що належить одній площині проекцій, одна координата дорівнює нулю; це саме та, яка вказує на віддаленість точки до тієї площини проекцій, де знаходиться дана точка.

Розглянемо точки, які лежать на осях проекцій, а, отже, належать двом площинам проекцій водночас.

На рис. 1.31 дано наочне зображення точки E, яка лежить на осі x, тобто належить двом площинам проекцій π_1 і π_2 водночас ($x = \pi_2 \cap \pi_1$). У цієї точки координати y і z дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1, і площині π_2, то горизонтальна E_1 і фронтальна E_2 проекції точки E збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.32 дано епюр точки E, що лежить на осі проекцій x.

voit l'épure du point D, appartenant au plan π_2.

La représentation visuelle du point F est illustrée sur la fig 1.29. Ce dernier appartient au plan de projections π_3. La coordonnée z de ce point est égale à zéro, car celui-là se touve sur le plan π_3. La fig. 1.30 propose l'épure du point F, appartenant au plan π_3.

Donc, le point appartenant à un seul plan de projections possède deux projections se trouvant sur les axes de projections, et le troisième coïncide avec le point même.

Le point appartenant à un seul plan de projections possède une coordonnée qui est égale à zéro, c'est notamment celle, indiquant l'éloignement du point au plan de projections où se trouve le point donné.

Examinons les points se trouvant sur les axes de projections, et, donc, appartenant simultanément à deux plans de projections.

La fig 1.31 donne la représentation visuelle du point E, se trouvant sur l'axe x, c'est à dire appartenant à deux plans de projections π_1 i π_2 simultanément ($x = \pi_2 \cap \pi_1$). Les coordonnées y et z de ce point sont égales à zéro. Du fait que le point en question appartient à la fois à deux plans π_1, et π_2, les projections horizontale E_1 et frontale E_2 du point E coincident entre elles et avec le point même.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

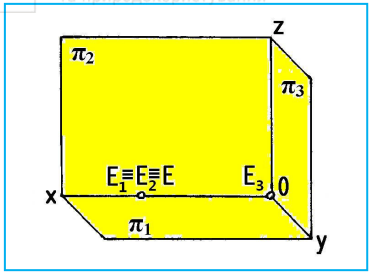


Рис. 1.31. Наочне зображення точки Е та її проекцій (Е Є x)
Fig. 1.31. Image du point Eet ses projections (E Є x)

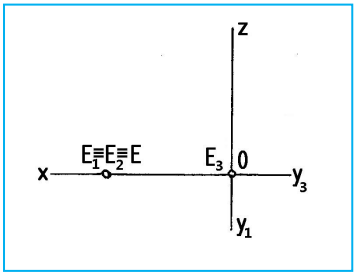


Рис. 1.32. Епюр точки Е (Е ∈ x)
Fig. 1.32. Epure du point E (E ∈ x)

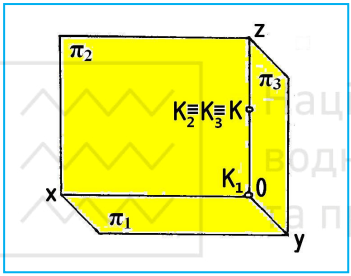


Рис. 1.33. Наочне зображення точки К та її проекцій (Е ∈ z)
Fig. 1.33. Image du point K et ses projections (E ∈ z)

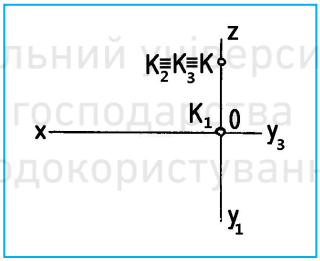


Рис. 1.34. Епюр точки К (К ∈ z)
Fig. 1.34. Epure du point K (K ∈ z)

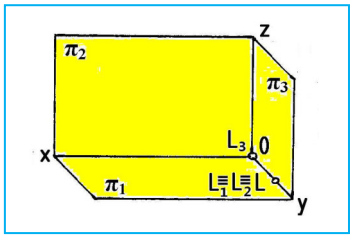


Рис. 1.35. Наочне зображення точки L та її проекцій (L ∈ y)
Fig. 1.35. Image du point L et ses projections (L ∈ y)

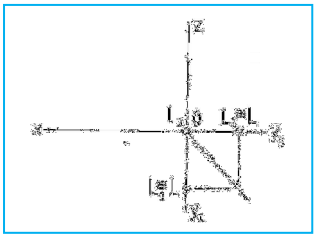


Рис. 1.36. Епюр точки L (L ∈y)
Fig. 1.36. Epure du point L (L ∈ y)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 1.33 дано наочне зображення точки К, яка лежить на осі *z*, тобто належить двом площинам проекцій π_2 і π_3 водночас ($z = \pi_2 \cap \pi_3$). У цієї точки координати *x* і *y* дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_2, і площині π_3, то фронтальна K_2 і профільна K_3 проекції точки К збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.34 дано епюр точки К, що лежить на осі проекцій *z*.

На рис. 1.35 дано наочне зображення точки L, яка лежить на осі *y*, тобто належить двом площинам проекцій π_1 і π_3 водночас ($y = \pi_1 \cap \pi_3$). У цієї точки координати *x* і *z* дорівнюють нулю. Оскільки точка належить і площині π_1, і площині π_3, то горизонтальна L_1 і профільна L_3 проекції точки L збігаються між собою і з самою точкою. На рис. 1.36 дано епюр точки L, що лежить на осі проекцій *y*.

Таким чином, у точок, що лежать на осях проекцій, тобто належать двом площинам проекцій водночас, дві координати дорівнюють нулю; це саме ті, які вказують на віддаленість точок від тих площин проекцій, на яких водночас лежать ці точки, при цьому дві з трьох проекцій даних точок збігаються між собою і з самою точкою.

L'image visuelle du point K, se trouvant sur l'axe *z, x*. et donc appartenant à deux plans de projections π_2 et π_3 simultanément ($z = \pi_2 \cap \pi_3$) est présenté sur la fig. 1.33. Les coordonnées *x* et *y* de ce point sont égales à zéro. Vue que le point appartient à la fois à deux plans π_2, et π_3, le plan frontal K_2 et celui de profil K_3 - projections du point K, coincident entre elles et avec le point même. Sur la fig 1.34 on voit l'épure du point K, se trouvant sur l'axe de projections *z.*

L'image visuelle du point L, se trouvant sur l'axe *y,* et, donc appartenant à deux plans de projections π_1 et π_3 simultanément ($y = \pi_1 \cap \pi_3$) est présentée sur la fig. 1.35. Les coordonnées *x* et *z* de ce point sont égales à zéro. Vue que le point appartient à la fois à deux plans π_1 et π_3, le plan horizontal L_1 et celui de profil L_3 - projections du point L, coincident entre elles et avec le point même. Sur la fig 1.36 on voit l'épure du point L, se trouvant sur l'axe de projections *y.*

Ainsi, les points, se trouvant sur les axes de projections, et donc, appartenant simultanément à deux plans de projections, possèdent les deux coordonnées égales à zéro, et ce sont notamment celles, qui indiquent l'éloignement des points de plans sur lequels ces points sont situés. En même temps deux de trois projections des points donnés coincident entre elles et avec le point même.

Національний університет
водного господарства

Нарисна геометрія. Розділ 2 Проекціювання прямої

2.1. Проекції прямої. Прямі загального положення

Пряма – найкоротша відстань між двома точками.

Проекцією прямої лінії в загальному випадку є також пряма лінія. Так, на рис. 2.1 дано наочне зображення прямої l і її проекцій – горизонтальної l_1 та фронтальної l_2 – в системі двох площин проекцій π_1 і π_2.

На рис. 2.2 дано епюр прямої l у вигляді прямих ліній – проекцій l_1 і l_2. Якщо пряма зображена прямими лініями, то вона сама і її проекції позначаються малими літерами латинського алфавіту – l, b, k тощо.

Пряма в просторі може бути визначена двома нетотожними точками. На рис. 2.3 дано наочне зображення прямої, що проходить через точки A і B простору. Отримавши горизонтальні (A_1, B_1) та фронтальні (A_2, B_2) проекції цих точок та провівши пряму через точки A_1 і B_1, дістанемо горизонтальну проекцію A_1B_1 прямої AB, а провівши пряму через точки A_2 і B_2, – фронтальну проекцію A_2 B_2 прямої AB.

На рис. 2.4 дано епюр прямої AB. Якщо пряма визначена двома

Géométrie descriptive. Chapitre 2 Projection d'une droite

2.1. Projections d'une droite. Lignes droites générales

La plus courte distance entre deux points est la ligne droite. En général la projection d'une droite c'est aussi la ligne droite. Ainsi la fig 2.1 propose la représentation visuelle de la droite l et celle de ses projections – horizontale l_1 et frontale l_2 – au système de deux plans de projections π_1 et π_2.

Sur la fig. 2.2 on voit l'épure de la droite l sous forme de droites – de projections l_1 et l_2. Si la droite est représentée par les lignes droites, alors elle-même et ses projections sont indiquées par les lettres minuscules de l'alphabet latin – l, b, k et ainsi de suite.

Une droite dans l'espace peut être entièrement déterminée par deux points distincts. La fig 2.3 propose l'image visuelle d'une droite qui passe à travers les points A et B de l'espace. Après avoir obtenu les projections horisontales (A_1, B_1) et frontales (A_2, B_2) de ces points et tracé la droite à travers les points A_1 et B_1, on obtient la projection horizontale A_1B_1 de la droite AB, et ce faisant à travers les points A_2 et B_2, – la projection frontale A_2B_2 de la droite AB.

La fig 2.4 représente l'épure de la ligne droite AB. Si la droite est

Національний університет
водного господарства
та природокористування

нетотожними точками, то вона і її проекції позначаються великими літерами латинського алфавіту за назвою двох її точок – AB, CD і т.д.	déterminée par deux points distincts, alors elle-même et ses projections sont indiquées par les lettres majuscules de l'alphabet latin par nomination de ses deux points – AB, CD et ainsi de suite.
Таким чином, пряму лінію на епюрі зображують: 1) прямими лініями – її проекціями (рис. 2.2); 2) проекціями двох її нетотожних точок (рис. 2.4).	Ainsi on peut représenter une droite sur l'épure par: 1) lignes droites – leurs projections (fig. 2.2); 2) projections de ses deux points distincts (fig. 2.4).
Залежно від розміщення прямих відносно площин проекцій розрізняють прямі загального положення, прямі рівня та проекціюючі прямі.	En fonction de l'emplacement des droites par rapport aux plans de projections on distingue les lignes droites générales, de niveau et projectives.
Прямі загального положення – це прямі, які не паралельні і не перпендикулярні до жодної з площин проекцій.	Les droites générales – sont les lignes droites qui ne sont pas ni parallèles ni perpendiculaires à aucun plan de projections.
На епюрі у прямих загального положення проекції не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x. Це характерна графічна ознака епюрів прямих загального положення, яка дозволяє відрізнити епюри прямих загального положення від епюрів прямих рівня та проекціюючих прямих. На рис. 2.2 і 2.4 зображено епюри прямих загального положення, оскільки l_1, A_1B_1 і l_2, A_2B_2 не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій x.	Sur l'épure les projections de lignes générales ne sont pas ni parallèles ni perpendiculaires à l'axe de projections x. C'est un trait graphique caractéristique des épures de directes générales, qui permet de distinguer les épures de directes générales de celles des lignes de niveau et projectives. Les fig. 2.2 et 2.4 représentent les lignes directes générales, puisque l_1, A_1B_1 et l_2, A_2B_2 ne sont pas ni parallèles ni perpendiculaires à l'axe de projections x .
З означення прямої загального положення випливає, що координати x, як і координати y	Il en résulte (définition de la droite générale) que les coordonnées x, de même que les coordonnées y et z

Національний університет
водного господарства
та природокористування

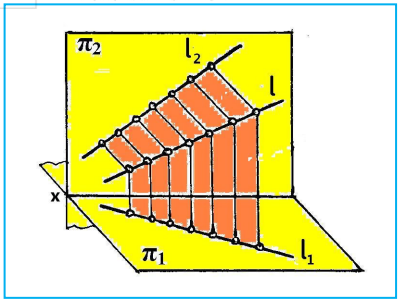


Рис. 2.1. Зображення прямої *l* у вигляді прямих ліній – її проекцій
Fig. 2.1. Image de la droite *l* sous forme des droites – ses projections

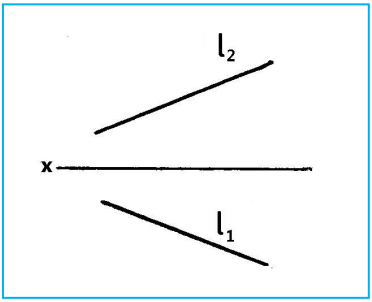


Рис. 2.2. Епюр прямої *l*
Fig. 2.2. Epure d'une directe *l*

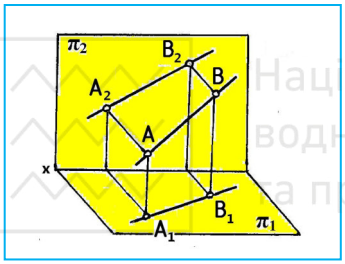


Рис. 2.3. Зображення прямої AB у вигляді проекцій двох її нетотожних точок
Fig. 2.3. Image de la droite AB sous forme des projections de ses deux points distincts

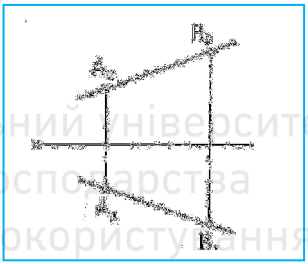


Рис. 2.4. Епюр прямої AB
Fig. 2.4. Epure de la directe AB

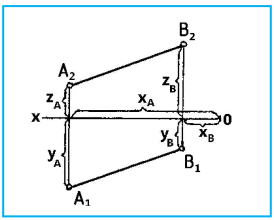


Рис. 2.5. Епюр прямої AB із зазначеними координатами точок A і B
Fig. 2.5. Epure de la droite AB avec les coordonnées désignées de points A et B

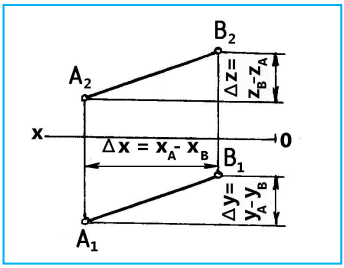


Рис. 2.6. Епюр прямої AB із зазначеними різницями координат точок A і B
Fig. 2.6. Epure de la directe AB aves les diifférences indiquées des coordonnées de points A et B

Національний університет
водного господарства
та природокористування

та z, двох будь-яких нетотожних точок цієї прямої мають різні числові значення (рис. 2.5). Лише прямій загального положення властиве те, що різниці всіх трьох координат двох її нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю (рис. 2.6).	de deux points quelconques distincts de cette droite possèdent de valeurs numériques différentes (fig. 2.5). Le fait, d'avoir les différences de toutes les trois coordonnées de ses deux points disticts d'une droite, qui ne sont pas égales à zéro, est propre à une seule droite générale (fig. 2.6).
Зазначимо проекційні властивості та координатні характеристики прямої загального положення:	Notons les propriétés projectives et les caractéristiques de coordonnées d'une droite:
1) на епюрі проекції прямої не паралельні і не перпендикулярні осям проекцій – це характерна графічна ознака, що властива лише прямій загального положення;	1) sur l'épure les projections d'une droite ne sont pas ni parallèles ni perpendiculaires aux axes de projections – c'est un indice graphique caractéristique, propre seulement à la directe générale;
2) кожна проекція відрізка прямої коротша за натуральну величину самого відрізка, оскільки пряма не паралельна до жодної з площин проекцій;	2) chaque projection d'un segment de la droite est plus courte que la grandeur naturelle du segment lui-même, puisque la droite n'est parallèle à aucun plan de projections;
3) різниці координат x, y, z двох нетотожних точок прямої не дорівнюють нулю.	3) la différence des coordonnées x, y, z de deux points distincts n'est pas égale à zéro.
2.2. Натуральна величина відрізка прямої загального положення. Сліди прямої	2.2. Grandeur naturelle d'un segment de la droite générale. Traces d'une droite
Оскільки проекції відрізка прямої загального положення коротші за натуральну величину самого відрізка, визначити дійсну величину відрізка безпосередньо за епюром неможливо. Проте існує спосіб, який називається	Du fait que les projections d'un segment de la droite générale sont plus courtes que la grandeur naturelle du segment lui-même, il est impossible de déterminer sa vraie grandeur selon l'épure Pourtant il existe un autre moyen,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

способом прямокутного трикутника, що дозволяє, виконавши деякі графічні побудови, визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення.

На рис. 2.7 дано наочне зображення відрізка АВ прямої загального положення та його проекцій – горизонтальної A_1B_1 та фронтальної A_2B_2. Кут α – це кут нахилу прямої АВ, що проходить через відрізок АВ до горизонтальної площини проекцій π_1. Він визначається як кут між самою прямою та її горизонтальною проекцією.

На рис. 2.7 також показано визначення натуральної величини відрізка прямої АВ та кута α її нахилу до площини проекцій π_1, а на рис. 2.8 – знаходження цих величин на епюрі.

На рис. 2.9 показано визначення натуральної величини відрізка АВ прямої загального положення та кута β її нахилу до площини проекцій π_2, а на рис. 2.10 – побудова цих величин на епюрі.

ВИСНОВКИ

Натуральна величина відрізка прямої загального положення визначається гіпотенузою прямокутного трикутника, у якого один з катетів – проекція відрізка прямої на одну з площин проекцій, а другий катет дорівнює

celui du triangle rectangle, permettant, après avoir exécuté quelques constructions graphiques, de définir la grandeur naturelle du segment de la droite générale.

Sur la fig. 2.7 on voit l'image visuelle du segment AB de la droite générale et de ses projections – horyzontale A_1B_1 et frontale A_2B_2. L'angle α – c'est l'angle d'inclinaison de la droite AB, passant à travers le segment AB vers le plan horizontal de projections π_1. Il est déterminé comme angle entre la droite elle-même et sa projection horizontale.

La fig.2.7 propose aussi la définition de la grandeur naturelle du segment de la droite AB et de l'angle α de son inclinaison au plan de projections π_1, et sur la fig 2.8 – l'emplacement de ces grandeurs sur l'épure.

La définition de la grandeur naturelle du segment AB de la droite générale et de l'angle β de son inclinaison au plan de projections et illustrée sur la fig. 2.9. π_2, et sur la fig. 2.10 – la construction de ces grandeurs sur l'épure.

CONCLUSIONS

La grandeur naturelle du segment de la droite générale et déterminée par l'hypoténuse du triangle rectangle, dont l'un des castets – c'est la projection du segment sur un des plans de projections, et le deuxième castet est égal

Національний університет
водного господарства
та природокористування

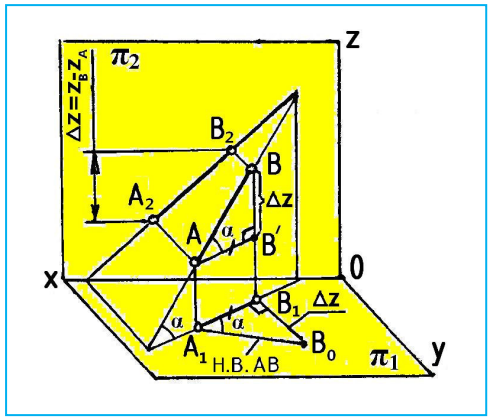


Рис. 2.7. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проекцій π_1
Fig. 2.7. Définition de la grandeur naturelle (H.B.) d'un segment de la droite générale AB et de l'angle d'inclinaison α de la droite au plan de projections π_1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

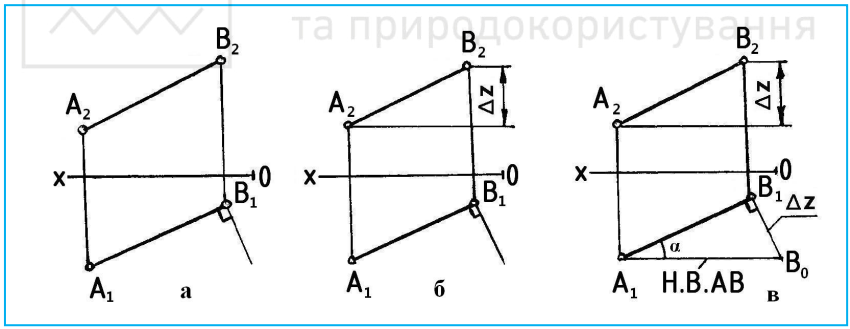


Рис. 2.8. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу α прямої до площини проекцій π_1 (а –1 дія, б – 2 дія, в – 3 дія)
Fig. 2.8. Définition sur épure de la grandeur naturelle (H.B.) d'un segment de la droite générale AB et de l'angle d'inclinaison α de la droite au plan de projections π_1 (а – 1 manipulation, б – 2 manipulation, в – 3 manipulation)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

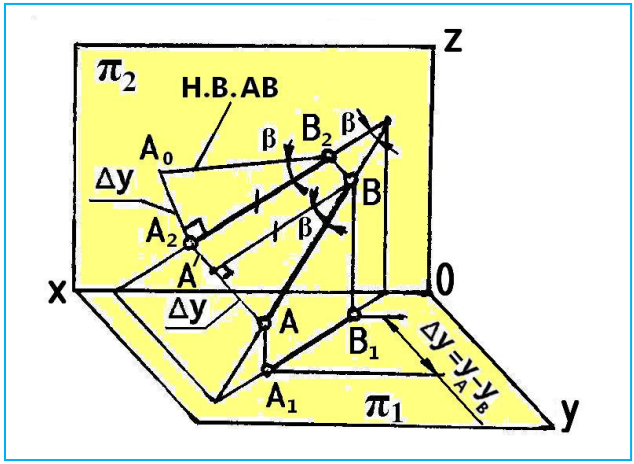


Рис. 2.9. Визначення на наочному зображенні натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проекцій π_2

Fig. 2.9. Définition de la grandeur naturelle (H.B.) d'un segment de la droite générale AB et de l'angle d'inclinaison β de la droite au plan de projections π_2

Національний університет
водного господарства
та природокористування

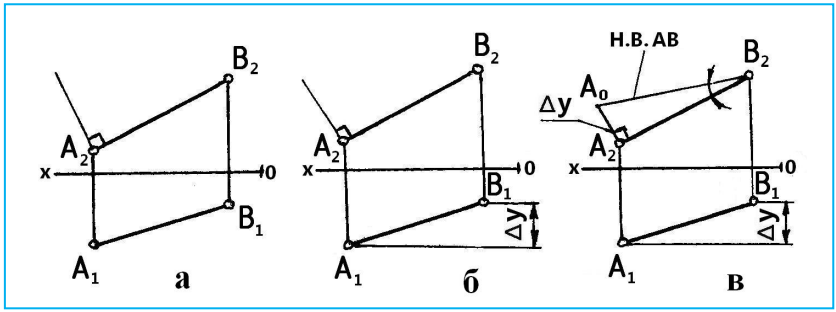


Рис. 2.10. Визначення на епюрі натуральної величини (Н.В.) відрізка прямої АВ загального положення та кута нахилу β прямої до площини проекцій π_2 (а – 1 дія, б – 2 дія, в – 3 дія)

Fig. 2.10. Définition sur épure de la grandeur naturelle (H.B.) d'un segment de la droite générale AB et de l'angle d'inclinaison β de la droite au plan de projections π_2 (а – 1 manipulation, б – 2 manipulation, в – 3 manipulation)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

різниці відстаней точок – кінців відрізка прямої – до тієї площини проекцій, на якій побудований прямокутний трикутник.	à la différence de distances des points – des extrémités du segment de la droite – au plan, sur lequel le triangle rectangle est construit.
Із цього прямокутного трикутника визначають кут нахилу прямої до тієї площини проекцій, на якій побудований прямокутний трикутник. Цей кут дорівнює куту між гіпотенузою та катетом – проекцією.	En partant de ce triangle rectangle on détermine l'angle d'inclinaison par rapport au plan de projections, sur lequel est construit le triangle rectangle. Cet angle est égal à l'angle entre l'hypoténuse et le castet – projection.
Слідом прямої лінії називається точка перетину прямої з площиною проекцій. На рис. 2.11 точка M – точка перетину прямої AB з горизонтальною площиною проекцій π_1, а точка N – точка перетину прямої AB з фронтальною площиною проекцій π_2. Ці точки мають такі назви: - точка M – горизонтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_1); - точка N фронтальний слід прямої (точка перетину прямої з площиною π_2).	Le point d'intersection d'une droite avec l'axe de projections est appelé la trace d'une droite Sur la fig. 2.11 le point M – point d'intersection de la droite AB avec le plan horizontal de projections π_1, et le point N – point d'intersection de la droite AB avec le plan frontal de projections π_2. Ces points portent les noms suivants: – point M – trace horizontale de la droite (point d'intersection de la droite avec le plan π_1); – point N – trace frontale de la droite (point d'intersection de la droite avec le plan π_2).
На рис. 2.12 і 2.13 показано послідовність побудови слідів прямої відповідно на наочному зображенні та епюрі.	Sur les fig. 2.12 et 2.13 on observe la séquence de construction des traces d'une droite respectivement sur l'image visuelle et l'épure.
2.3. Прямі часткового положення	2.3. Droites partielles
Прямі часткового положення – це прямі рівня та проекціюючі прямі.	Les droites partielles – ce sont les droites de niveau et les droites projectives

Національний університет
водного господарства
та природокористування

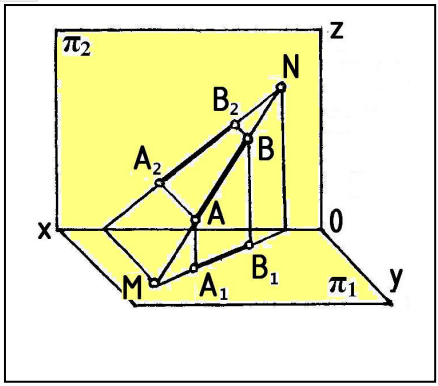


Рис. 2.11. Сліди прямої AB (M – горизонтальний слід прямої, M = AB ∩ π1; N – фронтальний слід прямої, N = AB ∩ π2)
Fig. 2.11. Traces de la droite AB (M –piste horizontale de la droite, M = AB ∩ π1; N – trace fronbtale de la droite N = AB ∩ π2)

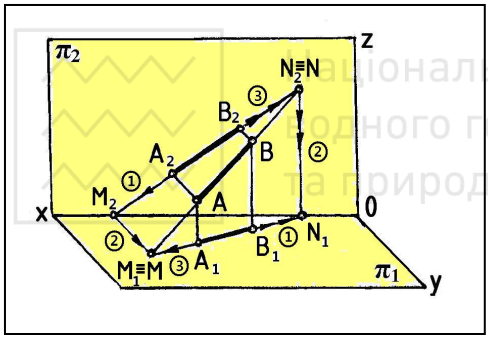


Рис.2.12. Послідовність побудови слідів прямої
Fig. 2.12.Séquence de construction des traces de la droite

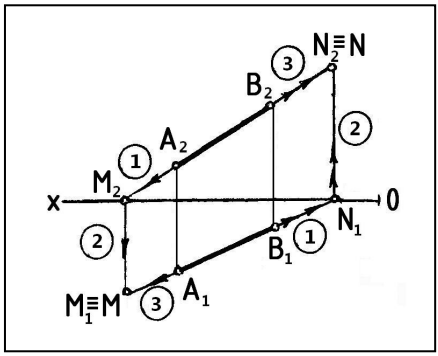


Рис.2.13. Послідовність побудови слідів прямої на епюрі
Fig. 2.13. Séquence de construction des traces de la droite sur l'épure

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Прямими рівня називають прямі, які паралельні до однієї з площин проекцій, а проекціюючими – прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій. Слід зазначити, що проекціюючі прямі, які перпендикулярні до однієї з площин проекцій, паралельні водночас до двох інших площин проекцій. Тобто, прямі часткового положення паралельні до однієї (прямі рівня) або до двох площин проекцій (проекціюючі прямі).	Les droites de niveau se sont les droites, parallèles à un des plans de projections, et les lignes projectives – sont celles perpendiculaires à un des plans de projections. Il est à noter, que les droites projectives, qui sont perpendiculaires à un des plans de projections, sont simultanément parallèles à deux autres plans de projections. Ansi, les droites partielles sont parallèles à un (droites de niveau) ou deux plans de projections (droites projectives).
Розглянемо прямі часткового положення в системі двох площин проекцій.	Examinons les droites partielles au système de deux plans de projections.
<u>Прямі рівня</u> 2.3.1. Пряма рівня, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтальною прямою або горизонталлю і позначається буквою h. На рис. 2.14-2.17 дано наочне зображення та епюр горизонтальної прямої AB. Горизонтальна пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики: 1) фронтальна проекція паралельна до осі *x*. Це характерна графічна ознака, яка притаманна саме цій прямій (на рис. 2.14-2.17 $A_2B_2 // x$);	<u>Droites de niveau</u> 2.3.1. La droite de niveau, qui est parallèle au plan horizontal de projections est appelée la droite horizontale ou l'horizontale et désignée par la lettre h. Les fig. 2.14-2.17 proposent la représentation visuelle et l'épure de la ligne horizontale AB. La droite horisontale possède les propriétés projectives et caractéristiques de coordonnées suivantes: 1) la projection frontale est parallèle à l'axe *x*. C'est une indice graphique caractéristique, propre, notamment à cette droite (sur les fig. 2.14-2.17 $A_2B_2 // x$);

Національний університет
водного господарства
та природокористування

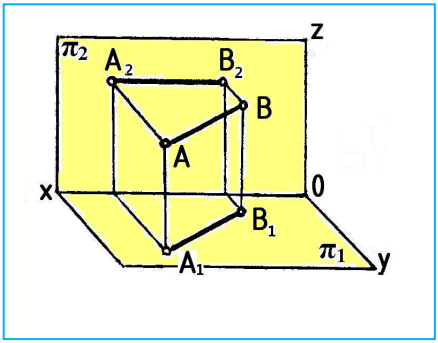


Рис. 2.14. Наочне зображення горизонтальної прямої АВ (АВ ‖π_1, A_2B_2 ‖x)
Fig. 2.14. Image visuelle de la droite horizontale AB (AB ‖π_1, A_1B_1 ‖x)

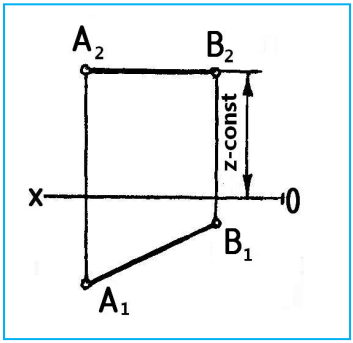


Рис. 2.15. Епюр горизонтальної прямої АВ
Fig. 2.15. Epure de la droite horizontale AB (A_2B_2 ‖x)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

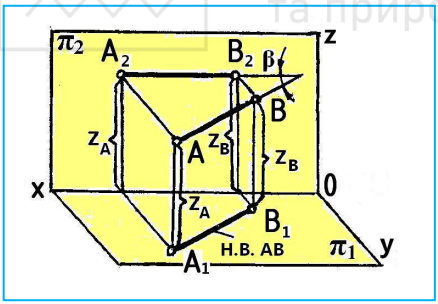


Рис. 2.16. Наочне зображення горизонтальної прямої АВ (∠ β – кут нахилу прямої до площини π_2 , A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)
Fig. 2.16. Image visuellede la droite horizontale AB (∠ β –angle d'inclinaison au plan **π** A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)

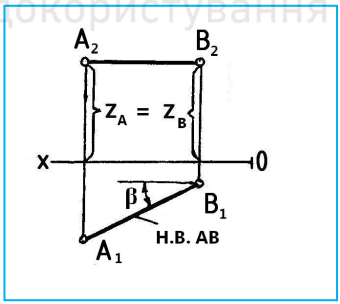


Рис. 2.17. Епюр горизонтальної прямої АВ (∠ β –кут нахилу прямої до площини π_2 , A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)
Fig. 2.17. Epure de la droite AB (∠ β – angle d'inclinaison au plan **π**, A'B' = H.B. AB , $z_A = z_B$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

2) координата z всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.15-2.17);	2) la coordonnée z de tous les points de la droite est une valeur constante (fig. 2.15-2.17);
3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.14-2.17 A_1B_1 = Н.В. AB, A_1B_1 // AB);	3) la projection horizontale d'un segment de la droite détermine la grandeur naturelle du segment lui-même de la droite et est parallèle à ce dernier (sur les fig 2.14-2.17 A_1B_1 = H.B. AB, A_1B_1 // AB);
4) $\angle\beta$ – кут нахилу горизонтальної прямої до площини π_2 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.	4) $\angle\beta$ – angle d'inclinaison de la droite horizontale au plan π_2 et, est définie directement selon l'épure sans constructions graphiques complémentaires.
2.3.2. Пряма рівня, яка паралельна до фронтальної площини проекції, називається фронтальною прямою або фронталлю і позначається буквою f.	2.3.2. Une droite de niveau, parallèle au plan frontal de la projection, est appelée la droite frontale, ou la frontale et, est désignée par la lettre f.
На рис. 2.18-2.21 дано наочне зображення та епюр фронтальної прямої CD.	Les fig. 2.18-2.21 proposent l'image visuelle et l'épure de la droite frontale CD.
Фронтальна пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:	La droite frontale possède les propriétés projectives et les caractéristiques de coordonnées suivantes:
1) горизонтальна проекція паралельна до осі x. Це характерна графічна ознака цієї прямої (на рис. 2.18-2.21 C_1D_1 // x);	1) La projection horizontale est parallèle à l'axe x. C'est une indice graphique propre à cette droite (sur les fig. 2.18-2.21 C_1D_1 // x);
2) координата y всіх точок прямої є сталою величиною (рис. 2.19-2.21);	2) La coordonnée y de tous les points de la droite est une valeur constante (les. fig. 2.19-2.21);
3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка прямої і паралельна до нього (на рис. 2.18-2.21 C_2D_2 = НВ	3) La projection frontale d'un segment de la droite détermine la grandeur naturelle du segment lui-même de la droite et, est parallèle à ce dernier (sur les fig. 2.18-2.21 C_2D_2 = H.B. CD, C_2D_2 // CD);

Національний університет
водного господарства
та природокористування

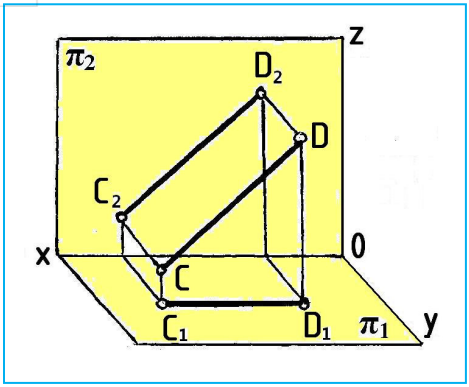


Рис. 2.18. Наочне зображення фронтальної прямої CD (CD $\|\pi_2$, $C_1D_1 \| x$)
Fig. 2.18. Image visuelle de la droite frontale CD (CD $\|\pi_2$, $C_1D_1 \| x$)

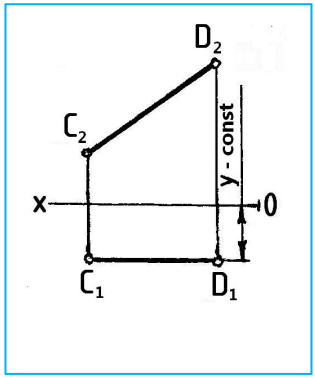


Рис. 2.19. Епюр фронтальної прямої CD ($C_1D_1 \| x$)
Fig. 2.19. Epure de la droite frontale CD ($C_1D_1 \| x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

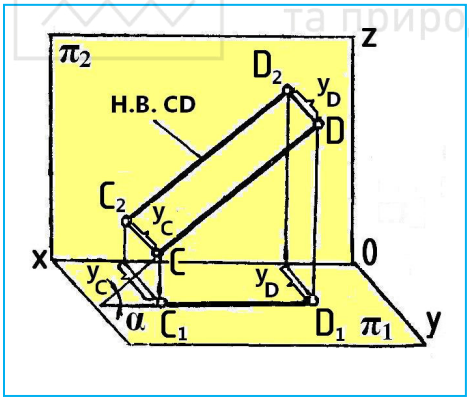


Рис. 2.20. Наочне зображення фронтальної прямої CD (∠ α – кут нахилу прямої до площини π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)
Fig. 2.20. Image visuelle de la droite frontale AB (∠α – angle d'inclinaison de la droite au plan π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)

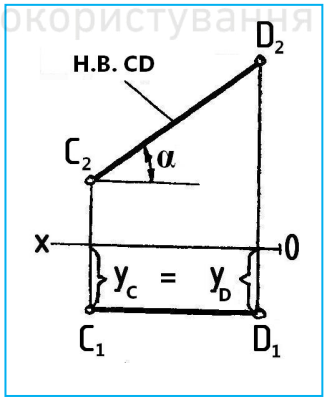


Рис. 2.21. Епюр фронтальної прямої CD (∠ α – кут нахилу прямої до площини π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)
Fig. 2.21. Epure de la droite frontale CD (∠ α – angle d'inclinaison de la droite au plan π_1 , C_2D_2 = H.B. CD , $y_c = y_D$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

CD, C_2D_2 // CD);

4) $\angle\alpha$ – кут нахилу фронтальної прямої до площини π_1 і визначається безпосередньо за епюром без додаткових графічних побудов.

ВИСНОВКИ

На площину проекцій, до якої пряма рівня паралельна, її відрізок проекціюється в натуральну величину, а на іншу площину проекцій – паралельно до осі проекцій. За епюром без додаткових графічних побудов визначається величина кута нахилу прямої до тієї площини проекцій, до якої пряма рівня не паралельна.

Проекціюючі прямі

2.3.3. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтально-проекціюючою прямою.

На рис. 2.22-2.25 дано наочне зображення та епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB.

Горизонтально-проекціююча пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:

1) горизонтальна проекція прямої – точка, а фронтальна проекція перпендикулярна осі x (на рис. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$);

2) координати x і y всіх точок

4) $\angle\alpha$ – l'angle d'inclinaison de la droite frontale au plan π_1 est déterminé directement selon l'épure sans constructions graphiques complémentaires.

CONCLUSIONS

Le segment de la droite se projette en sa grandeur naturelle au plan de projections, dont la droite de niveau est parallèle, et par rapport à un autre plan de projections – parallèlement à l'axe de projections. La grandeur de l'angle d'inclinaison de la droite au plan, dont la droite de niveau n'est pas parallèle, est définie selon l'épure sans constructions graphiques complémentaires.

Droites projectives

2.3.3. La droite projective perpendiculaire au plan horizontal de projections est appelée l'horizontale projective

Les fig. 2.22-2.25 illustrent l'image visuelle et l'épure de la droite horizontale projective AB.

L'horizontale projective possède les propriétés projectives et caractéristiques de coordonnées suivantes:

1) est point la projection horizontale de la droite, la projection frontale est perpendiculaire à l'axe x (sur les fig. 2.22-2.25 $A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$);

2) les coordonnées x et y de tous les points

Національний університет
водного господарства
та природокористування

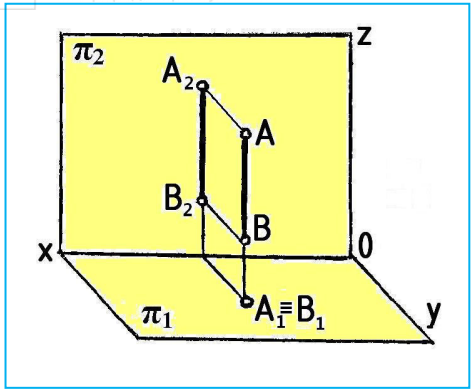


Рис. 2.22. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB)

Fig. 2.22. Image visuelle de l'horizontale projective ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB)

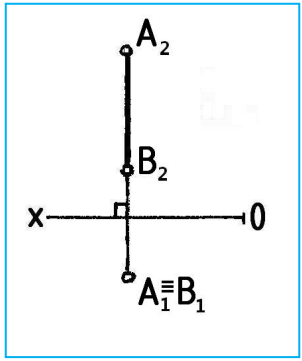


Рис. 2.23. Епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Fig. 2.23. Epure de l'horizontale projective ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

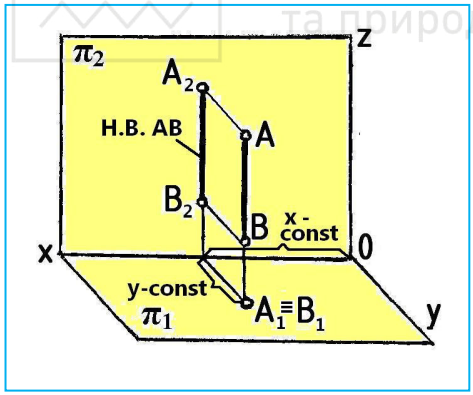


Рис. 2.24. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB, A_2B_2 = H.B. AB)

Fig. 2.24. Image visuelle de l'horizontale projective ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 // AB, A_2B_2 = H.B. AB)

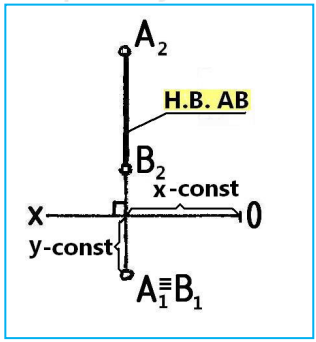


Рис. 2.25. Епюр горизонтально-проекціюючої прямої AB ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 = H.B. AB)

Fif. 2.25. Epure de l'horizontale projective ($A_1 \equiv B_1$, $A_2B_2 \perp x$, A_2B_2 = H.B. AB)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

прямої – сталі величини (див. рис. 2.24, 2.25);

3) фронтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.22-2.25 A_2B_2 = НВ AB, A_2B_2 //AB).

2.3.4. Проекціююча пряма, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально-проекціюючою прямою.

На рис. 2.26 - 2.29 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої прямої CD.

Фронтально-проекціююча пряма має такі проекційні властивості та координатні характеристики:

1) фронтальна проекція прямої – точка, а горизонтальна проекція перпендикулярна осі x (на рис. 2.26-2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$);

2) координати x і z всіх точок прямої – сталі величини (див. рис. 2.28, 2.29);

3) горизонтальна проекція відрізка прямої визначає натуральну величину самого відрізка і паралельна до нього (на рис. 2.26-2.29 C_1D_1 = Н.В. CD).

ВИСНОВКИ

На площину проекції, до якої проекціююча пряма перпендикулярна, вона проекціюється в точку, а на іншу площину

de la droite – sont des valeurs constantes (voir fig. 2.24, 2.25);

3) la projection frontale d'un segment de la droite détermine la grandeur naturelle du segment lui-même et, est parallèle à ce dernier (sur les fig. 2.22-2.25 A_2B_2 = HB AB, A_2B_2 //AB).

2.3.4. La droite projective, perpendiculaire au plan frontal de projections, est appelée la frontale projective.

Sur les fig. 2.26–2.29 on voit l'image visuelle et l'épure de la frontale projective CD.

La droite frontale projective possède les propriétés projectives et caractéristiques de coordonnées suivantes:

1) la projection frontale de la droite – est un point, et la projection horizontale est perpendiculaire à l'axe x (sur les fig. 2.26-2.29 $C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$);

2) les coordonnées x et z de tous les points – sont des valeurs constantes (voir fig. 2.28, 2.29);

3) la projection horizontale d'un segment de la droite détermine la grandeur naturelle du segment lui-même et, est parallèle à ce dernier (sur les fig. 2.22-2.25 C_1D_1 = H.B. CD).

CONCLUSIONS

La droite projective se projette au point sur le plan de projections dont elle est perpendiculaire,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

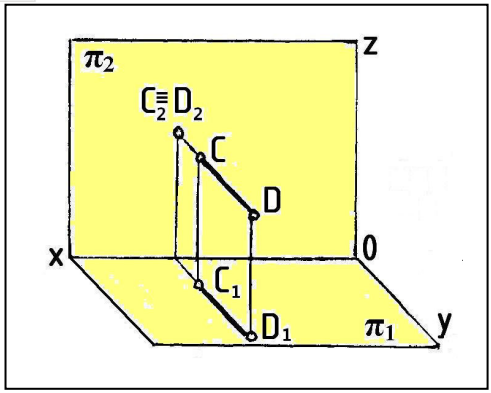


Рис. 2.26. Наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD)

Fig. 2.26. Image visuelle de la frontale projective CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD)

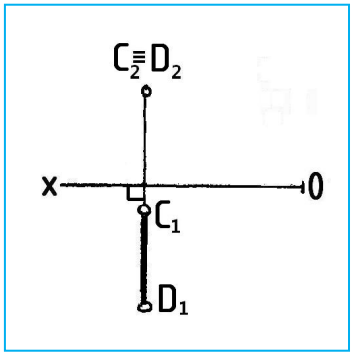


Рис. 2.27. Епюр фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

Fig. 2.27. Epure de la frontale projective CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

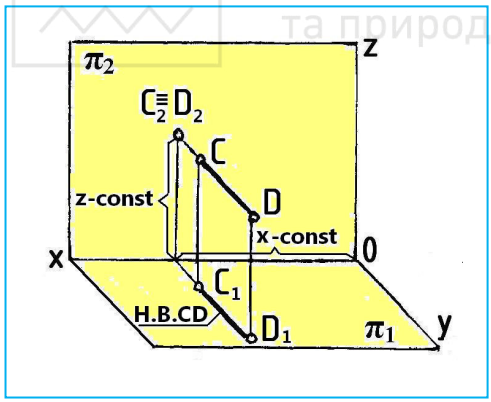


Рис. 2.28. Наочне зображення фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD, C_1D_1 = H.B. CD)

Fig. 2.28. Image visuelle de la frontale projective CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 // CD, C_1D_1 = H.B. CD)

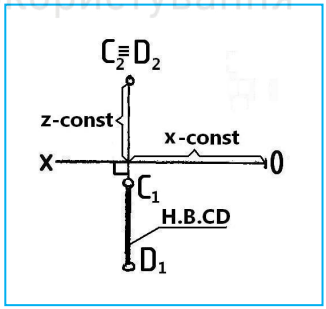


Рис. 2.29. Епюр фронтально-проекціюючої прямої CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 = H.B. CD)

Fig. 2.29. Epure de la frontale projective CD ($C_2 \equiv D_2$, $C_1D_1 \perp x$, C_1D_1 = H.B. CD)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцій, до якої вона паралельна, – перпендикулярно до осі проекцій, а її відрізок – в натуральну величину.	étant en grandeur naturelle.
2.4. Взаємне положення двох прямих	2.4. Disposition mutuelle de deux droites
Точка належить прямій, якщо на епюрі проекції точки належать однойменним проекціям прямої.	Un point appartient à une droite, lorsque sur l'épure, les projections du point appartiennent aux mêmes noms de projections d'une droite.
На рис. 2.30 тільки точка D належить прямій f, оскільки $D_1 \equiv f_1$ і $D_2 \equiv f_2$. Решта точок не належать прямій f.	Sur la fig 2.30, seule, le point D appartient à la droite f, puisque $D_1 \equiv f_1$ et $D_2 \equiv f_2$. Les autres points n'appartiennent pas à la droite f.
Прямі в просторі можуть бути:	Les droites dans l'espace sont:
1) паралельними;	1) parallèles;
2) прямими, що перетинаються (пересічними прямими);	2) sécantes (lignes d'intersection)
3) мимобіжними, тобто прямими, що не паралельні і не перетинаються.	3) lignes de croisement, c'est à dire celles qui ne sont pas parallèles et sécantes.
2.4.1. Проекції паралельних прямих на площини проекцій, до яких вони не перпендикулярні, паралельні між собою або паралельні та збігаються.	2.4.1. Les projections des lignes parallèles sur les plans de projections, par rapport auxquels elles ne sont pas perpendiculaires, sont parallèles et coïncident.
На рис. 2.31, 2.32 дано епюри паралельних прямих ($l \parallel m$ і $k \parallel n$), оскільки $l_1 \parallel m_1$ і $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ і $k_1 \equiv n_1$.	Sur les fig 2.31, 2.32 on voit les épures des droites parallèles x ($l \parallel m$ et $k \parallel n$), puisque $l_1 \parallel m_1$ et $l_2 \parallel m_2$, $k_2 \parallel n_2$ et $k_1 \equiv n_1$.
2.4.2. Проекції прямих, що перетинаються, проекціюються на площини проекцій прямими лініями, що також перетинаються, або перетинаються та збігаються, причому точки перетину	2.4.2. Les projections des droites sécantes se projettent sur les plans de projections par les droites qui s'intersectent aussi, ou s'intersectent et coïncident, de plus les points d'intersection

Національний університет
водного господарства
та природокористування

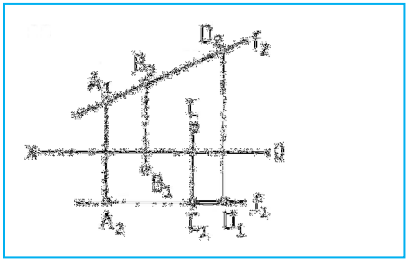


Рис. 2.30. Приналежність точки прямій лінії
Fig. 2.30. Appartenance du point à la droite

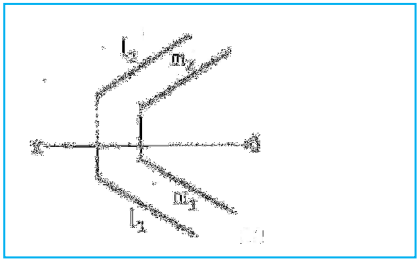


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих *l* і *m*
Fig. 2.31. Epure des lignes parallèles *l* et *m*

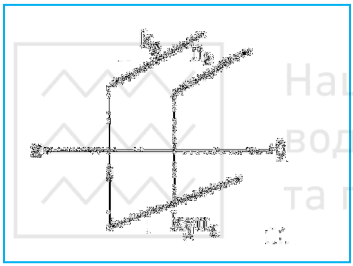


Рис. 2.31. Епюр паралельних прямих *k* і *n*
Fig. 2.31. Epure des droites parallèles *k* et *n*

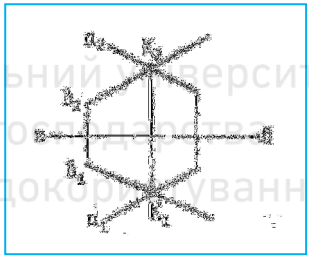


Рис. 2.32. Епюр прямих *a* і *в*, що перетинаються
Fig. 2.32. Epure des droites sécantes *a* et *в*

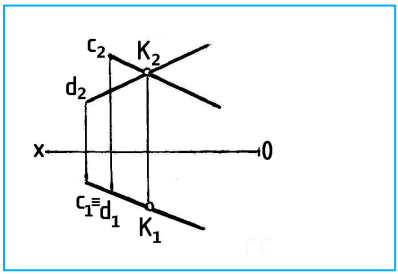


Рис. 2.33. Епюр прямих *c* і *d*, що перетинаються
Fig. 2.33. Epure des droites sécantes *c* et *d*

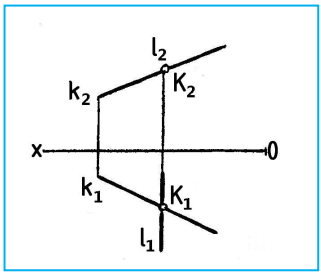


Рис. 2.34. Епюр прямих *k* і *l*, що перетинаються
Fig. 2.34. Epure des droites sécantes *k et l*

Національний університет водного господарства

однойменних проекцій прямих лежать на одній лінії проекційного зв'язку, оскільки є проекціями однієї і тієї ж точки – точки перетину прямих.

На рис. 2.33 дано епюр прямих a і b, що перетинаються в точці К, оскільки $К_1 = a_1 \cap b_1$, $К_2 = a_2 \cap b_2$ (горизонтальна проекція $К_1$ і фронтальна проекція $К_2$ точки К лежать на одній вертикальній лінії проекційного зв'язку).

На рис. 2.34, 2.35 дано також епюри пересічних прямих c, d і k, l, що перетинаються в точці К. Прямі c, d і k, l лежать в одній площині, яка перпендикулярна до π_1 (рис. 2.34) і до π_2 (рис. 2.35). За проекціями цих прямих, які не збігаються, видно, що це епюри не паралельних прямих, а саме пересічних прямих.

2.4.3. Якщо прямі мимобіжні, тобто не паралельні і не перетинаються, то точки перетину їх однойменних проекцій не лежать на одній лінії проекційного зв'язку, а проекції ніколи не збігаються.

Через дві мимобіжні прямі неможливо провести одну площину, тобто мимобіжні прямі не можуть лежати в одній площині,на відміну від паралельних прямих та прямих, що перетинаються, а, отже, їх

des projections de même nom sont sur la même ligne de la connexion projective, car elles sont les projections du même point – celui d'intersection des droites.

La fig. 2.33 propose l'épure des droites a et b, qui s'intersectent au point К, puisque $К_1 = a_1 \cap b_1$, $К_2 = a_2 \cap b_2$ (la projection horizontale $К_1$ et la projection frontale $К_2$ du point К sont situées sur la même ligne verticale de la connexion projective).

Les fig. 2.34, 2.35 représentent aussi les épures de droites sécantes c, d et k, l, s'intersectant au point К. Les droites c, d et k, l sont situées sur le même plan, perpendiculaire aux π_1 (fig. 2.34) et π_2 (fig. 2.35). D'après les projections de ces droites, qui ne coïncident pas, il est évident que ce ne sont des épures de droites parallèles, mais celles, de droites sécantes.

2.4.3. Si les droites se croisent, c'est à dire ne sont pas parallèles et ne s'intersectent pas, les points d'intersection de leurs projections homologues ne se trouvent pas sur la même ligne de connexion projective, et les projections ne coïncident jamais.

Il est impossible de tracer un plan à travers deux droites de croisement, ceci dit que, ces dernières ne peuvent se situer sur le même plan, contrairement aux droites parallèles et sécantes, et donc, leurs

Національний університет
водного господарства

проекції ніколи не збігаються.

На рис. 2.36 і 2.37 дано епюр прямих *a*, *b* і *c*, *d*. Незважаючи на те, що проекції прямих перетинаються, тільки на рис. 2.36 зображено епюр прямих, що перетинаються, оскільки 1_1 і 1_2 лежать на одній лінії проекційного зв'язку. На рис. 2.37 зображено епюр мимобіжних прямих, оскільки 1_1 (точка перетину c_1 і d_1) і точка 1_2 (точка перетину c_2 і d_2) не лежать на одній лінії проекційного зв'язку.

Можна іншим способом визначити, що прямі *c* і *d* – мимобіжні (рис. 2.38). З точки 1_2 проводимо вертикальну лінію проекційного зв'язку, яка перетинає як c_1, так і d_1, тобто точка 1 може належати як прямій *c*, так і прямій *d*, а, отже, точка 1 не є точкою перетину прямих *c* і *d*. А на рис. 2.36 точка 1 належить як прямій *a*, так і прямій *b*, тобто є точкою перетину прямих *a* і *b*.

На рис. 2.39 дано наочне зображення мимобіжних прямих *a* і *b*, а на рис. 2.40 – їх епюр.

Для мимобіжних прямих характерна наявність конкуруючих точок, за допомогою яких визначають видимість елементів геометричних фігур на епюрі. Конкуруючими називаються точки, які лежать на одній лінії

projections ne coïncident jamais.

L'épure des droites *a*, *b* et *c*, *d* est représentée sur la fig. 2.36 et 2.37. Malgré le fait, que les projections de droites s'intersectent, c'est uniquement la fig. 2.36 représente l'épure des droites sécante, puisque 1_1 et 1_2 se situent sur la même ligne de la connexion projective. Sur la fig. 2.37 on voit l'épure des droites de croisement, car 1_1 (point d'intersection c_1 et d_1) et le point 1_2 (point d'intersection c_2 et d_2) ne se situent pas sur la même ligne de la connexion projective.

Il existe un autre moyen de définir le fait de croisement des droites *c* et *d* – (fig. 2.38). On mène la ligne verticale de la connexion projective à partir du point 1_2, celle-là intersecte c_1, ainsi que d_1, c'est à dire le point 1 peut appartenir, à la fois, à la droite *c*, et à la droite *d*, par conséquent le point 1 n'est pas le point d'intersection des droites *c* et *d*. Sur la fig 2.36 le point 1appartient à la fois à la droite *a* et à la droite *в*, donc, est le point d'intersection des droites *a* et *b*.

La fig. 2.39 propose l'image visuelle des droites de croisement *a* et *b*, et celle fig. 2.40 – leur épure.

La présence des points concourants est caractéristique pour les droites de croisement, à l'aide de lesquels on détermine la visibilité des éléments de figures géométriques sur l'épure. Sont concourants les points se trouvant sur la même ligne

Національний університет
водного господарства
та природокористування

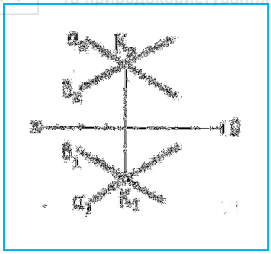


Рис. 2.36. Епюр пересічних прямих *а* і *в*
Fig. 2.36. Epure des droites de croisement *a* et *в*

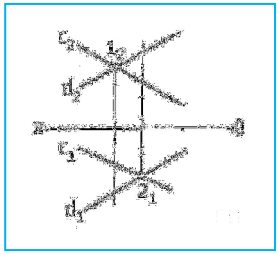


Рис. 2.37. Епюр мимобіжних прямих *с* і *d*
Fig. 2.37. Epure desdroites de croisement *c* et *d*

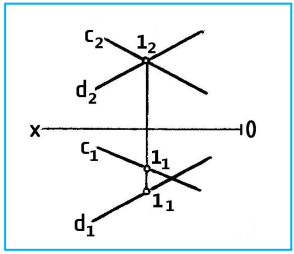


Рис. 2.38. Епюр мимобіжних прямих *с* і *d*
Fig. 2.38. Epure des droites de croisement *c* et *d*

Національний університет
водного господарства
та природокористування

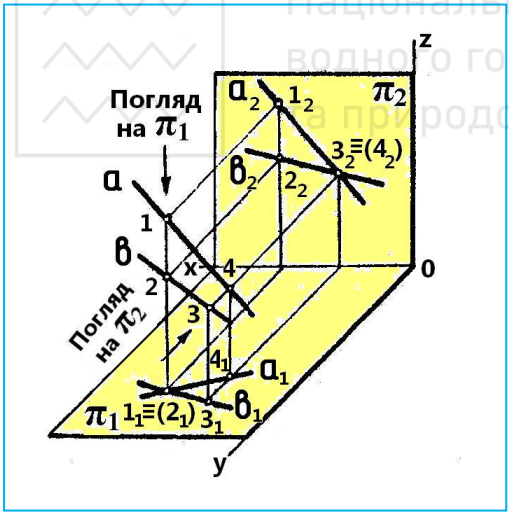


Рис. 2.39. Наочне зображення мимобіжних прямих *а* і *в* (1, 2 і 3, 4 – пари конкуруючих точок)
Fig. 2.39. Image visuelle des droites de croisement *a* et *в* (1, 2 et 3, 4 – paires de points concourants)

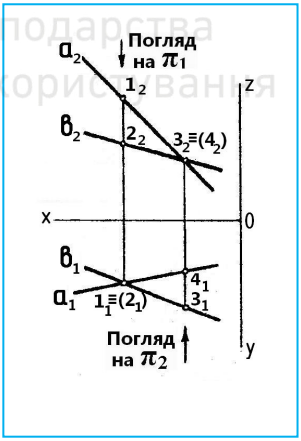


Рис. 2.40. Епюр мимобіжних прямих *а* і *в* (1, 2 і 3, 4 – пари конкуруючих точок)
Fig. 2.40. Epure des droites de croisement *a* et *в* (1, 2 et 3, 4 – paires de points concourants)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекційного зв'язку (див. рис. 1.3).

На рис. 2.39 пари точок 1, 2 і 3, 4 є конкуруючими точками. Точки 1 і 2 лежать на одній горизонтально-проекціюючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_1, тому горизонтальні проекції цих точок збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). Точки 3 і 4 лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, яка перпендикулярна до площини π_2, тому фронтальні проекції цих точок збігаються ($3_2 \equiv 4_2$).

Отже, якщо проекції обох точок збігаються, то це означає, що ці точки є конкуруючими і лежать на одній проекціюючій прямій.

З двох конкуруючих точок видимою відносно площин проекцій буде та, у якої проекція, що не збігається з проекцією іншої конкуруючої точки, розміщена далі від осі *x*, тобто ця точка буде знаходитися ближче до спостерігача.

Видимість елемента фігури на епюрі розв'язується для кожної проекції елемента окремо, а саме для тієї проекції елемента, на якій проекції конкуруючих точок збігаються.

Видимість елементів фігури зводиться до визначення видимості проекцій конкуруючих точок, що збігаються, і належать заданим елементам.

(voir. fig. 1.3).

Sur la fig. 2.39 les paires de points 1,2 et 3,4 sont de points concourants. Les points 1 et 2 se trouvent sur la même horizontale projective, perpendiculaire au plan π_1, c'est pourquoi les projections horizontales de ces points coïncident ($1_1 \equiv 2_1$). Les points 3 et 4 se situent sur la même drroite projective frontale, qui est perpendiculaire au plan de projections π_2, c'est pourquoi les projections frontales de ces points coïncident ($3_2 \equiv 4_2$).

Par conséquent, lorsque les projections de deux points coïncident, cela veut dire, que ces points sont concourants et se trouvent sur la même droite projective.

Le point visible, par rapport aux plans de projections, parmi les deux points concourants, sera celui, dont la projection, qui ne coïncide pas avec la projection de l'autre point concourant, est situé plus loin de l'axe *x*, c'est à dire ce point se trouve plus près de l'observateur.

La visibilité d'un élément de la figure sur l'épure est résolue individuellement pour chaque projection d'un élément, et notamment pour telle projection d'un élément, dont les projections de points concourants coïncident.

La visibilité des éléments d'une figure se réduit à la définition de la visibilité des projection de points concourants, qui coïncident, et appartiennent aux éléments donnés.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

На рис. 2.40 серед конкуруючих точок 1 і 2 видимою на π_1 є точка 1, фронтальна проекція 1_2 якої розміщена далі від осі x, а сама точка 1 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_1 буде точка 2, тому її горизонтальну проекцію 2_1 взяли в дужки. Серед конкуруючих точок 3 і 4 видимою є точка 3, горизонтальна проекція 3_1 якої розміщена далі від осі x, а сама точка 3 – ближче до спостерігача. Невидимою на π_2 буде точка 4, тому її фронтальну проекцію 4_2 взяли в дужки.

На рис. 2.41 показано, як за допомогою конкуруючих точок визначено видимість ребер піраміди ABCS.

Точки 1 і 2 є конкуруючими, що лежать на одній горизонтально-проекціюючій прямій, їх горизонтальні проекції збігаються ($1_1 \equiv 2_1$). За допомогою цих точок визначено видимість горизонтальних проекцій A_1S_1 і B_1C_1 ребер AS і BC, які є мимобіжними прямими (1 Є AS, 2 Є BC). Горизонтальна проекція 1_1 є видимою, а 2_1– невидимою, оскільки точка 1_2 розміщена далі від осі x, ніж точка 2_2. Точка 1 належить ребру AS, тому горизонтальна проекція A_1S_1 ребра AS буде видимою, а ребра BC – невидимою, оскільки точка 2_1 невидима.

Parmi les points concourants 1et 2, représentés sur la fig. 2.40, le point 1 est visible sur π_1, dont la projection frontale 1_2 est située plus loin de l'axe x, et le point 1 – plus près de l'observateur. Le point 2 est invisible sur π_1, c'est pourquoi sa projection horizontale 2_1 est prise entre parenthèses. Parmi les points concourants 3 et 4, le point 3 est visible, dont la projection horizontale 3_1 est située plus loin de l'axe x, et le point 3 – plus près de l'observateur. Le point 4 est invisible sur π_2, c'est pourquoi sa projection frontale 4_2 est prise entre parenthèses .

Sur la fig. 2.41 on voit le moyen de déterminer la visibilité des arêtes de la pyramide ABCS à l'aide de points concourants.

Les points 1 et 2 sont concourants et se situent sur la même horizontale projective, leurs projections horizontales coïncident ($1_1 \equiv 2_1$). A l'aide de ces points on détermine la visibilité des projections horizontales A_1S_1 et B_1C_1 des arêtes AS et BC, qui sont les droites de croisement (1 Є AS, 2 Є BC). La projection horizontale 1_1 est visible, et celle 2_1 – invisible, puisque le point 1_2 est situé plus loin de l'axe x, que le point 2_2. Le point 1 appartient à l'arête AS, c'est pourquoi la projection horizontale A_1S_1 de l'arête AS est visible et celle de l'arête BC – invisible puisque le point 2_1 est invisible.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Точки 3 і 4 є також конкуруючими, вони лежать на одній фронтально-проекціюючій прямій, їх фронтальні проекції збігаються ($3_2 \equiv 4_2$). За допомогою цих точок визначено видимість фронтальних проекцій A_2C_2 і B_2S_2 ребер АС і ВС, які є мимобіжними прямими (3 Є BS, 4 Є AC). Фронтальна проекція 3_2 є видимою, а 4_2 – невидимою, оскільки точка 3_1 розміщена далі від осі *x*, ніж точка 4_1. Точка 3 належить ребру BS, тому фронтальна проекція B_2S_2 ребра BS буде видимою, а ребра AC – невидимою, оскільки точка 4_1 невидима.

Les points 3 et 4 sont aussi concourants, ils se situent sur la même droite projective frontale, leurs projections frontales coïncident ($3_2 \equiv 4_2$). A l'aide de ces points on détermine la visibilité des projections frontales A_2C_2 et B_2S_2 des arêtes AC et BC, qui sont les droites de croisement (3 Є BS, 4 Є AC). La projection frontale 3_2 est visible, et celle 4_2 – invisible, puisque le point 3_1 est situé plus loin de l'axe *x*, que le point 4_1. Le point 3 appartient à l'arête BS, c'est pourquoi la projection frontale B_2S_2 de l'arête BS est visible et celle de l'arête AC – invisible puisque le point 4_1 est invisible.

2.5. Проекціювання взаємно перпендикулярних прямих

2.3. Projection des droites mutuellement perpendiculaires

Прямий кут, утворений взаємно перпендикулярними прямими, проекціюється у вигляді прямого кута на ту площину проекцій, до якої одна з прямих (сторона кута) паралельна, а друга не перпендикулярна.

L'angle droit, formé par les droites mutuellement perpendiculaires, se projette sous forme de l'angle droit sur un des plans, par rapport auquel, une des droites (côté d'angle) est parallèle, et la seconde n'est pas perpendiculaire.

На рис. 2.42 показано наочне зображення прямого кута, утвореного сторонами АВ і ВС, які є відрізками прямих, що перетинаються, причому ВС // π_1, а АВ $\perp \pi_1$. На площині проекцій π_1 побудовано горизонтальну проекцію $A_1B_1C_1$ прямого кута

La fig. 2.42 représente l'image visuelle de l'angle droit formé par les côtés AB et BC, qui sont les segments de droites sécantes, de plus BC // π_1, et AB $\perp \pi_1$. On voit constuire sur le plan de projections π_1 la projection horizontale $A_1B_1C_1$ de l'angle

Національний університет
водного господарства
та природокористування

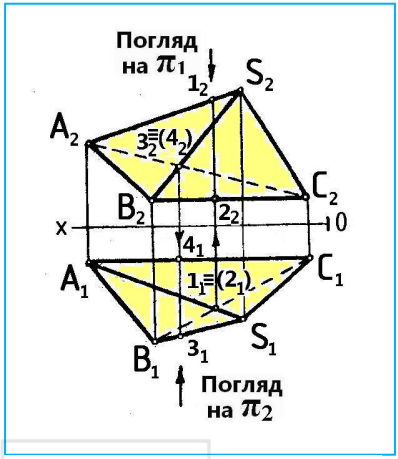


Рис. 2.41. Визначення видимості ребер піраміди ABCS
Fig. 2.41.Définition de la visibilité des arêtes de pyramide ABCS

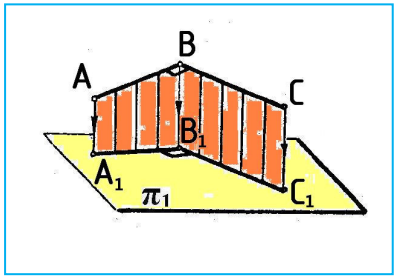


Рис. 2.42. Проекціювання прямого кута
Fig. 2.42.Projection de l'angle droit

Національний університет
водного господарства
та природокористування

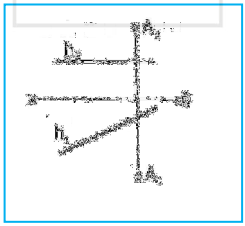


Рис. 2.43. Початкова умова задачі на визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h
Fig. 2.43. Condition initiale du problème de définition de la distance du point A à l'horizontale h

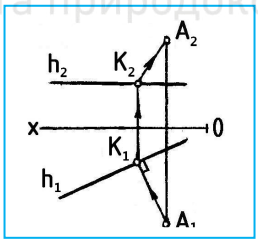


Рис. 2.44. Визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h (1 дія)
Fig. 2.44. Définition de la distance du point A à l'horizontale h (1 manipulation)

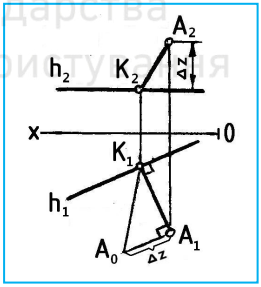


Рис. 2.45. Визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h (2 дія)
Fig. 2.45. Définition de la distance du point A à l'horizontale h (2 manipulation)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

АВС, яка, враховуючи зазначену властивість проекціювання прямого кута, також утворює кут 90°. Іншими словами, якщо кут АВС прямий, тобто сторони кута АВ і ВС є взаємно перпендикулярними прямими, причому сторона ВС цього кута паралельна площині π_1, а друга сторона АВ не перпендикулярна до площини π_1, то ортогональна проекція $A_1B_1C_1$ прямого кута на площині π_1 складає кут 90° (кут $A_1B_1C_1 = 90°$) або горизонтальні проекції сторін кута будуть взаємно перпендикулярними ($A_1B_1 \perp B_1C_1$).

Навпаки, якщо ортогональна проекція кута, який утворений двома прямими, що перетинаються, складає кут 90°, а одна сторона кута паралельна до тієї площини проекцій, де розміщена ортогональна проекція кута, а друга сторона кута не перпендикулярна до цієї ж площини проекцій, то в просторі такий кут складає також 90°.

На рис. 2.43-2.45 показано розв'язування задачі на визначення відстані від точки А до горизонтальної прямої h.

propriété de projection indiqué de l'angle droit, forme aussi l'angle de 90^0. En d'autres termes, si l'angle ABC est droit, c'est à dire ses côtés AB et BC sont les droites mutuellement perpendiculaires et, avec ceci le côté BC de cet angle est parallèle au plan π_1, et le second AB n'est pas perpendiculaire au plan π_1, alors la projection orthogonale $A_1B_1C_1$ de l'angle droit sur le plan π_1 est l'angle de 90° (angle $A_1B_1C_1 = 90°$) ou bien les projections horizontales des côtés de l'angle seront mutuellement perpendiculaires ($A_1B_1 \perp B_1C_1$).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Au contraire, si la projection orthogonale de l'angle, formé par les droites sécantes, est un angle égal à 90°, et, un côté de l'angle est parallèle à un plan de projection, sur lequel la projection orthogonale de l'angle est située, et le second côté de l'angle n'est pas perpendiculaire au même plan de projections, dans l'espace cet angle est égal aussi à 90°.

La solution du problème de la définition de la distance du point A au plan horizontal h. est illustréé sur les fig. 2.43-2.45.

Національний університет водного господарства

Нарисна геометрія. Розділ 3 Площина

3.1. Задання площини на епюрі

Найчастіше на епюрі площину задають:

1) проекціями двох паралельних прямих (рис. 3.1);

2) проекціями двох прямих, що перетинаються (рис. 3.2);

3) проекціями трикутника – відсіка плоскої фігури (рис. 3.3).

Площину позначають малими літерами грецького алфавіту. На рис. 3.1-3.3, крім позначення площини літерою, в дужках можна вказувати спосіб задання площини. Наприклад, запис α (*a* ∥ *b*) розшифровується таким чином: площина α задана двома паралельними прямими *a* і *b* (рис. 3.1).

Площина може бути задана слідами площини (рис. 3.4, 3.5). Слід площини – це пряма лінія, по якій площина перетинає площину проекцій.

Розрізняють:

1. Горизонтальний слід площини – це лінія перетину площини з горизонтальною площиною проекцій π_1.

На рис. 3.4, 3.5 h^0_α – горизонтальний слід площини α (нульова горизонталь площини α, тобто горизонталь, яка знаходиться в площині α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$.

2. Фронтальний слід площини – це лінія перетину площини з

Géométrie descriptive. Chapitre 3 Plan

3.1. Affichage d'un plan sur l'épure

Le plus souvent un plan sur l'épure est affiché par:

1) projections de deux droites parallèles (fig. 3.1);

2) projections de deux droites sécantes (fig. 3.2);

3) projections du triangle – compartiment d'une figure plate (fig. 3.3).

Un plan est désigné par les lettres minuscules de l'alphabet grec. Sur les fig. 3.1-3.3, sauf les lettres, il est possible d'indiquer le moyen d'affichage du plan. Par exemple, l'inscription α (*a* ∥ *b*) est décryptée d'une façon suivante: le plan α est affiché par deux droites parallèles *a* et *b* (fig. 3.1).

Le plan peut être affiché par les traces du plan (fig. 3.4, 3.5). La trace d'un plan – c'est une droite, suivant laquelle le plan coupe celui de projections.

On distingue:

1. Trace horizontale d'un plan – c'est une ligne d'intersection du plan qui appartient au plan horizontal de projections π_1.

Sur les fig. 3.4, 3.5 h^0_α – la trace horizontale du plan α (l'horizontale nulle du plan α, c'est à dire l'horizontale, se trouvant dans le plan α), $h^0_\alpha = \alpha \cap \pi_1$.

2. Trace frontale d'un plan – c'est une ligne d'intersection du plan avec

Національний університет
водного господарства
та природокористування

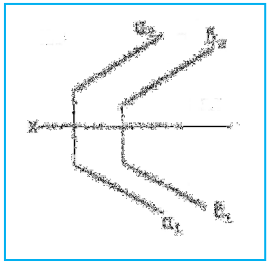


Рис. 3.1. Задання площини двома паралельними прямими
Fig. 3.1. Affichage d'un plan par deux lignes parallèles

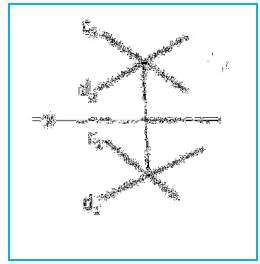


Рис. 3.2. Задання площини двома прямими, що перетинаються
Fig. 3.2. Affichage d'un plan par deux lignes sécantes

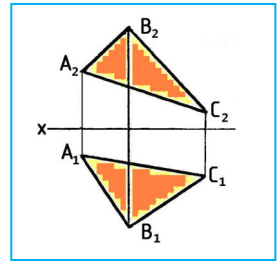


Рис. 3.3. Задання площини трикутником
Fig. 3.3. Affichage d'un plan par un triangle

Національний університет
водного господарства
та природокористування

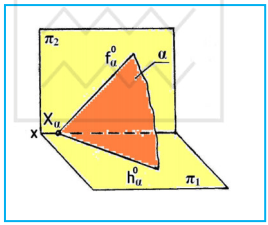


Рис. 3.4. Наочне зображення площини α, що задана слідами: h^0_α і f^0_α – горизонтальний і фронтальний слід площини, X_α – точка сходу слідів
Fig. 3.4. Image visuelle du plan α, affichée par les traces: h^0_α и f^0_α – traces horizontale et frontale du plan, X_α – point de descente des traces

Рис. 3.5. Епюр площини α, що задана слідами: h^0_α і f^0_α – горизонтальний і фронтальний слід площини, X_α – точка сходу слідів
Fig. 3.5. Epure du plan α, affichée par les traces: h^0_α и f^0_α – traces horizontale et frontale du plan X_α – point de descente des traces

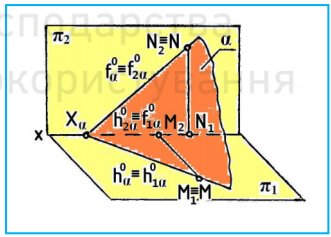


Рис. 3.6. Позначення на наочному зображенні проекцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)
Fig. 3.6. Dénotation sur l'image visuelle de projections des traces du plan α et points M, N appartenant aux traces (M ∈ h^0_α, N ∈ f^0_α)

Національний університет водного господарства та природокористування

фронтальною площиною проекцій π_2.

На рис. 3.4, 3.5 f_α^0 – фронтальний слід площини α (нульова фронталь площини α), $f_\alpha^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. Точка сходу слідів – точка, в якій перетинаються сліди площини, розміщена на осі проекцій.

На рис. 3.4, 3.5 X_α – точка сходу слідів, $X_\alpha = h^0{}_\alpha \cap f_\alpha^0$.

На наочному зображенні (рис. 3.6) і епюрі (рис. 3.7) показано розміщення проекцій слідів площини. Крім того, зображено проекції точок M і N, що належать слідам площини ($M \in h^0{}_\alpha$, $N \in f_\alpha^0$).

Епюр площини, зображений на рис. 3.7 з позначенням всіх проекцій слідів, на практиці не застосовують, а користуються для задання площини на епюрі зображенням, показаним на рис. 3.5, де позначені тільки самі сліди і немає позначень їх проекцій. Проте, для розв'язування багатьох задач треба пам'ятати, де саме розміщені проекції слідів площини, про що буде нагадувати епюр, зображений на рис. 3.7.

На наочному зображенні (рис. 3.8) і епюрі (рис. 3.9) показано побудову слідів площини β, що задана ΔABC.

le plan frontal de projections π_2.

Sur les fig. 3.4, 3.5 f_α^0 – la trace frontale du plan α (la frontale nulle du plan α), $f_\alpha^0 = \alpha \cap \pi_2$.

3. Point de descente des traces – le point, suivant lequel s'intersectent les traces du plan, est situé sur l'axe de projections.

Sur les fig. 3.4, 3.5 X_α – le point de descente de traces, $X_\alpha = h^0{}_\alpha \cap f_\alpha^0$.

Sur l'image visuelle (fig. 3.6) et l'épure (fig. 3.7) on voit la disposition de projections des traces du plan. En outre, on expose les projections de points M et N, appartenant aux traces du plan ($M \in h^0{}_\alpha$, $N \in f_\alpha^0$).

L'épure du plan, représentée sur la fig. 3.7 avec l'indication de toutes les projections des traces, n'est pas appliquée en pratique, par contre, pour afficher le plan sur l'épure on utilise la représentation exposée sur la fig. 3.5, où on ne voit que des traces mêmes et non pas les indications de leurs projections. Cependant, pour la solution de nombreux problèmes, il est nécessaire de rappeler notamment, où sont situées les projections de traces du plan. L'épure, présentée sur la fig. 3.7 nous en fera la preuve.

Sur l'image visuelle (fig. 3.8) et l'épure (fig. 3.9) on voit la construction des traces du plan β, affiché par ΔABC.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

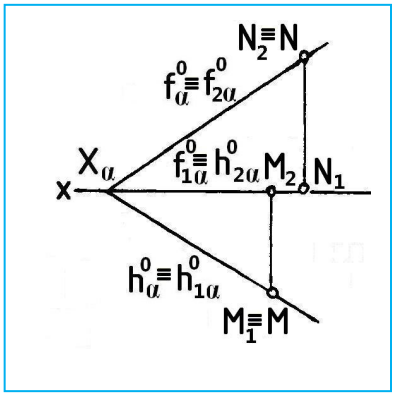


Рис. 3.7. Позначення на епюрі проекцій слідів площини α та точок M, N, що належать слідам ($M \in h^0_\alpha$, $N \in f^0_\alpha$)
Fig. 37. Dénotation sur l'épure de projections des traces du plan α et points M, N, appartenant aux traces ($M \in h^0_\alpha$, $N \in f^0_\alpha$)

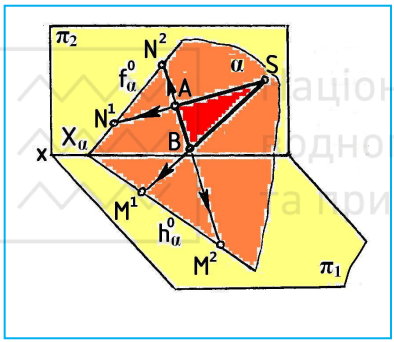


Рис. 3.8. Побудова на наочному зображенні слідів площини α, що задана трикутником ABC
Fig. 3.8. Construction des traces du plan α, affiché par le triangle ABC

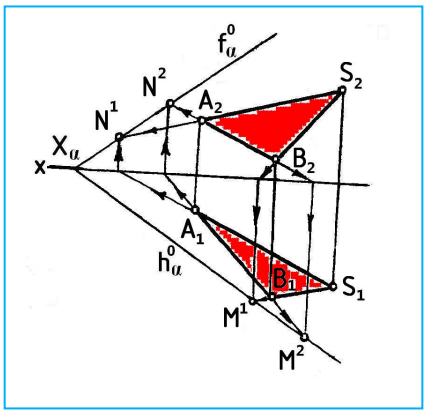


Рис. 3.9. Побудова на епюрі слідів площини α, що задана трикутником ABC
Fig. 3.9. Construction sur l'épure des traces du plan α, affiché par le triangle ABC

Національний університет
водного господарства

3.2 Площини загального та часткового положення	3.2. Plans de disposition générale et partielle
Площини, як і прямі лінії, класифікують залежно від їх розміщення відносно площин проекцій на площини загального та часткового положення.	Le plans, ainsi que les lignes droites, sont classifiés en fonction de leur disposition par rapport aux plans de projections sur les plans de disposition générale et partielle.
3.2.1. Площина загального положення – це площина, яка не паралельна і не перпендикулярна до жодної з площин проекцій.	3.2.1. Le plan de disposition générale – c'est un plan, qui n'est ni parallèle ni perpendiculaire à aucun plan de projections.
На епюрі у площини загального положення сліди не паралельні і не перпендикулярні до осі проекцій. На рис. 3.5 показано епюр саме площини загального положення, оскільки $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ не паралельні і не перпендикулярні до осі x. Це характерна графічна ознака площини загального положення, що задана слідами.	Sur l'épure du plan de disposition générale les traces ne sont ni parallèles ni perpendiculaires par rapport à l'axe de projections. Sur la fig. 3.5 on voit l'épure, notamment de disposition générale, du fait que $h_{0\alpha}$, $f_{0\alpha}$ ne sont ni parallèles ni perpendiculaires à l'axe x. C'est une indice graphique caractéristique du plan de disposition générale affiché par les traces.
Площина загального положення не перпендикулярна до площин проекцій, тому при заданні її іншими елементами, наприклад, трикутником, ці елементи на жодну з площин проекцій не проекціюються в одну спільну пряму лінію. На рис. 3.1-3.3 задано епюри площин загального положення.	Le plan de disposition générale n'est pas perpendiculaire aux plans de projections, de ce fait, en cas de son affichage par les autres éléments, par exemple par un triangle, ces éléments ne se projettent à aucun des plans de projections en une seule ligne générale droite. Sur les fig. 3.1-3.3 sont affichées les épures de plans de disposition générale.
Площини часткового положення поділяються на проекціюючі та площини рівня. Проекціюючі площини перпендикулярні до однієї з площин проекцій, а площини рівня – паралельні.	Les plans de disposition partielle se divisent en plans projectifs et ceux de niveau. Les plans projectifs sont perpendiculaires à un des plan de projections, et ceux de niveau sont parallèles.
3.2.2. Площина, яка перпендикулярна до горизон-	3.2.2. Un plan qui est perpendiculaire au plan horizontal de

Національний університет
водного господарства
та природокористування

тальної площини проекцій, називається горизонтально-проекціюючою площиною.

На рис. 3.10 дано наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α. Вона перпендикулярна до площини π_1 і проекціюється на цю площину прямою лінією α_1, тобто α_1 – проекція площини α на площину π_1, до якої площина α перпендикулярна. Лінію α_1 називають слідом-проекцією площини α.

На рис. 3.11 наведено епюр горизонтально-проекціюючої площини α у вигляді тільки однієї прямої лінії α_1. І таке зображення площини повністю визначає положення площини в просторі, оскільки на епюрі можна визначити сліди площини – горизонтальний і фронтальний (рис. 3.12, 3.13).

В горизонтально-проекціюючій площині α (рис. 3.14) розмістимо трикутник ABC. Оскільки площина α перпендикулярна до π_1, горизонтальна проекція ΔABC буде проекціюватися на слід-проекцію α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). На рис. 3.15 показано епюр горизонтально-проекціюючої площини, якій належить ΔABC. Отже, якщо проекція трикутника збігається зі слідом-проекцією площини, то сам трикутник належить цій площині (на рис. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$).

Дамо означення сліду-

projections est appelé le plan horizontal projectif.

Sur la fig. 3.10 on observe l'image visuelle du plan horizontal projectif α. Ce dernier est perpendiculaire au plan π_1 et se projette à ce plan par la droite α_1, soit α_1 – la projection du plan α sur le plan π_1, dont le plan α est perpendiculaire. La ligne α_1 est appelée la trace de projections du plan α.

La fig. 3.11 représente l'épure du plan projectif horizontal α sous forme d'une seule ligne droite α_1. Il est à noter que telle représentation du plan reflète pleinement la disposition du plan dans l'espace, car sur l'épure il est possible de déterminer les traces horizontale et frontale du plan (fig. 3.12, 3.13).

Nous allons situer le triangle ABC au plan projectif horizontal α (fig. 3.14).

En partant du fait que le plan α est perpendiculaire à celui π_1, la projection horizontale ΔABC se projettera sur la trace-projection α_1 ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$). Sur la . 3.15 on voit l'épure du plan projectif horizontal, dont ΔABC appartient. Ainsi, lorsque la projection du triangle coïncide avec la trace-projection du plan, le triangle lui-même appartient à ce plan (fig. 3.15 $A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$).

Citons la définition de la trace-projection:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

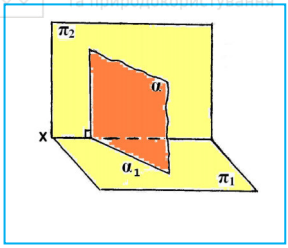


Рис. 3.10. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α (α_1 – слід-проекція площини α)
Fig. 3.10. Image visuelle du plan projectif horizontal α (α_1 – trace-projection du plan α)

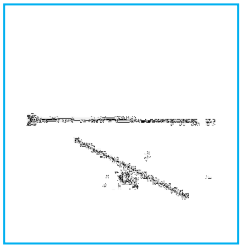


Рис. 3.11. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α (α_1 – слід-проекція площини α)
Fig. 3.11. Epure du plan projectif horizontal α (α_1 – trace-projection du plan α)

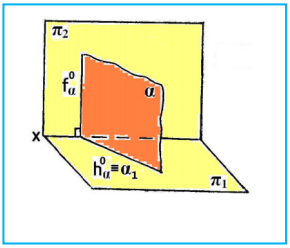


Рис. 3.12. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)
Fig. 3.12. Image visuelle du plan projectif horizontal α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

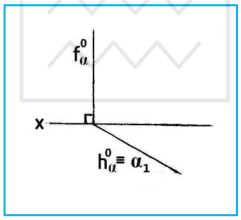


Рис. 3.13. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)
Fig. 3.13. Epure du plan projectif horizontal α ($h_\alpha^0 \equiv \alpha_1$, $f_\alpha^0 \perp x$)

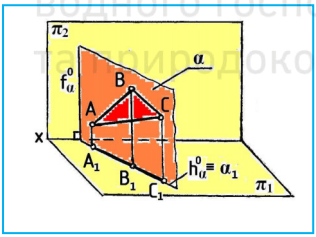


Рис. 3.14. Наочне зображення горизонтально-проекціюючої площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)
Fig. 3.14. Image visuelle du plan projectif horizontal α avec ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$) dedans

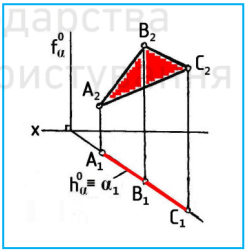


Рис. 3.15. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$)
Fig. 3.15. Epure du plan projectif horizonta α avec ΔABC ($A_1B_1C_1 \equiv \alpha_1$) dedans

Національний університет водного господарства та природокористування

проекції:

Слід-проекція – це лінія перетину площини з площиною проекції, до якої ця площина перпендикулярна.

Всі площини часткового положення мають слід-проекцію, оскільки вони перпендикулярні хоча б до однієї з площин проекцій.

Слід-проекція має таку збірну властивість: проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що знаходяться в заданій площині часткового положення, проекціюються саме на слід-проекцію (див. рис. 3.15).

На рис. 3.16 дано епюр горизонтально-проекціюючої площини, що задана ΔABC, оскільки горизонтальна проекція трикутника – пряма лінія. Ця пряма лінія є слідом-проекцією заданої площини, вона лежить в площині π_1, і по ній площина перетинає площину π_1, до якої перпендикулярна.

На рис. 3.17 через точку А проведено горизонтально-проекціюючу площину α, тобто точка А стала належати площині α. Можна сказати по-іншому: якщо горизонтальна проекція A_1 збігається з α_1, то це означає, що сама точка А належить площині α.

Горизонтально-проекціююча площина має такі властивості:

1. При заданні площини слідами горизонтальний слід h_α^0 площини є слідом-проекцією цієї

La trace-projection – c'est une ligne d'intersection du plan avec le plan de projections dont celui-ci est perpendiculaire.

Tous les plans de la disposition partielle possèdent une trace-projection, car ils sont perpendiculaires au moins à un seul plan de projections.

La trace-projection possède la propriété collective suivante: les projections des points, lignes droites, figures plates, se trouvant dans le plan affiché de la disposition partielle, se projettent directement sur la trace-projection (voir. fig. 3.15).

Sur la fig. 3.16 on voit l'épure du plan projectif horizontal, affiché par ΔABC, puisque la projection horizontale du triangle – est la ligne droite. Cette dernière se présente comme la trace-projection du plan affiché, elle se trouve dans le plan π_1, suivant lequel ce plan coupe le plan π_1 dont elle est perpendiculaire.

Sur la fig. 3.17 le plan horizontal projectif α est tracé à travers le point A, soit ce dernier appartient au plan α. Autrement dit: lorsque la projection horizontale A_1 coïncide avec α_1, cela signifie, que le point même A appartient au plan α.

Le plan horizontal projectif possède les propriétés suivantes:

1. A l'affichage d'un plan par les traces, la trace horizontale h_α^0 du plan apparaît comme la trace-

Національний університет
водного господарства

площини, а фронтальний слід f_α^0 перпендикулярний до осі x.

2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_1 проекціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини.

3. Горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтально-проекціюючій площині, проекціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією горизонтально-проекціюючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або горизонтально-проекціююча площина проходить через дані фігури.

3.2.3. Площина, яка перпендикулярна до фронтальної площини проекцій, називається фронтально-проекціюючою площиною.

На рис. 3.18-3.21 дано наочне зображення та епюр фронтально-проекціюючої площини β, заданої слідами, а на рис. 3.22, 3.23 епюр – фронтально-проекціюючої площини β, заданої трикутником DEF.

projection de ce dernier, et la trace frontale f_α^0 est perpendiculaire à l'axe x.

2. A l'affichage d'un plan par les autres éléments (triangle, deux lignes parallèles ou sécantes) ces éléments se projettent sur le plan π_1 en une seule droite, qui est la trace-projection d'un plan.

3. Les projections horizontales des points, lignes droites, figures plates, appartenant au plan horizontal projectif, se projettent à la trace horizontale du plan en question, et présentent la trace-projection, et vice versa, lorsque les projections horizontales des points, lignes droites et figures plates coïncident avec la trace-projection du plan horizontal projectif, cela veut dire que les figures en question sont situées dans ce plan, soit le plan horizontal projectif passe à travers les figures données.

3.2.3. Le plan, perpendiculaire au plan frontal de projections, est appelé le plan frontal projectif.

Sur les fig. 3.18-3.21 on présente l'image visuelle et l'épure du plan frontal projectif β, affiché par des traces, et sur les fig. 3.22, 3.23 – on voit l'épure du plan frontal projectif β, affiché par le triangle DEF.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

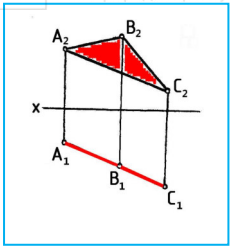


Рис. 3.16. Епюр горизонтально-проекціюючої площини, заданої ΔABC
Fif. 3.16. Epure du plan horizontal projectif affiché par ΔABC

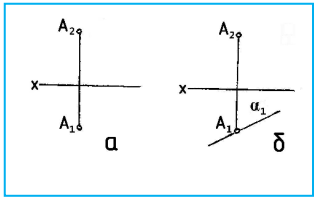


Рис. 3.17. Проведення через точку А горизонтально-проекціюючої площини α (а – початкова умова, б – через точку А проведена площина α)
Fig. 3.17. Traçage du plan horizontal projectif α à travers le point A(а – condition initiale, б – plan α est tracé à travers le point α)

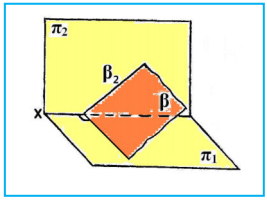


Рис. 3.18. Наочне зображення фронтально-проекціюючої площини β (β2 – слід-проекція площини β)
Fig. 3.18. Image visuelle du plan frontal projectif β (β2 – trace-projection du plan β)

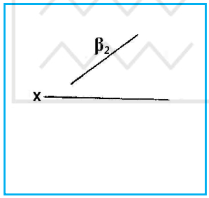


Рис. 3.19. Епюр фронтально-проекціюючої площини β (β2 – слід-проекція площини β)
Fig. 3.19. Epure du plan frontal projectif β (β2 – trace-projection du plan β)

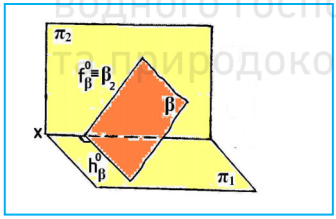


Рис. 3.20. Наочне зображення фронтально-проекціюючої площини β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)
Fig. 3.20. Image visuelle du plan frontal projectif β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

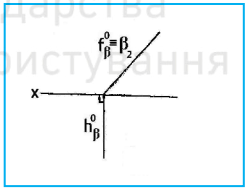


Рис. 3.21. Епюр фронтально-проекціюючої площини β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)
Fig. 3.21. Epure du plan frontal projectif β ($f_\beta^0 \equiv \beta_2$, $h_\beta^0 \perp x$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

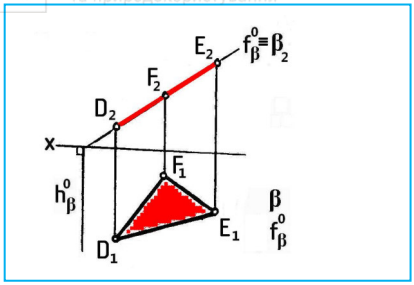


Рис. 3.22. Епюр фронтально-проекціюючої площини β з розміщеним в ній ΔDEF ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$)

Fig. 3.22. Epure du plan frontal projectif β avec le ΔDEF ($(D_2E_2F_2 \equiv \beta_2)$) situé dédans

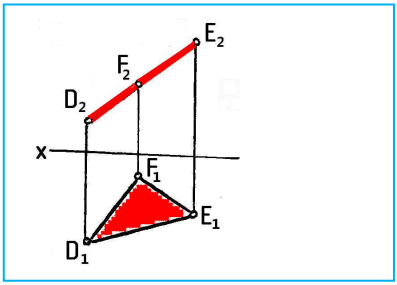


Рис. 3.23. Епюр фронтально-проекціюючої площини β, заданої ΔDEF

Fig. 3.23. Epure du plan frontal projectif β, affiché par **ΔDEF**

Фронтально-проекціююча площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини, а горизонтальний слід перпендикулярний до осі *x*. 2. При заданні площини іншими елементами (трикутником, двома паралельними або прямими, що перетинаються) ці елементи на площину π_2 проекціюються в одну пряму лінію, яка є слідом-проекцією площини. 3. Фронтальні проекції всіх точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтально-проекціюючій площині, проекціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією, і навпаки, якщо	Le plan frontal projectif possède les propriétés suivantes: 1. A l'affichage d'un plan par les traces, la trace frontale f_β^0 du plan est la trace-projection de plan en question, et la trace horizontale h_β^0 est perpendiculaire à l'axe *x*. 2. A l'affichage d'un plan par les autres éléments (triangle, deux lignes parallèles ou droites sécantes) ces éléments se projettent sur le plan π_2 en une seule ligne droite, qui est la trace-projection d'un plan 3. Les projections frontales de tous les points, lignes droites, figures plates, appartenant au plan frontal projectif, se projettent à la trace frontale du plan en question, et présentent la trace-projection, et vice versa, lorsque les projections

Національний університет
водного господарства
та природокористування

фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур збігаються зі слідом-проекцією фронтально-проекціюючої площини, то це означає, що дані фігури або лежать в цій площині, або фронтально - проекціююча площина проходить через дані фігури.	frontales des points, lignes droites et figures plates coïncident avec la trace-projection du plan frontal projectif, cela veut dire que les figures en question sont situées dans ce plan, soit le plan frontal projectif passe à travers les figures données.
3.2.4. Площина, яка паралельна до горизонтальної площини проекцій, називається горизонтальною площиною або горизонтальною площиною рівня.	3.2.4. Un plan, parallèle au plan horizontal de projections, est appelé le plan horizontal ou le plan horizontal de niveau.
На рис. 3.24 дано наочне зображення горизонтальної площини α, а на рис. 3.25, 3.26 – епюр горизонтальної площини α зображений своїм слідом-проекцією α_2 , який паралельний до осі *x*.	Sur la fig. 3.24 on voit l'image visuelle du plan horizontal α, et sur les fig. 3.25, 3.26 – l'épure du plan horizontal α représentée par sa trace-projection α_2, qui est perpendiculaire à l'axe *x*.
На рис. 3.27 в горизонтальній площині α розміщено ΔABC, який на площину π_2 проекціюється на слід-проекцію α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), а на площину π_1 – в натуральну величину ($A_1B_1C_1$= Н.В. ΔABC).	Sur la fig. 3.27 on voit situé ΔABC dans le plan horizontal α, qui se projette au plan π_2 par la trace-projection α_2 ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$), et au celui π_1 – en sa grandeur naturelle ($A_1B_1C_1$ = Н.В. ΔABC).
На рис. 3.28 дано епюр горизонтальної площини, що задана ΔABC, оскільки $A_2B_2C_2$// *x*.	Sur la fig. 3.28 on présente l'épure du plan horizontal, affiché par ΔABC, puisque $A_2B_2C_2$ // *x*.
Горизонтальна площина має такі властивості:	Le plan horizontal possède les propriétés suivantes:
1. При заданні площини слідами фронтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі *x*.	1. A l'affichage d'un plan par des traces, la trace frontale du plan est la trace-projection du plan en question se trouvant parallèlement à l'axe *x*.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

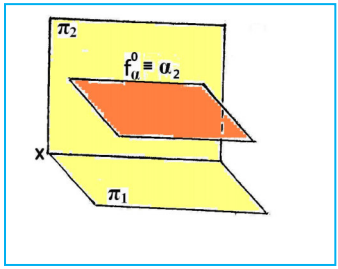


Рис. 3.24. Наочне зображення горизонтальної площини α (α_2 – слід-проекція, $\alpha_2 // x$, f_α^0 – фронтальний слід, горизонтальний слід відсутній)
Fig. 3.24. Image visuelle du plan horizontal α (α_2 – trace-projection, $\alpha_2 // x$, f_α^0 – trace frontale, trace horizontale absente)

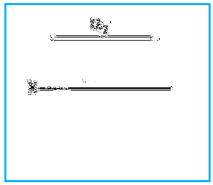


Рис. 3.25. Епюр горизонтальної площини α (α_2 – слід-проекція, $\alpha_2 // x$)
Fig. 3.25. Epure du plan horizontal α (α_2 –trac-projection, $\alpha_2 // x$)

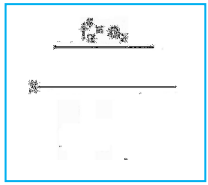


Рис. 3.26. Епюр горизонтальної площини α (α_2 – слід-проекція, $\alpha_2 // x$, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)
Fig. 3.26. Epure du plan horizontal α (α_2 – trace-projection, $\alpha_2 // x$, $f_\alpha^0 \equiv \alpha_2$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

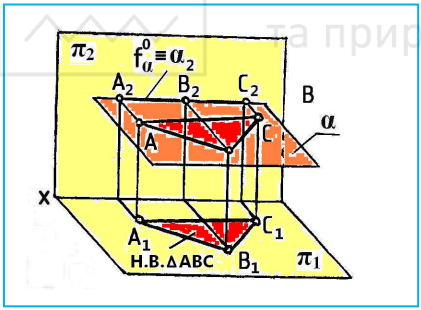


Рис. 3.27. Наочне зображення горизонтальної площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)
Fig. 3.27. Image visuelle du plan horizontal α avec ΔABC dédans ($A_2B_2C_2 \equiv \alpha_2$)

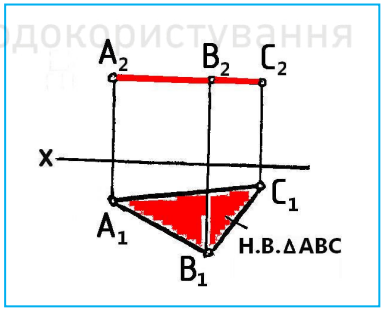


Рис. 3.28. Епюр горизонтальної площини α з розміщеним в ній ΔABC ($A_2B_2C_2 // x$)
Fig. 3.28. Epure du plan horizontal α avec ΔABC dédans($A_2B_2C_2 // x$)

Національний університет
водного господарства

Горизонтальний слід відсутній.	La trace horizontale est absente.
2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_2 проекціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і паралельна до осі x, а на площину π_1, до якої площина паралельна, - в свою натуральну величину.	2. A l'affichage d'un plan par d'autres éléments, par exemple un triangle, ces éléments se projettent sur le plan π_2 en une ligne droite commune, qui est la trace-projection et parallèle à l'axe x, et sur celui π_1, dont il est parallèle, - en sa grandeur naturelle.
3. Фронтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать горизонтальній площині, проекціюються на фронтальний слід площини, що є слідом-проекцією.	3. Les projections frontales des points, lignes droites, figures plates, appartenant au plan horizontal, se projettent sur la trace frontale du plan, qui est la trace-projection.
3.2.5. Площина, яка паралельна до фронтальної площини проекцій, називається фронтальною площиною або фронтальною площиною рівня.	3.2.5. Un plan, parallèle au plan frontal de projections, est appelé le plan frontal ou le plan frontal de niveau.
На рис. 3.29 дано наочне зображення фронтальної площини β, а на рис. 3.30, 3.31 епюр фронтальної площини β, зображений своїм слідом-проекцією β_2, який паралельний до осі x.	Sur la fig. 3.29 on voit l'image visuelle du plan frontal β, et sur les fig. 3.30, 3.31 – l'épure du plan frontal β, représentée par sa trace-projection β_2, qui est perpendiculaire à l'axe x.
На рис. 3.32 у фронтальній площині β розміщено ΔDEF, який на площину π_1 проекціюється на слід-проекцію β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), а на площину π_2 – в натуральну величину ($\Delta D_2E_2F_2$ = Н.В. ΔDEF).	Sur la fig. 3.32 le plan frontal β comporte ΔDEF, qui se projette sur le plan π_1 et la trace-projection β_1 ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$), et sur celui π_2 – en sa grandeur naturelle ($D_2E_2F_2$ = Н.В. ΔDEF).
На рис. 3.33 дано епюр фронтальної площини, що задана Δ DEF, оскільки $D_1E_1F_1 // x$.	La fig. 3.33 propose l'épure du plan frontal qui est affiché par ΔDEF, puisque $D_1E_1F_1 // x$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

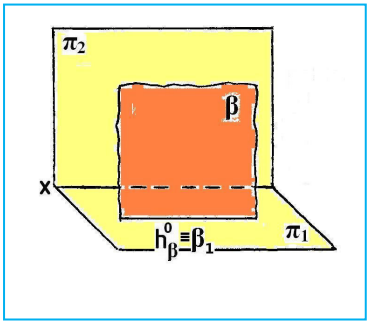


Рис. 3.29. Наочне зображення фронтальної площини β (β_1 – слід-проекція, $\beta_1 // x$, h_β^0 – горизонтальний слід, фронтальний слід відсутній)
Fig. 3.29. Image visuelle du plan frontal β (β_1 – trace-projection, $\beta_1 // x$, h_β^0 – trace horizontale, trace frontale absente)

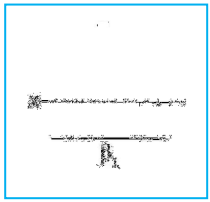


Рис. 3.30. Епюр фронтальної площини β (β_1 – слід-проекція, $\beta_1 // x$)
Fig. 3.30. Epure du plan frontal β (β_1 – trace-projection, $\beta_1 // x$)

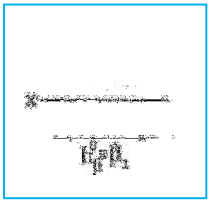


Рис. 3.31. Епюр фронтальної площини β (β_1 – слід-проекція, $\beta_1 // x$, $h_\beta^0 \equiv \beta_1$)
Fig. 3.31. Epure du plan frontal β (β_1 – trace-projection, $\beta_1 // x$, $h_\beta^0 \equiv \beta_1$)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

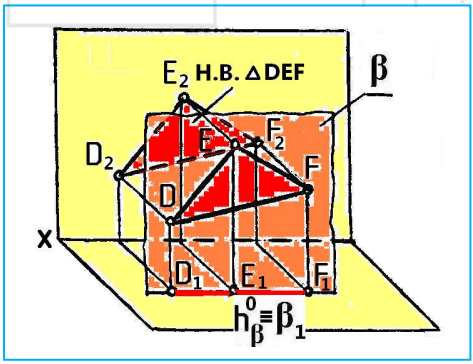


Рис. 3.32. Наочне зображення фронтальної площини β з розміщеним в ній ΔDEF ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$)
Fig. 3.32. Image visuelle du plan frontal β avec ΔDEF ($D_1E_1F_1 \equiv \beta_1$) dédans

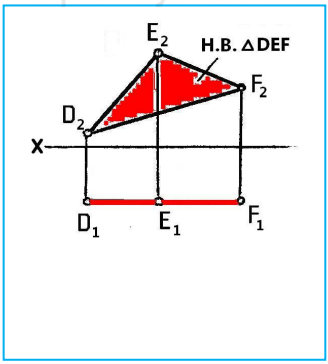


Рис. 3.33. Епюр фронтальної площини β, заданої ΔDEF ($D_1E_1F_1 // x$)
Fig. 3.33. Epure du plan frontal β, affiché par ΔDEF ($D_1E_1F_1 // x$)

Національний університет
водного господарства

Фронтальна площина має такі властивості: 1. При заданні площини слідами горизонтальний слід площини є слідом-проекцією цієї площини і розміщений паралельно до осі *x*. Фронтальний слід відсутній. 2. При заданні площини іншими елементами, наприклад трикутником, ці елементи на площину π_1 проекціюються в одну спільну пряму лінію, яка є слідом-проекцією і яка паралельна осі *x*, а на площину π_2, до якої фронтальна площина паралельна, вона проекціюється в свою натуральну величину. 3. Горизонтальні проекції точок, прямих ліній, плоских фігур, що належать фронтальній площині, проекціюються на горизонтальний слід площини, що є слідом-проекцією. .	Le plan frontal possède les propriétés suivantes: 1. . A l'affichage d'un plan par des traces, la trace horizontale du plan est la trace-projection du plan en question se trouvant parallèlement à l'axe *x*. La trace frontale est absente 2. A l'affichage d'un plan par d'autres éléments, par exemple un triangle, ces éléments se projettent sur le plan π_1 en une ligne droite commune, qui est la trace-projection et parallèle à l'axe *x*, et sur celui π_2, dont il est parallèle, le plan se projette en sa grandeur naturelle. 3. Les projections horizontales des points, lignes droites, figures plates, appartenant au plan frontal, se projettent sur la trace horizontale du plan, qui est la trace-projection.
3.3. Точка і пряма в площині	3.3. Point et droite dans un plan
Точка належить площині, якщо вона лежить на прямій лінії цієї площини. Пряма лінія належить площині, якщо вона: 1) проходить через дві точки цієї площини або 2) проходить через одну точку і паралельна до прямої цієї площини. На рис. 3.34 дано площину α (AB∩BC). Побудуємо в ній прямі, використовуючи зазна-	Un point appartient à un plan lorsqu'il est situé sur la ligne droite dudit plan. Une ligne droite appartient à un plan lorsque elle: 1) passe à travers les deux points dudit plan ou 2) est traçée à travers un seul point et parallèle à la droite dudit plan. Sur la fig. 3.34 on présente le plan α (AB∩BC). Nous allons construire dédans les droites, en utilisant deux

Національний університет
водного господарства
та природокористування

чені два способи.

1 спосіб. Візьмемо дві точки 1 і 2 (рис. 3.35) на прямих АВ і ВС площини α. Пряма 12, що проходить через ці точки, є прямою, що належить площині α. В свою чергу, точка 3, що лежить на прямій 12, буде належати площині α, оскільки пряма 12 належить площині α.

2 спосіб. Через точку С (рис. 3.36) площини α проводимо пряму *l* паралельно до прямої АВ. Пряма *l* належить площині α і точка 4, , яка лежить на ній, також буде належати площині α.

Задача. Побудувати відсутню на епюрі горизонтальну проекцію D_1 точки D, що належить площині α(ΔABC), рис. 3.37.

Оскільки через точку D не проходить будь-яка пряма площини α, то для розв'язання задачі потрібно через цю точку провести пряму, що буде належати площині, заданій трикутником.

На рис. 3.38, а, б показано розв'язування задачі 1 способом.

Якщо площина задана слідами, то принципової різниці в проведенні прямої, що лежить в цій площині, або у визначенні точки, яка належить площині, немає, оскільки задання площини слідами це не що інше, як задання площини двома

méthodes indiquées ci-dessous.

1ère méthode. Prenons deux points 1 et 2 (fig. 3.35) sur les droites AB et BC du plan α. La droite 12, passant à travers ces points, est la droite appartenant au plan α. A son tour, le point 3, qui est situé sur la droite 12, appartiendra au plan α, puisque la droite 12 appartient au plan α.

2 ème méthode. Traçons la droite l parallèlement à la droite AB à travers le point C du plan α. (fig. 3.36). La droite *l* appartient au plan α et le point 4, se trouvant sur celui-là, appartient également au plan α.

Problème. Construire sur l'épure la projection horizontale absente D_1 du point D, appartenant au plan α(ΔABC), fig. 3.37.

Du fait qu'aucune droite du plan α ne passe pas à travers le point D, pour la solution du problème en question il faut tracer une droite à travers ledit point, appartenant au plan, affiché par un triangle.

Sur la fig. 3.38, а, б on voit la solution du problème à l'aide de la première méthode.

Si le plan est affiché par des traces, on ne verra pas d'une différence fondamentale pour le traçage de la droite, située dans ce plan ou la définition du point, appartenant à ce plan. Vue que l'affichage d'un plan par des traces, c'est le même devoir que l'affichage de celui-ci par deux

Національний університет
водного господарства
та природокористування

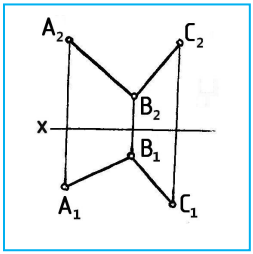


Рис. 3.34. Епюр площини α (AB∩BC) – початкова умова задачі
Fig. 3.34. Epure du plan α (AB∩BC) – condition initiale du problème

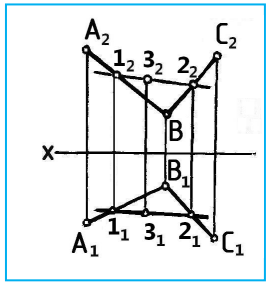


Рис. 3.35. Епюр площини α (AB∩BC), якій належить пряма 12 і точка 3
Fig. 3.35. Epure du plan α (AB∩BC), dont la droite 12 et le point 3 appartiennent

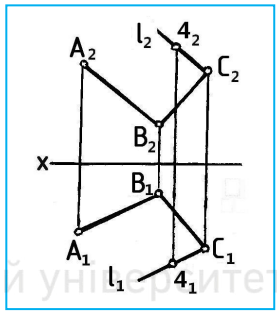


Рис. 3.36. Епюр площини α (AB∩BC), якій належить пряма *l* і точка 4
Fig. 3.36. Epure du plan α (AB∩BC), dont la droite l et le point 4 appartiennent

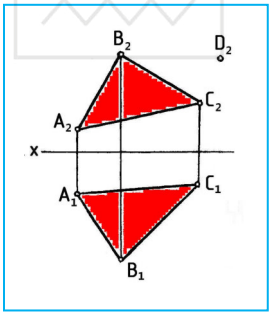


Рис. 3.37. Епюр площини α(ΔABC) – початкова умова задачі
Fig. 3.37. Epure du plan α(ΔABC) – condition initiale du problème

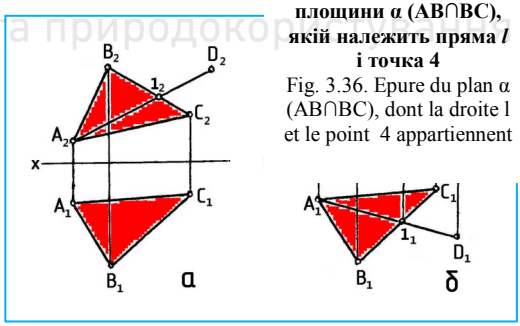


Рис. 3.38. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.37: а – 1 дія, б – 2 дія
Fig. 3.38. Solution du problème avec la condition initiale sur la fig. 3.37: а – 1 action, б – action

Національний університет водного господарства та природокористування

прямими, що перетинаються, точка перетину яких лежить на осі проекцій.

Таким чином, у разі задання площини слідами, пряма належить площині, якщо:

1) сліди прямої (тобто її дві точки) належать однойменним слідам площини або

2) пряма паралельна одному із слідів площини і має спільну точку з іншим слідом.

На рис. 3.39 дано наочне зображення, а на рис. 3.40 – епюр площини α, що задана слідами, де пряма MN за 1 способом належить площині α, оскільки дві її точки M і N лежать відповідно на слідах h_α^0 і f_α^0 площини α.

Пряма h_α^1 за 2 способом належить площині α, оскільки має спільну точку N^1 з фронтальним слідом f_α^0 і паралельна до іншого – горизонтального сліду h_α^0 площини α. Пряма h_α^1 паралельна до горизонтальної площини проекцій π_1 і є горизонтальною прямою площини α.

Задача. Побудувати відсутню фронтальну проекцію K_2 точки K, що належить площині α, заданої слідами, якщо відома горизонтальна проекція K_1 точки K (рис. 3.41).

Розв'язування 1 способом показано на рис. 3.42.

droites sécantes, dont le point d'intersection est situé sur l'axe de projections.

Ainsi, dans le cas d'affichage d'un plan par des traces, la droite appartient au plan lorsque:

1) les traces d'une droite (c'est à dire ses deux points) appartiennent aux traces de même nom ou

2) une droite parallèle à une des traces d'un plan, ayant le point commun avec une autre trace.

Sur la fig. 3.39 on présente l'image visuelle, et sur celle.3.40 – l'épure du plan α, qui est affiché par les traces, où la droite MN selon la 1ère methode appartient au plan α, puisque ses deux points M et N sont situés respectivement sur les traces h_α^0 et f_α^0 du plan α.

La droite h_α^1 selon la 2ème méthode appartient au plan α, puisque possède le point commun N^1 avec la trace frontale f_α^0 et est parallèle à une autre trace horizontale h_α^0 du plan α. La droite h_α^1 parallèle au plan horizontal de projections π_1 et apparaît comme la droite horizontale du plan α.

Problème. Construire la projection frontale absente K_2 du point K, appartenant au plan α, affiché par des traces, si on connaît la projection horizontale K_1 du point K (fig. 3.41).

La solution à l'aide de la 1ère méthode est présentée sur la fig. 3.42.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

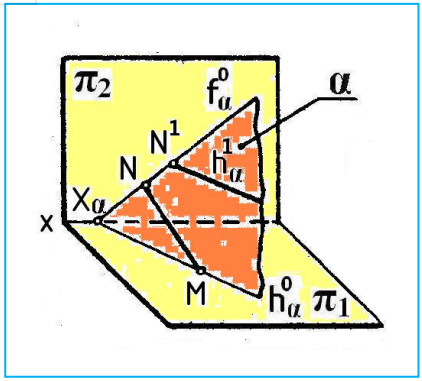


Рис. 3.39. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, якій належить пряма l і пряма h_α^1
Fig. 3.39. Image visuelle du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, auquel appartient la droite *l et la droite* h_α^1

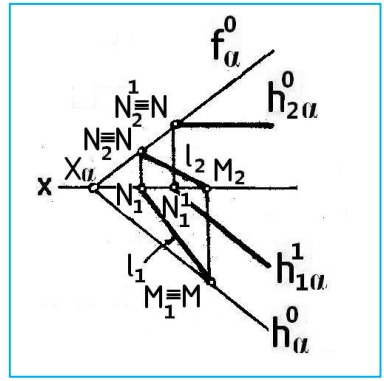


Рис. 3.40. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, якій належить пряма l і пряма h_α^1
Fig. 3.40. Epure du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, auquel apparient la droite l et la droite h_α^1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

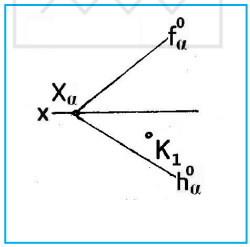


Рис. 3.41. Початкова умова задачі
Fig. 3.41. Condition initiale du problème

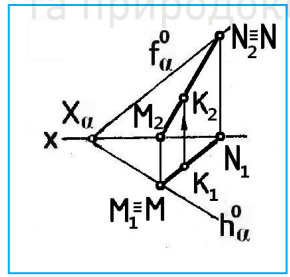


Рис. 3.42. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 1 способом
Fig. 3.42. Solution du problème avec la condition initiale sur la fig. 3.41 1 ère méthode

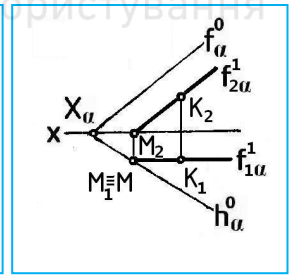


Рис. 3.43. Розв'язування задачі з початковою умовою на рис. 3.41 2 способом
Fig. 3.43. Solution du problème avec la condition initiale sur la fig. 3.41 2ème méthode

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розв'язування 2 способом показано на рис. 3.43.

Якщо проекціююча площина або площина рівня задана своїм слідом-проекцією, то цим площинам буде належати будь-яка точка і пряма лінія, відповідні проекції яких збігаються зі слідом-проекцією проекціюючої або площини рівня.

На рис. 3.44 точка А належить фронтально-проекціюючій площині β, оскільки її фронтальна проекція A_2 збігається зі слідом-проекцією β_2 площини β. На рис. 3.45 пряма *b* належить горизонтально-проекціюючій площині α, тому що її горизонтальна проекція b_1 збігається зі слідом-проекцією α_1 площини α. На рис. 3.46 пряма h_ω належить горизонтальній площині рівня ω, оскільки її фронтальна проекція $h_{2\omega}$ збігається зі слідом-проекцією ω_2 площини ω. Пряма h_ω є горизонтальною прямою, що належить площині ω.

3.4. Головні лінії площини

Головні лінії площини – це лінії рівня та лінія найбільшого схилу площини.

Лінії рівня площини – прямі, що лежать в площині і паралельні одній з площин проекцій. Це горизонталі та фронталі площини.

La solution à l'aide de la 2ème méthode est indiquée sur la fig. 3.43.

Si le plan projectif ou le plan de niveau est affiché par sa propre trace-projection, alors tout point et toute ligne droite appartiendra à ces plans, dont les projections appropriées coïncident avec la trace-projection du plan projectif ou celui de niveau.

Sur la fig. 3.44 le point A appartient au plan frontal projectif β, puisque sa projection frontale A_2 coïncide avec la trace-projection β_2 du plan β.

Sur la fig. 3.45 la droite *b* appartient au plan horizontal projectif α, car sa projection horizontale b_1 coïncide avec la trace-projection α_1 du plan α.

Sur la fig. 3.46 la droite h_ω appartient au plan horizontal de niveau ω, puisque sa projection frontale $h_{2\omega}$ coïncide avec la trace-projection ω_2 du plan ω. La droite h_ω est une droite horizontale, appartenant au plan ω.

3.4. Lignes principales d'un plan

Les lignes principales d'un plan ce sont les lignes de niveau et celles de pente maximale du plan.

Les lignes de niveau – lignes, situées dans le plan et parallèles à un des plan de projections. Ce sont les horizontales et frontales d'un plan.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

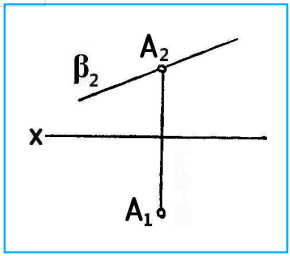


Рис. 3.44. Епюр фронтально-проекціюючої площини β, якій належить точка А
Fig. 3.44. Epure du plan frontal projectif β, auquel appartient le point A

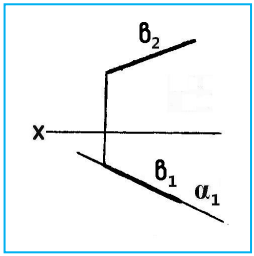


Рис. 3.45. Епюр горизонтально-проекціюючої площини α, якій належить пряма в
Fig. 3.45. Epure du plan horizontal projectif α, auquel appartient la droite в

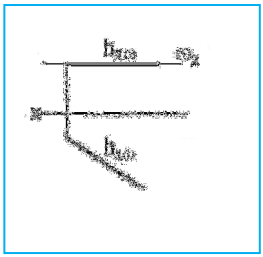


Рис. 3.46. Епюр горизонтальної площини ω, якій належить пряма h_ω
Fig. 3.46. Epure du plan horizontal ω, auquel appartient la dsroite h_ω

Національний університет
водного господарства
та природокористування

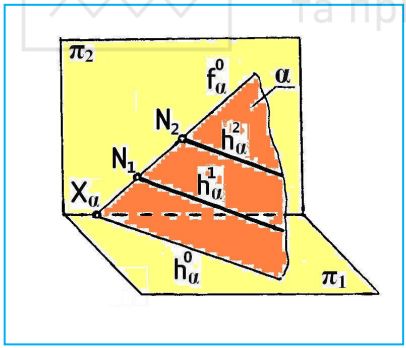


Рис. 3.47. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_α^1 і h_α^2 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$)
Fig. 3.47. Image visuelle du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, avec les horizontales h_α^1 и h_α^2 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$) dédans

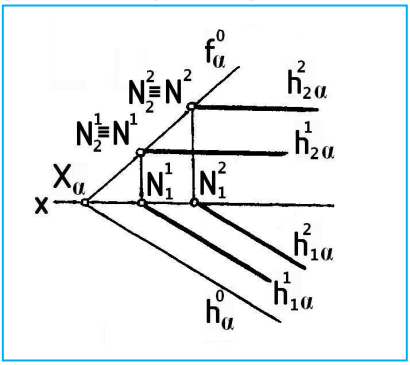


Рис. 3.48. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій проведено горизонтальні прямі h_α^1 і h_α^2
Fig. 3.48. Epure du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, aves les horizontales h_α^1 и h_α^2 dédans

Національний університет
водного господарства
та природокористування

3.4.1. Горизонталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до горизонтальної площини проекцій π_1.

На рис. 3.47 дано наочне зображення, а на рис. 3.48 – епюр площини α, що задана слідами і в якій проведені горизонталі h_α^1 і h_α^2. Вони належать площині, оскільки мають спільні точки N^1, N^2 з фронтальним слідом f_α^0 площини і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 (див. рис. 3.39, 3.40). Прямі h_α^1 і h_α^2 також паралельні до площини π_1, тому що паралельні до горизонтального сліду h_α^0, який лежить в площині π_1.

Таким чином, горизонталі площини мають такі властивості:

1. Всі горизонталі площини паралельні між собою і до горизонтального сліду площини $h_{0\alpha}$ ($h_{1\alpha} // h_{2\alpha} // h_{0\alpha}$).

2. Мають спільні точки з фронтальним слідом f_α^0 (точки N^1, N^2) і паралельні до горизонтального сліду h_α^0 площини.

На рис. 3.50 за допомогою горизонтальної прямої h_α побудовано відсутню горизонтальну проекцію точки К (див. рис. 3.49), причому спочатку проведено фронтальну проекцію $h_{2\alpha}$ горизонталі h_α паралельно до осі x, а потім і горизонтальну $h_{1\alpha}$ паралельно до h_α^0.

3.4.1. Les plans horizontaux – les droites appartenant au plan et parallèles au plan horizontal de projections π_1.

Sur la fig. 3.47 on voit l'image visuelle, et sur celle 3.48 – l'épure du plan α, affiché par des traces dans lequel les horizontales h_α^1 и h_α^2 sont menées. Ces dernières appartiennent au plan, puisque possèdent de points communs N^1, N^2 avec la trace frontale f_α^0 du plan et sont parallèles à la trace horizontale h_α^0 (voir. fig. 3.39, 3.40). Les droites h_α^1 и h_α^2 sont également parallèles au plan π_1, car elles sont parallèles à la trace h_α^0, située dans le plan π_1.

Ainsi les horizontales du plan sont parallèles entre elles et possèdent les propriétés suivantes:

1. Toutes les horizontales du plan sont parallèles entre elles et à la trace horizontale du plan h_α^0 ($h_\alpha^1 // h_\alpha^2 // h_\alpha^0$).

2. Possèdent de points communs avec la trace frontale f_α^0 (points N^1, N^2) et sont parallèles à la trace horizontale h_α^0 du plan.

Sur la fig. 3.50 on a construit, à l'aide de la droite horizontale h_α, la projection horizontale absente du point К (voir. fig. 3.49), par ailleurs, d'abord on a mené la projection frontale $h_{2\alpha}$ de l'horizontale h_α parallèlement à l'axe x, et ensuite celle horizontale $h_{1\alpha}$ parallèlement à

Національний університет
водного господарства
та природокористування

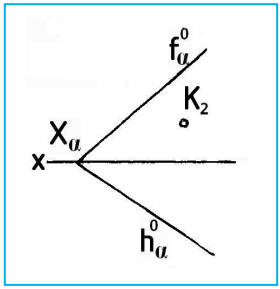


Рис. 3.49. Початкова умова задачі
Fig. 3.49. Condition initiale du problème

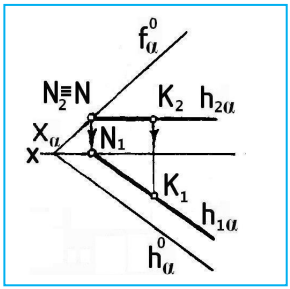


Рис. 3.50. Розв'язування задачі (рис. 3.49) за допомогою горизонтальної прямої h_α
Fig. 3.50. Solution du problème (fig. 3.49) à l'aide de la droite horizontale h_α

При побудові на епюрі горизонталі площини спочатку проводять її фронтальну проекцію паралельно до осі проекцій x. На рис. 3.51 в площині ΔABC спочатку проведено фронтальну проекцію $h_{2\alpha}$, а потім горизонтальну $h_{1\alpha}$ горизонталі h_α.	Au cours de construction de l'horizontale du plan sur l'épure on mène d'abord sa projection frontale parallèlement à l'axe de projections x. Sur la fig. 3.51 on mène d'abord la projection frontale $h_{2\alpha}$ et puis celle horizontale $h_{1\alpha}$ de l'horizontale h_α dans le plan ΔABC.
3.4.2. Фронталі площини – прямі, які належать площині і паралельні до фронтальної площини проекцій π_2.	3.4.2. Les frontales du plan – les droites, appartenant au plan et parallèles au plan frontal de projections π_2.
На рис. 3.52 дано наочне зображення, а на рис. 3.53 – епюр площини β, що задана слідами, і в якій проведені фронталі площини f_β^1 і f_β^2.	Sur la fig. 3.52 on propose l'image visuelle, et sur celle 3.53 – l'épure du plan β, affiché par des traces, et avec les frontales du plan f_β^1 et f_β^2 dédans.
Фронталі площини мають такі властивості: 1. Всі фронталі площини паралельні між собою і до	Les frontales possèdent les propriétés suivantes: 1. Toutes les frontales du plan sont parallèles entre elles et à la trace

Національний університет
водного господарства
та природокористування

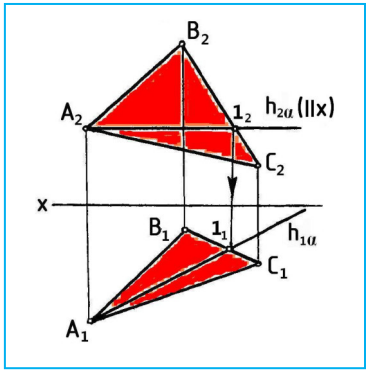


Рис. 3.51. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої h_α
Fig. 3.51. Traçage de la droite horizontale h_α dans le plan ΔABC

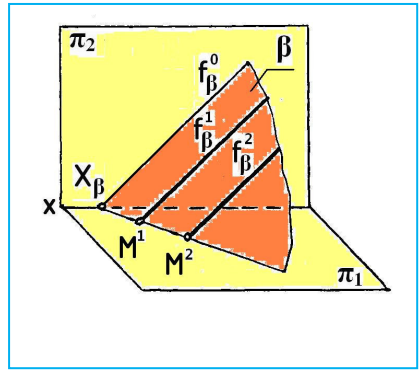


Рис. 3.52. Наочне зображення площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2 $(f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0)$
Fig. 3.52. Image visuelle du plan $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, avec les droited horizontales f_β^1 и f_β^2 $(f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_\beta^0)$ dédans

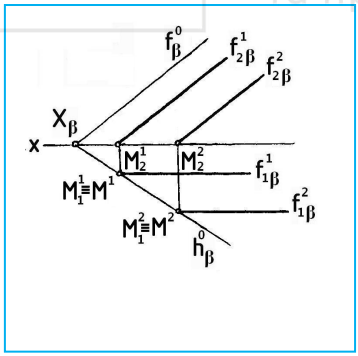


Рис. 3.53. Епюр площини $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, в якій проведено фронтальні прямі f_β^1 і f_β^2
Fig. 3.53. Epure du plan $\beta(h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$, avec les droites horizontales f_β^1 et f_β^2 dédans

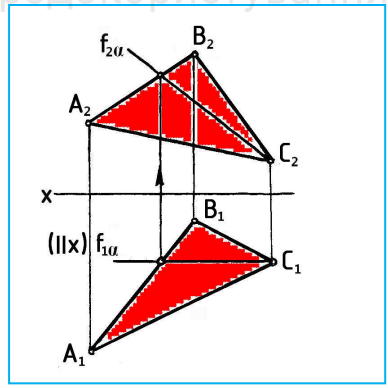


Рис. 3.54. Проведення в площині ΔABC горизонтальної прямої f_α
Fig. 3.54. Traçage dans le plan ΔABC de la droite horizontale f_α

Національний університет
водного господарства

фронтального сліду площини $f_{0\beta}$ ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_{0\beta}$).

2. Мають спільні точки з горизонтальним слідом h_β^0 (точки M^1, M^2) і паралельні до фронтального сліду f_β^0 площини.

На рис. 3.43 за допомогою фронтальної прямої f_α^1 побудовано відсутню фронтальну проекцію K_2 точки К (рис. 3.41).

На рис. 3.54 в площині ΔАВС проведено фронталь f_α, причому спочатку проведено її горизонтальну проекцію $f_{1\alpha}$ паралельно осі x, а потім фронтальну проекцію $f_{2\alpha}$.

3.4.3. Лінія найбільшого схилу площини – пряма площини, яка перпендикулярна до горизонталей площини або до горизонтального сліду площини, при цьому кут її нахилу до площини π_1 визначає кут нахилу самої площини до тієї ж площини π_1.

На рис. 3.55 пряма MN – лінія найбільшого схилу площини $\alpha(h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha})$, оскільки $MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$.

Побудову лінії найбільшого схилу площини починають з її горизонтальної проекції, яку проводять перпендикулярно (під прямими кутом) до горизонтальної проекції горизонталі площини або до її горизонтального сліду.

На рис. 3.56 побудовано епюр прямої MN – лінії найбільшого схилу, оскільки $M_1N_1 \perp h_\alpha^0$, тобто

frontale du plan $f_{0\beta}$ ($f_\beta^1 // f_\beta^2 // f_{0\beta}$).

2. Elles possèdent les points communs avec la trace horizontale h_β^0 (points M^1, M^2) et sont parallèles à la trace frontale f_β^0 du plan.

Sur la fig. 3.43 on a construit, à l'aide de la droite frontale f_α^1, la projection frontale absente K_2 du point K (fig. 3.41).

Sur la fig. 3.54 on mène d'abord la frontale f_α dans le plan ΔABC, par ailleurs, d'abord on a mené sa projection horizontalele $f_{1\alpha}$ parallèlement à l'axe x, et ensuite celle frontale $f_{2\alpha}$.

3.4.3. La ligne de pente maximale du plan – la droite du plan, perpendiculaire au plan horizontal ou à la trace horizontale du plan, avec ceci, l'angle de son inclinaison au plan π_1 détermine l'angle d'inclinaison de ce plan au même plan π_1.

Sur la fig. 3.55 la droite MN – la ligne de pente mximale du plan α ($h_{0\alpha} \cap f_{0\alpha}$), puisque $MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1$.

On commence la construction de la ligne de pente maximale du plan par sa projection horizontale, qui est menée perpendiculairement (à l'angle droit) de la projection horizontale de l'horizontale du plan ou à sa trace horizontale.

Sur la fig. 3.56 on a construit l'épure de la droite MN – ligne de pente maximale, puisque $M_1N_1 \perp h_\alpha^0$, soit

Національний університет
водного господарства
та природокористування

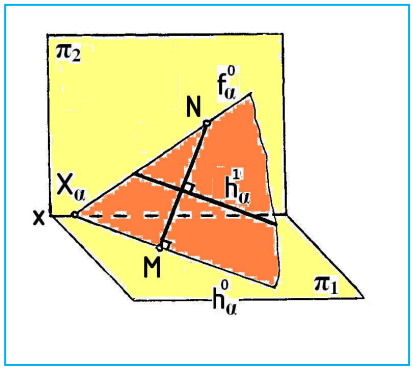


Рис. 3.55. Наочне зображення площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN $(MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1)$

Fig. 3.55. Image visuelle du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, avec la ligne de pente maxi MN $(MN \perp h_\alpha^0, h_\alpha^1)$ dédans

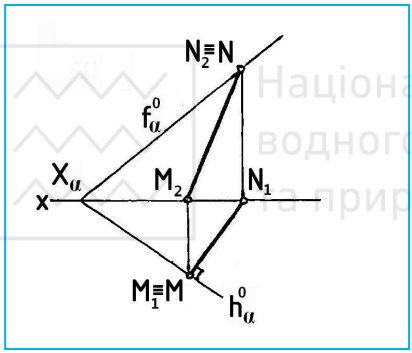


Рис. 3.56. Епюр площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, в якій розміщено лінію найбільшого схилу MN $(M_1N_1 \perp h_\alpha^0)$

Fig. 3.56. Epure du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$, avec la ligne de pente maxi MN $(M_1N_1 \perp h_\alpha^0)$ dédans

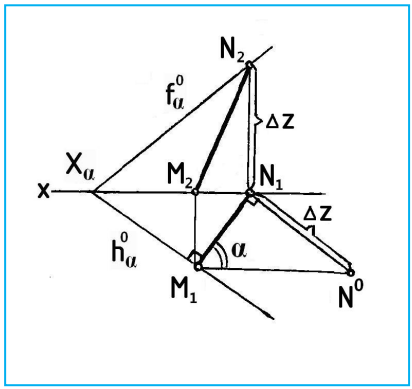


Рис. 3.57. Визначення кута нахилу α площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ до горизонтальної площини проекцій π_1 (MN – лінія найбільшого схилу площини)

Fig. 3.57. Définition de l'angle d'inclinaison α du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ au plan horizontal de projections π_1 (MN – ligne de pente maxi du plan)

Національний університет
водного господарства
та природокористування

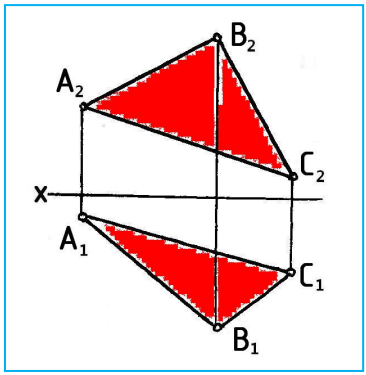


Рис. 3.58. Початкова умова задачі на визначення кута нахилу α площини β(ΔABC) до горизонтальної площини проекцій π_1

Fig. 3.58. Condition initiale du problème pour la définition de l'angle d'inclinaison α du plan β(ΔABC) au plan horizontal de projections π_1

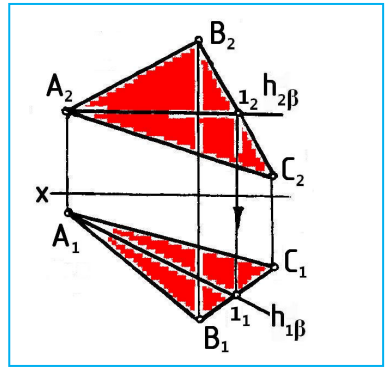


Рис. 3.59. Проведення в площині β(ΔABC) горизонтальної прямої h_β (1 дія)

Fig. 3.59. Traçage dans le plan β(ΔABC) de la droite horizontale h_β (1 action)

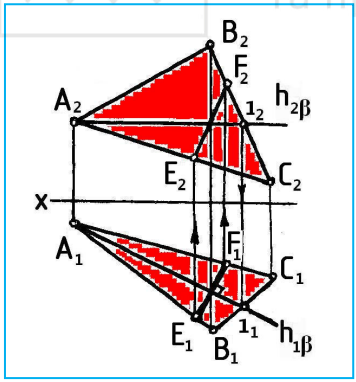


Рис. 3.60. Проведення в площині β(ΔABC) відрізка EF лінії найбільшого схилу (2 дія)

Fig. 3.60. traçage dans le plan β(ΔABC) du segment EF de la ligne de pente maxi (2 action)

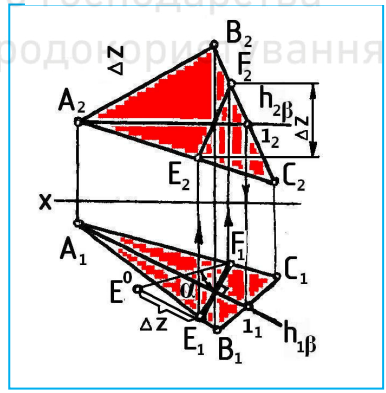


Рис. 3.61. Визначення способом прямокутного трикутника кута нахилу α площини β(ΔABC) до площини π_1

Fig. 3.61. Définition par la méthode du triangle rectangle de l'angle d'inclinaison α du plan β(ΔABC) au plan π_1

Національний університет
водного господарства
та природокористування

в просторі MN ⊥ $h_{0\alpha}$, а точки M і N належать слідам площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$. На рис. 3.57 способом прямокутного трикутника визначено кут нахилу лінії найбільшого схилу MN до площини π_1, а, отже, і кут нахилу самої площини $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ до площини π_1.	dans l'espace MN ⊥ h_α^0, et les points M et N appartiennent aux traces du plan $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$. Sur la fig. 3.57 on voit la définition de l'angle d'inclinaison de la ligne de pente maximale MN au plan π_1 par la méthode du triangle rectangle, et donc, l'angle d'inclinaison du plan même $\alpha(h_\alpha^0 \cap f_\alpha^0)$ au plan π_1.
На рис. 3.58 дано початкову умову задачі на визначення кута нахилу α площини β (ΔABC) до площини π_1. На рис. 3.59-3.61 наведено графічне розв'язування цієї задачі.	Sur la fig. 3.58 on propose la condition initiale du problème pour la définition de l'angle d'inclinaison α du plan β (ΔABC) au plan π_1. Sur les fig. 3.59-3.61 on cite la solution graphique du problème en question.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства

Нарисна геометрія. Розділ 4 Поверхні. Точка на поверхні	**Géométrie descriptive Chapitre 4. Surfaces. Point sur une surface**
4.1. Багатогранники та їх зображення	4.1. Polyèdres et leur représentation
Багатогранниками називаються геометричні тіла, які обмежені плоскими багатокутниками – гранями (рис. 4.1, 4.2). Елементи багатогранника: ребра – лінії перетину граней та вершини – точки перетину ребер.	Un polyèdre – une forme géométrique, limitée par des faces polygonales planes (fig. 4.1, 4.2). Les éléments d'un polyèdre sont: les arêtes – lignes d'intersection des faces et les sommets – points d'intersection des arêtes.
З великої кількості багатогранників практичний інтерес становлять піраміди (рис. 4.1) та призми (рис. 4.2). Зображення багатогранника зводиться до зображення його ребер та вершин.	Parmi un grand nombre de polyèdres ce sont les pyramides (fig. 4.1) et prismes (fig. 4.2) qui présentent un intérêt pratique. L'image visuelle d'un polyèdre se réduit à la représetation de ses arêtes et sommets.
Лінія, яка обмежує проекцію багатогранника, називається обрисом поверхні багатогранника. Обрис поверхні – завжди видима лінія, вона позначається суцільною основною лінією.	La ligne, limitant la projection d'un polyèdre, est appelée le contour du plan d'un polyèdre. Le contour d'un plan – c'est toujours une ligne visible représenté par un trait fort (principal) continu.
На рис. 4.3 зображено піраміду ABCS, де на горизонтальній проекції обрисом є лінія $A_1B_1C_1A_1$, а на фронтальній проекції – лінія $A_2B_2S_2A_2$.	Sur la fig. 4.3 on voit la pyramide ABCS, où le contour, sur la projection horizontale, est la ligne $A_1B_1C_1A_1$, et sur celle frontale – la ligne $A_2B_2S_2A_2$.
Точка і пряма лінія на поверхні багатогранника визначається так, як і в площині.	Un point et une droite sur une surface d'un polyèdre est déterminé de même façon que dans un plan.
На рис. 4.3 точка 1 належить ребру AS, де горизонтальну	Sur la fig. 4.3 le point 1 appartient à l'arête AS, où la projection

Національний університет
водного господарства
та природокористування

проекцію точки знайдено за допомогою лінії проекційного зв'язку.

Точка 2 належить ребру SC, проте горизонтальну проекцію точки визначити за допомогою лінії проекційного зв'язку неможливо, оскільки SC – відрізок профільної прямої, паралельної до площини π_3 (у цієї прямої проекції розміщені на одній лінії, перпендикулярній до осі x). В даному випадку горизонтальну проекцію 2_1 знайдено за допомогою прямої 23, яку проведено в грані ASC піраміди паралельно до сторони AC основи і тому є горизонталлю h.

Точка K лежить у середині грані BCS і її фронтальну проекцію K_2 знайдено за допомогою прямої S4, проведеної в грані BCS. Точка K розміщена на прямій S4 грані BCS і тому належить поверхні піраміди.

На рис. 4.4 зображено трикутну призму, нижня основа якої паралельна до горизонтальної площини проекцій, а верхню основу не показано. Відома фронтальна проекція K_2 точки K, що знаходиться на поверхні призми. Оскільки K_2 є видимою, то точка K знаходиться в грані призми, що примикає до сторони AC. Горизонтальну проекцію K_1 знайдено за допомогою прямої K1, що проведено паралельно до

horizontale d'un point est trouvée à l'aide de la ligne de liaison projective.

Le point 2 appartient à l'arête SC, pourtant il est impossible de définir la projection horizontale d'un point à l'aide de la ligne de liaison projective, puisque SC – le segment d'une droite de profil, parallèle au plan π_3 (toutes les lignes de cette projection sont situées sur seule ligne, perpendiculaire à l'axe x). Dans ce cas nous avons trouvé la projection horizontale 2_1 à l'aide de la droite 23, menée à la face ASC de la pyramide parallèlement au côté AC de la base et, donc, devenue ainsi l'horizontale h.

Le point K est situé au milieu de la face BCS et sa projection frontale K_2 est trouvée à l'aide de la droite S4, menée dans la face BCS. Le point K est située sur la droite S4 de la face BCS et, de ce fait, appartient au plan de la pyramide.

Sur la fig. 4.4 on présente le prisme triangulaire, dont la base inférieure est parallèle au plan horizontal de projections, et celui supérieure, n'est pas visible. On connaît la projection frontale K_2 du point K, se trouvant sur la surface du prisme. Du fait que K_2 est visible, le point K est situé dans la face du prisme, adjaçant au côté AC.

La projection horizontale K_1 est trouvée à l'aide de la droite K1, menée parallèlement aux arrêtes

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рис. 4.1. Наочне зображення піраміди
Fig. 4.1. Image visuelle d'une pyramide

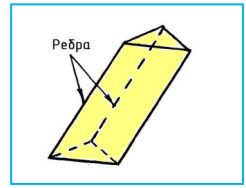


Рис. 4.2. Наочне зображення призми
Fig. 4.2. Image visuelle d'un prisme

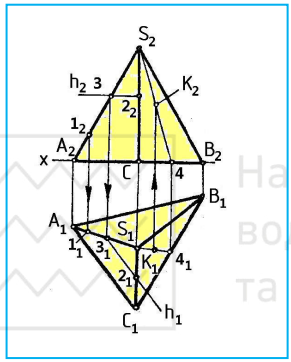


Рис. 4.3. Епюр піраміди
Fig. 4.3. Epure d'une pyramide

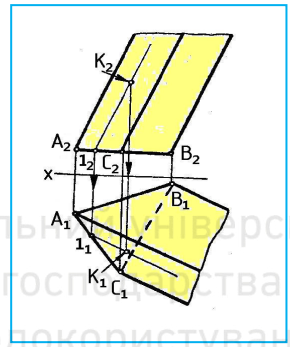


Рис. 4.4. Епюр призми
Fig. 4.4. Epure d'un prisme

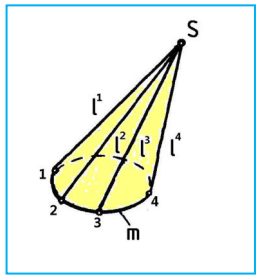


Рис. 4.5. Утворення конічної поверхні
Fig. 4.5. Construction d'un plan conique

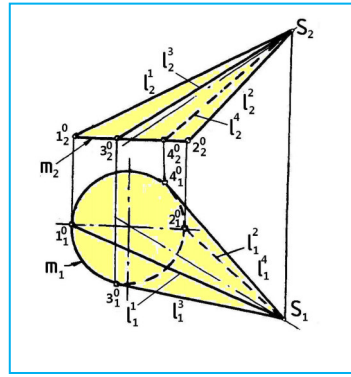


Рис. 4.6. Епюр похилого кругового конуса з проекціями обрисових твірних
Fig. 4.6. Epure d'un cône circulaire oblique avec les projections de contours de

Національний університет
водного господарства
та природокористування

бічних ребер призми.	d'un prisme.
4.2. Криві поверхні та їх зображення	4.2. Plans et surfaces courbes, leur représentation
Криві поверхні можна розглядати як сукупність безперервних положень лінії, що називається твірною, яка переміщується по напрямній лінії. Залежно від виду твірної криві поверхні поділяються на 2 класи: лінійчасті (твірна – пряма лінія) та нелінійчасті або криволійні (твірна – крива лінія).	Les plans courbes peuvent être considérés comme l'ensemble des positions continues d'une ligne, appelée génératrice, qui se déplace suivant la ligne directrice. En fonction de la ligne génératrice les plans courbes se divisent en 2 classes: menées (génératrice – ligne droite) et non menées ou curvilignes (génératrice – ligne courbe).
4.2.1. Конічна поверхня	4.2.1. Plan et surface conique
Конічна поверхня – це лінійчаста поверхня, що утворена рухом прямолінійної твірної l (рис. 4.5) уздовж криволійної напрямної m, і яка в усіх своїх положеннях перетинає напрямну, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) перетинаються в точці S, яка називається вершиною.	Une surface conique – surface menée, qui est formée par la révolution de la rectiligne génératrice l (fig. 4.5) suivant la curviligne directrice m, laquelle coupe la directrice dans toutes ses positions, dont toutes les génératrices (l^1, l^2, l^3 etc.) s'intersectent au point S. Ce dernier est nommé le sommet.
Криві поверхні, зокрема конічні, зображуються на площинах проекцій своїми обрисами поверхні. На рис. 4.6 зображено обриси геометричного тіла – похилого кругового конуса (еліптичного конуса), обмеженого конічною поверхнею і площиною (основою конуса), що перетинає всі твірні поверхні, причому	Les surfaces courbes, notamment coniques, sont représentées sur les plans de projections par leurs contours de surface. Sur la fig. 4.6 les contours d'un solide géométrique – du cône circulaire oblique (cône elliptique), limité par la surface conique et le plan (base du cône), coupant toutes les surfaces génératrices. La ligne m

Національний університет
водного господарства
та природокористування

лінія m називається лінією основи конуса.	est appelée la ligne de base du cône.
На рис. 4.6 показано проекції обрисових твірних l^1, l^2 (на фронтальній проекції) і l^3, l^4 (на горизонтальній проекції). Ці твірні проходять через вершину S і перетинають лінію основи m в точках 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.	Sur la fig. 4.6 on représente les projections des génératrices de contour l^1, l^2 (sur la projection frontale) et l^3, l^4 (sur la projection horizontale). Ces génératrices passent à travers le sommet S et coupent la ligne de base m dans les points 1^0, 2^0, 3^0, 4^0.
Точки лінії основи m, через які проходять обрисові твірні, ділять лінію основи на видиму та невидиму частини. Так, на горизонтальній проекції твірні l^3 і l^4 ділять горизонтальну проекцію m_1 в точках $3_1{}^0$ і $4_1{}^0$ на видиму та невидиму частини.	Les points de la ligne de base m, à travers lesquelles passent les génératrices de contour, divisent la ligne de base en parties visible et invisible. Ainsi, sur la projection horizontale les génératrices l^3 et l^4 divisent m_1 dans les points $3_1{}^0$ et $4_1{}^0$ en parties visible et invisible.
Покажемо, як визначити видимість твірних на рис. 4.6.	Sur la fig. 4.6. nous allons montrer la définition de la visibilité des génératrices.
На горизонтальній проекції твірні, що перетинають лінію основи між точками $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$- $4_1{}^0$ – невидимі (перетинають невидиму зверху частину лінії основи m), а між точками $3_1{}^0$ - $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ – видимі.	Sur la projection horizontale les génératrices, coupant la ligne de base entre les points $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$- $4_1{}^0$ – sont invisibles (coupent une partie de la ligne de base m, invisible du haut), et entre les points $3_1{}^0$ - $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ – elles sont visibles.
Твірні, які на горизонтальній проекції перетинають лінію основи m між точками $1_1{}^0$ - $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$, на фронтальній проекції видимі, а ті твірні, які перетинають лінію основи між точками $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ - $2_1{}^0$, – невидимі.	Les génératrices, coupant la ligne de base m entre les points $1_1{}^0$ - $3_1{}^0$ - $2_1{}^0$ sur la projection horizontale, sont visibles sur la projection frontale, et celles coupant la ligne de base entre les points $1_1{}^0$ - $4_1{}^0$ - $2_1{}^0$, – sont invisibles.
Так, на рис. 4.7 показано видимість твірних l^5 і l^6, які проведено у середині обрису	Ainsi sur la fig. 4.7 on propose la visibilité des génératrices l^5 et l^6, tracées à l'intérieur du

Національний університет
водного господарства
та природокористування

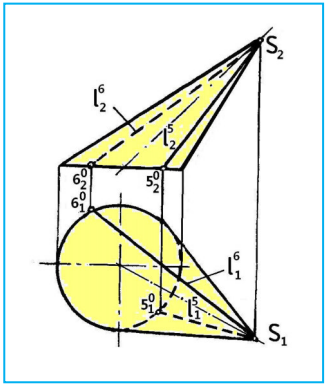


Рис. 4.7. Епюр похилого кругового конуса з проекціями твірних, проведених у середині обрису
Fig. 4.7. Epure du cône circulaire oblique avec projections des génératrices, tracées à l'intérieur du contour

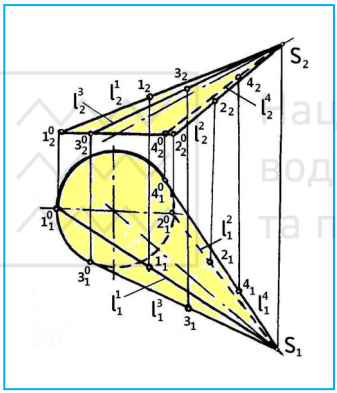


Рис. 4.8. Епюр похилого кругового конуса з проекціями точок, що лежать на обрисових твірних
Fig. 4.8. Epure du cône circulaire oblique aves projections des points, situés sur les génératrices de contour

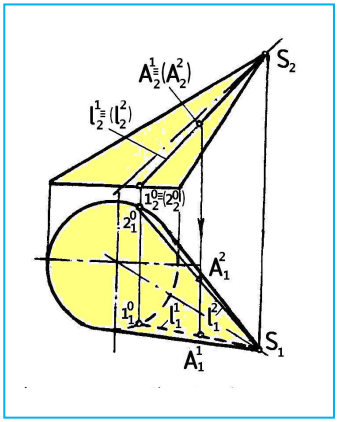


Рис. 4.9. Проекції точки А, зазначеної у середині обрису похилого кругового конуса
Fig. 4.9. Projections du point A, marqué à l'intérieur du contour du cône circulaire oblique

Національний університет
водного господарства
та природокористування

поверхні.

Точка належить поверхні, зокрема конічній, якщо вона знаходиться на лінії цієї поверхні. Точка на конічній поверхні визначається за допомогою твірної, що проходить через цю точку, перетинаючи вершину S і лінію основи m.

Точці, яка лежить на обрисовій твірній, відповідає одна точка поверхні конуса. Так, на рис. 4.8 показано проекції точок 1, 2, 3, 4, що лежать на відповідних обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4.

Якщо лінія основи є замкненою лінією, наприклад колом, то точка, що задана на одній проекції у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні геометричного тіла.

Так, на рис. 4.9 точці А, що зазначена у середині обрису на фронтальній проекції, відповідають дві точки поверхні A^1 і A^2, фронтальні проекції яких збігаються ($A_2^2 \equiv A_2^1$). Ці точки лежать на твірних l^1 і l^2. Видимість точок A^1 і A^2 на горизонтальній проекції визначена за видимістю твірних l^1 і l^2.

4.2.2. Циліндрична поверхня

Циліндрична поверхня – це лінійчаста поверхня, яка утворена паралельним рухом

contour.

Un point appartient à une surface, notamment conique, lorsque celle-ci est située sur la ligne de ladite surface. Un point de la surface conique est déterminé à l'aide d'une génératrice, passant à travers ce point en coupant le sommet S et la ligne de base m.

Un seul point de la surface du cône correspond au point, situé sur la génératrice de contour. Ainsi sur la fig. 4.8 on présente les projections des points 1, 2, 3, 4, situés sur les génératrices de contour appropriées l^1, l^2, l^3, l^4.

Si la ligne de base est la courbe fermée, par exemple une circonférence, le point, affiché sur une projection dédans le contour, déterminera la position de deux points de la surface d'un solide géométrique.

Ainsi sur la fig. 4.9 deux points de la surface A^1 et A^2, dont les projections frontales coïncident ($A_2^2 \equiv A_2^1$) correspondent au point A, marqué à l'intérieur du contour sur la projection frontale. Les points en question sont situés sur les génératrices l^1 et l^2. La visibilité des points A^1 et A^2 sur la projection horizontale est définie selon la visibilité des génératrices l^1 et l^2.

4.2.2. Surface cylindrique

La surface cylindrique – est une surface menée, formée par la révolution parallèle de la génératrice

Національний університет
водного господарства

прямолінійної твірної l (рис. 4.10) уздовж криволійної напрямної m, причому всі твірні (l^1, l^2, l^3 і т.д.) паралельні між собою і перетинають напрямну m в точках 1^0, 2^0, 3^0 і т.д.

На рис. 4.11 показано обриси похилого кругового циліндра (еліптичного циліндра), лінія основи якого – коло (верхню основу циліндра не показано). На рис. 4.11 зображено проекції обрисових твірних l^1, l^2, l^3, l^4 та проекції точок 1, 2, 3, 4, що на них знаходяться, а на рис. 4.12 – проекції точки А, що розміщена у середині обрису.

Слід зазначити, що видимість твірних та точок на циліндричній поверхні визначається так само, як і для конічної.

4.2.3. Поверхня кулі (сфера)

Поверхня кулі (сфера) – це нелінійчаста поверхня, утворена обертанням кола, яке є твірною, навколо осі, що збігається з діаметром кола, і розміщена перпендикулярно до горизонтальної площини проекції.

Лініями обрису сфери на горизонтальних та фронтальних площинах проекцій є кола.

На рис. 4.13 показано обриси поверхні кулі, де зазначено: i – вісь обертання ($i \perp \pi_1$), $l^м$ – головний меридіан (обрис

rectiligne l (fig. 4.10) suivant la génératrice curviligne m, et toutes les génératrices (l^1, l^2, l^3 et ctr) sont parallèles entre elles et coupent la directrice m dans les points 1^0, 2^0, 3^0 etc.

Sur la fig. 4.11 on propose les contours du cylindre circulaire oblique (cylindre elliptique), dont la ligne de base – la circonférence (base supérieure du cylindre n'est pas montrée). Sur la fig. 4.11 on représente les projections de génératrices de contour l^1, l^2, l^3, l^4 et les projections de points 1, 2, 3, 4, se trouvant sur ces dernières, et sur la fig. 4.12 – les projections du point A, situé à l'intérieur du contour.

Il est à noter, que la visibilité des génératrices et points sur la surface cylindrique est déterminée de même que pour la surface conique

4.2.2. Surface d'une balle (sphère)

La surface d'une balle (sphère) – c'est une surface non menée, formée par par la révolution de la circonférence, servant la génératrice, autour de l'axe, coïncidant avec le diamètre de la circonférence, et située perpendiculairement au plan horizontal de projections.

Les circonférences servent de lignes de contours de la sphère sur les projections horizontale et frontale.

Sur la fig. 4.13 on voit les contours de la surface d'une balle, où: i – axe de rotation ($i \perp \pi_1$), $l^м$ – méridien principal (contour de surface

Національний університет
водного господарства
та природокористування

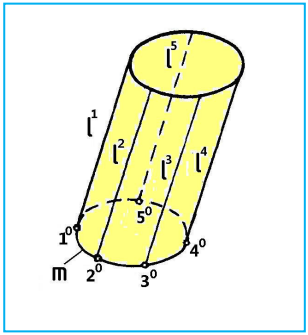


Рис. 4.10. Утворення циліндричної поверхні
Fig. 4.10. Formation d'une surface cylindrique

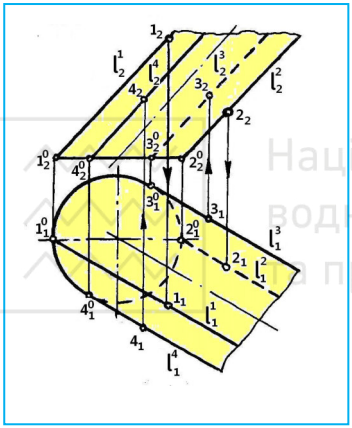


Рис. 4.11. Епюр похилого кругового циліндра з проекціями точок, що лежать на обрисових твірних
Fig. 4.11. Epure d'un cylindre circulaire oblique avec les projections de points, situés sur les génératrices de contour

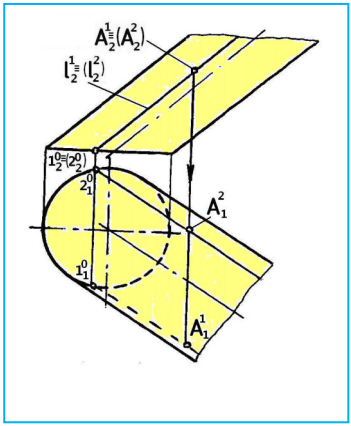


Рис. 4.12. Проекції точки А, зазначеної у середині обрису похилого кругового циліндра
Fig. 4.12. Projections du point A, marqué à l'intérieur de contour du cylindre circulaire oblique

Національний університет
водного господарства
та природокористування

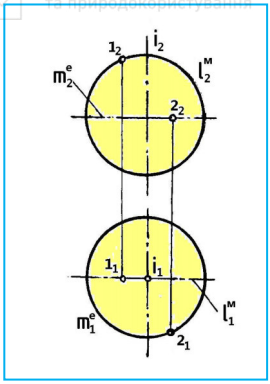


Рис. 4.13. Епюр поверхні кулі з проекціями точок 1 і 2 на обрисових лініях
Fig. 4.13. Epure de la surface d''une balle avec projections des points 1 et 2 sur les contours

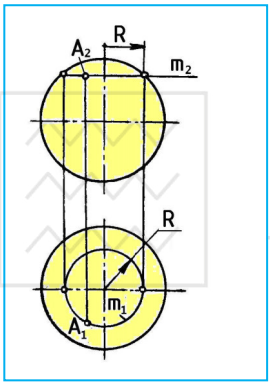


Рис. 4.14. Побудова проекцій точки А за допомогою паралелі m
Fig. 4.14. Construction de projections du point A à l'aide d'une parallèle m

Національний університет
водного господарства
та природокористування

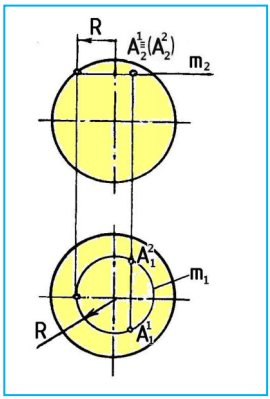


Рис. 4.15. Побудова проекцій точки А, зазначеної у середині обрису поверхні кулі
Fig. 4.15. Construction de projections du point A, marqué dédans le contour de la surface d'une balle

Національний університет водного господарства та природокористування

поверхні на площині π_2), m^e – екватор (обрис поверхні на площині π_1), а також проекції точки 1, що належить l^M, і точки 2, що належить m^e.

Поверхня кулі є поверхнею обертання, тобто точка поверхні при обертанні кулі описує коло відносно осі обертання. Ці кола називаються паралелями поверхні обертання. Найбільша паралель – це екватор.

На рис. 4.14 показано, що точка А при обертанні кулі описує коло *m* радіуса R. Оскільки площина кола паралельна площині π_1, то коло, яке називається паралеллю, проекціюється на π_1 в натуральну величину.

Точка на поверхні кулі, яка знаходиться у середині обрису, визначає положення двох точок поверхні і будується за допомогою паралелей поверхні кулі.

Так, на рис. 4.15 точка А, зазначена у середині обрису сфери, визначає положення двох точок A^1 і A^2 поверхні кулі, причому горизонтальні проекції $A_1{}^1$ і $A_1{}^2$ побудовані за допомогою паралелі *m* радіуса R.

4.2.4. Поверхня прямого кругового конуса

Поверхня прямого кругового конуса утворена обертанням прямолінійної твірної *l* (рис. 4.16) навколо осі *i*, що

sur le plan π_2), m^e – équateur (contour de la surface sur la plan π_1), ainsi que les projections du point 1, appartenant l^M et du point 2, appartenant au m^e.

La surface d'une balle est la surface de révolution, soit le point de surface, pendant la révolution d'une balle, trace une circonférence par rapport à l'axe de révolution. Ces circonférences sont appelées les parallèles de la surface de révolution. La parallèle maximale – c'est l'équateur.

Sur la fig. 4.14 on voit, que le point A pendant la révolution de la balle dessine la circonférence *m* du rayon R. Du fait que le plan de la circonférence est parallèle au plan π_1, la circonférence, appelée la parallèle, se projette sur π_1 en sa grandeur naturelle.

Le point sur la surface d'une balle, situé à l'intérieur du contour, détermine la position de deux points de la surface et se construit à l'aide de parallèles de la surface d'une balle.

Soit sur la fig. 4.15 le point A, marqué à l'intérieur du contour de la sphère, définie la position de deux points A^1 et A^2 de la surface d'une balle, et les projections horizontales $A_1{}^1$ et $A_1{}^2$ sont construites à l'aide de la parallèle *m* du payon R.

4.2.4. Surface d'un cône circulaire droit

La surface d'un cône circulaire droit est formée par la révolution de la génératrice rectiligne *l* (fig. 4.16) autour de l'axe *i*, qui

Національний університет
водного господарства
та природокористування

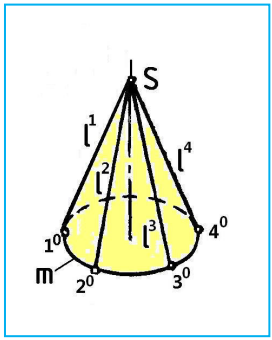


Рис. 4.16. Утворення поверхні прямого кругового конуса
Fig. 4.16. Formation de la surface du cône circulaire droit

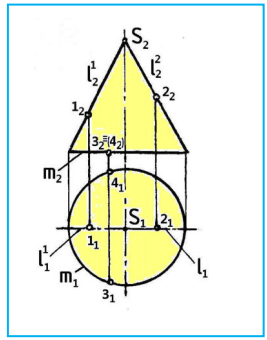


Рис. 4.17. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок на обрисових твірних і на лінії основи
Fig. 4.17. Epure du cône circulaire droit avec projections des points sur les génératrices de contour de la base

Національний університет
водного господарства
та природокористування

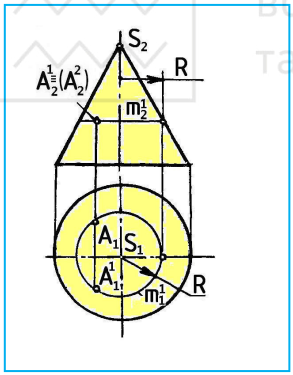


Рис. 4.18. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок A^1 і A^2, визначених за допомогою паралелі m^1
Fig. 4.18. Epure du cône circulaire droit avec projections de points A^1 et A^2, définis par la parallèle m^1

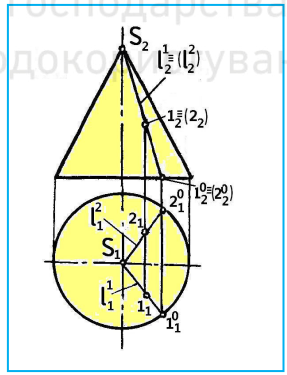


Рис. 4.19. Епюр прямого кругового конуса з проекціями точок 1 і 2, визначених за допомогою твірних l^1 і l^2
Fif. 4.19. Epure du cône circulaire droit avec projections de points1 et 2, définis par les génératrices l^1 et l^2

Національний університет
водного господарства

перпендикулярна до площини π_1, і є висотою конуса. Якщо поверхню прямого кругового конуса перетнути площиною, паралельною до π_1, то лінією основи m конуса буде коло.

На рис. 4.17 зображено прямий круговий конус або конус обертання, на поверхні якого зазначені проекції точок 1 і 2, що лежать на обрисових твірних l^1 і l^2, а також проекції точок 3 і 4, що знаходяться на лінії основи m.

Оскільки ця поверхня є поверхнею обертання, то точку на поверхні конуса обертання можна визначити за допомогою паралелі. На рис. 4.18 горизонтальні проекції точок A^1 і A^2 визначені за допомогою паралелі m^1.

Точку на поверхні такого конуса можна визначити також і за допомогою твірної поверхні. Так, на рис. 4.19 горизонтальні проекції точок 1 і 2 визначені за допомогою твірних l^1 і l^2.

Звернемо увагу, що точці, зазначеній у середині обрису на фронтальній проекції конуса, відповідають дві точки поверхні (рис. 4.18, 419).

est perpendiculaire au plan π_1, est sert de la hauteur du cône. Si la surface du cône circulaire droit est coupée par le plan, parallèle au π_1, la ligne de base m du cône sera la circonférence.

Sur la fig. 4.17 on représente le cône circulaire droit ou le cône de révolution, sur la surface duquel les projections des points 1 et 2 sont marquées. Ces derniers sont situés sur les génératrices de contour l^1 и l^2, les projections des points 3 et 4 sont situées sur la ligne de base m.

Du fait que cette surface serve de la surface de révolution, le point, sur la surface du cône de révolution, peut être déterminé à l'aide d'une parallèle. Sur la fig. 4.18 les projections horizontales des points A^1 et A^2 sont définies à l'aide de la parallèle m^1.

On peut déterminer aussi le point sur la surface de tel cône à l'aide de la surface génératrice. Ainsi, sur la fig. 4.19, les projections horizontales des points 1 et 2 sont déterminées par les génératrices l^1 et l^2.

Il est à noter que les deux points de la surface correspondent à un point, marqué à l'intérieur du contour sur la projection frontale de la projection du cône (fig. 4.18, 4.19).

Національний університет
водного господарства
та природокористування

КОРОТКИЙ УКРАЇНСЬКО- ФРАНЦУЗЬКИЙ СЛОВНИК
найбільш широко вживаних термінів та словосполучень при вивченні нарисної геометрії та інженерної графіки

VOCABULAIRE TERMINOLOGIQUE UKRAINIEN-FRANÇAIS
des termes usuels en géométrie descriptive

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Український алфавіт Alphabet ukrainien

А а, Б б, В в, Г г, ґ ґ, Д д, Е е, Є є, Ж ж, З з, И и, І і, Ї ї, Й й, К к, Л л, М м, Н н, О о, П п, Р р, С с, Т т, У у, Ф ф, Х х, Ц ц, Ч ч, Ш ш, Щ щ, Ю ю, Я я, Ь ь.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Аксонометрія – axonométrie f
Алгоритм – algorithme m
Аркуш (паперу) – feuille f (papier)
Багатогранник – polyèdre m
Багатокутник – polygone m
Віддалений – éloigné
Від'ємний – négatif
Вид: – type m, genre m
додатковий – suuplémentaire
зверху – au dessus
ззаду – derrière
зліва– à gauche
знизу – au dessous
місцевий – local
основний – principal
спереду – devant
справа – à droite
Видимість – visibilité f
Виносна лінія – ligne f d'attache
Відношення – relation f
Відстань – distance f
Відображення – image f
Відповідність – conformité f
Вісь – axe m
Властивість – propriété f
Вписаний – inscrit
Геометрія – géométrie f
Горизонталь – droite f horizontale
Горизонтальна лінія зв'язку – horizontale f de liaison
Горизонтальна площина проекцій – plan m horizontal de projections
Горизонтальна проекція – projection f horizontale
Горизонтальна пряма – droite f horizontale
Грань – face f
Двогранний кут – dièdre m
Діагональ – diagonale f
Діаметр – diamètre m
Дійсна величина – vraie valeur f
Довжина – longueur f
Довільний – arbitraire
Додатний – positif
Допоміжна площина – plan m auxiliaire
Дотик – tangence f
Дотична – tangente f
Дуга – arc f
Еліпс – ellipse m
Епюр – épure f
Заміна – remplacement m
Засіб – moyen m
Збіг – coïncidence f
Збігатися – coïncider
З'єднувати – joindre, réunir
Зображення – image f
Зрізаний – tronqué
Ізометрія – isométrie f
Індекс – index m, nombre m
Коло – circonférence f
Комплексне креслення – dessin m complexe
Конічний переріз – section f conique
Конкуруючі точки – points m, pl concourants
Конус – cône m
Концентричні кола – cercles m,pl concentriques
Ознака – indice f
Описаний – décrit
Описане коло – cercle m circonscrit
Опуклий – convexe,

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Креслення – dessin m
Креслити – dessiner
Крива лінія – ligne f courbe
Круг – cercle m
Куля – sphère f
Кут – angle m
Ламана лінія – ligne f brisée
ламаний розріз – setion f cassée
Лінійчата поверхня – surface f reglée
Межа – limite f
Мимобіжні прямі – droites f, pl gauches
Множина – multitude f
Модель – modèle m
Накладений переріз – section f superposée
Належати – appartenir
Належність – appartenance f
Наочний – visuel
Напрям – direction f
Напрямна – directionnelle f
Нарисна геометрія – géométrie f descriptive
Наслідок – coséquence f, résultat m
Натуральна величина – grandeur f naturelle
Нахил – inclinaison m
Невидимий – invisible
Неперервний – continu
Нерозгортна поверхня – surface f indépliable
Нескінченність – infinité f
Нормаль – normale f
Обертання – rotation f
Оборотне креслення – dessin m réversible
Обрис – contour m
Ортогональна проекція – projection f orthogonale
Паралельний – parallèle
Паралельні прямі – droites f,pl parallèles
Параметр – paramètre m
Переріз – section f
Перетворення – transformation f
Перетинати – intersecter, croiser
Перпендикуляр – perpendiculaire f
Піраміда – pyramide f
Площа – surface f, superficie f
Площина – plan m
Побудова – construction f
Поверхня – surface f
Поздовжній – longituninal
Позиційні задачі – problèmes m,pl de position
Початок координат – origine f de coordonnées
Призма – prisme m
Проектування – mise en projection f
Проекція – projection f
Проекційний зв'язок – liaison f projectionnelle
Проекціювання – projection f
Проекціююча пряма – droite f projective
Промінь – rayon m
Простір – espace m
Просторовий – spatial
Просторова уява – imagination f spatiale
Спряження – conjugaison f
Стала пряма креслення – droite f constante du dessin
Сумістити – combiner
Суміщати – associer

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет водного господарства та природокористування

Просторове мислення – réflexion f spatiale
Просторове уявлення – imagination f spatiale
Профільна площина проекцій – plan m de profil de projections
Пряма – droite f
Пряма рівня – droite f de niveau
Прямий кут – angle m droit
Прямокутна проекція – projection f rectangulaire
Прямокутник – rectangle m
Радіус – rayon m
Риска – trait m
Рівний – égal
Рівність – égalité f
Рівняння – équation f
Рівновіддалені – équidistants
Рівнонахилені – équiinclinés
Рівносторонній трикутник – triangle m équilatéral
Розв'язування – solution f
Розгортка – balayage m
Розгортна поверхня – surface f développable
Розмір – dimension f
Рух – mouvement m
Симетрія – symétrie f
Система координат – système m de coordonnées
Січна – sécante f
Січна площина – plan m sécant
Слід – trace f
Слід площини – trace f d'un plan
Слід прямої – trace d'une droite
Спільні точки – points m,pl communs
Спосіб – moyen m
Спотворення – distortion f
Суміщення – association f, combinaison m
Суцільний – continu
Сфера – sphère f
Твірна – génératrice f
Тіло – solide f, corps m
Товщина – épaisseur f
Точка – point m
Точки конкуруючі – points m,pl concourants
Точка сходу слідів – point m de descente de traces
Трикутник – triangle m
Фігура – figure f
Фронталь – frontale f
Фронтальна площина – plan m frontal
Фронтальна площина проекцій – plan m frontal de projections
Фронтальна пряма – droite f frontale
Циліндр – cylindre m
Циліндрична поверхня – surface f cylindrique

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Навчальне видання

Крівцов Валерій Володимирович
Тимощук Ігор Олександрович
Приймак Світлана Анатоліївна

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ
(з використанням іноземних мов)

Навчальний посібник

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Друкується в авторській редакції

Технічний редактор *Г.Ф. Сімчук*
Дизайн обкладинки *Т.В. Жаранова*

Підписано до друку 30.06.2015 р. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Папір друкарський № 1. Гарнітура Times. Друк різографічний.
Ум.-друк. арк. 16,3. Обл.-вид. арк. 17,1.
Тираж 100 прим. Зам. № 5132.

Видавець і виготовлювач
Редакційно-видавничий відділ
Національного університету
водного господарства та природокористування
33028, Рівне, вул. Соборна, 11.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції РВ № 31 від 26.04.2005 р.