Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства

та природокористування

Кафедра вищої математики

04-02-24

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ

до самостійної роботи із дисципліни

“Вища математика“

з розділу

”Похідна функції однієї змінної та її застосування ”

для студентів спеціальності 184“Гірництво ”

денної форми навчання

Рекомендовано науково-

методичною

комісією спеціальності

184 “Гірництво ”

протокол №3 від 22.11 .2017р.

Рівне – 2017

Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи із дисципліни ”Вища математика” з розділу ”Похідна функції однієї змінної та її застосування ” для студентів спеціальності 184 “Гірництво ” денної форми навчання /Водяна С.П. – Рівне: НУВГП, 2017. – 58 с.

Укладач: Водяна С. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальна за випуск: Цецик С.П., кандидат педагогічних наук, в.о. завідувача кафедри вищої математики.

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. Означення похідної.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, визначену на деякому проміжку (a; b), $x \in (a;b)$. Надамо аргументу x приросту Δx, тобто від точки x перейдемо до точки $(x + \Delta x)$. Зміну функції при переході від точки x до точки $(x + \Delta x)$ називають приростом функції, позначають Δy і обчислюють за формулою: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Якщо границя (1) існує і скінченна, то її називають *похідною функції* $y = f(x)$ і позначають одним із символів:

$$y', \ y'_x, \ \frac{dy}{dx}, \ f'(x), \ \frac{df(x)}{dx}.$$

Означення. Похідною функції $y = f(x)$ за аргументом x називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* цієї функції.

Знайдемо похідні деяких функцій, виходячи з означення похідної.

Приклад 1. Дана функція $y = x^2$. Знайти похідну в точці $x = 3$.

Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^2 - x^2 =$$
$$= 2x\Delta x + \Delta x^2 + x^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2 .$$

Складемо відношення приросту функції до приросту аргументу $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$, відшукаємо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$. Таким чином, $f'(x) = 2x$.

Знаходимо значення похідної в точці $x = 3$: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 2. $y = C$, де $C = const$.

Надамо аргументу x приросту Δx, дістанемо приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Тепер знайдемо границю відношення $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \text{ , тобто } C' = 0 .$$

Запам’ятаємо правило: похідна сталої дорівнює нулю.

Приклад 3. $y = sin\, x$.

Використаємо відому з тригонометрії формулу і першу визначну границю:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Знайдемо приріст функції в точці x і обчислимо границю:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогічно можна дістати: $(\cos x)' = -\sin x$.

2. Геометричний зміст похідної.

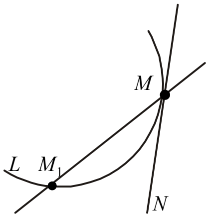
Означення. Дотичною до кривої L у точці M називається граничне положення MN січної MM_1 при прямуванні точки M_1 по кривій L до точки M (мал. 1).

Нехай крива, задана рівнянням $y = f(x)$, має дотичну в точці M (x, y). Позначимо (мал. 2) кутовий коефіцієнт дотичної MN: $k = tg\varphi$. Надамо в точці x приросту Δx, тоді ордината y набуде приросту Δy.

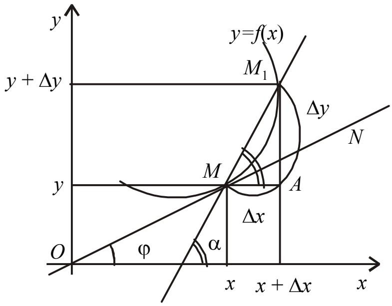
З ΔMAM_1 випливає, що $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$. При $\Delta x \to 0$: $M_1 \to M$,

$\alpha \to \varphi$ і січна прямує до положення дотичної *MN*.

Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\alpha = tg\varphi = k$.



Мал.1



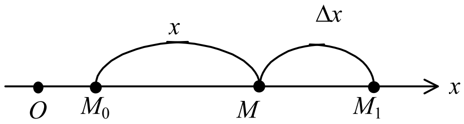
Мал.2

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то $f'(x) = k$.

Отримали геометричний зміст похідної: похідна $f'(x)$ чисельно дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної до графіка функції у точці з абсцисою *x*.

3. Механічний зміст похідної

Припустимо, що точка *M* рухається прямолінійно і нерівномірно по деякій прямій лінії, яку візьмемо за вісь *Ox* (мал. 3).



Мал. 3

Рух точки відбувається за законом $x = f(t)$, де *x* — шлях; *t* — час. Знайдемо швидкість точки *M* у даний момент часу *t* (миттєву швидкість).

Нехай точка M в момент t перебувала на відстані x від початкової точки M_0, а в момент часу $t+\Delta t$ точка опинилася на відстані $x+\Delta x$ від початкової точки й зайняла положення M_1. Отже, час t набув приросту Δt, а шлях x — приросту $\Delta x = f(\Delta t + t) - f(t)$. Середню швидкість руху точки M за час Δt знаходять за формулою $V_{cp} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Якщо точка M рухається рівномірно, то $V_{\text{ср}}$ є величина стала, і її беруть за швидкість точки. Для нерівномірного руху точки очевидно, що для достатньо близьких значень Δt до нуля середня швидкість точки M буде близька до її швидкості у момент часу t. Тому за точне значення швидкості точки M в момент часу t беруть величину

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t},$$

яка є швидкістю зміни функції $x = f(t)$ у точці. Отже, значення швидкості в момент t дорівнює значенню похідної від закону руху в момент t: $V(t) = f'(t)$. В цьому і полягає механічний зміст похідної.

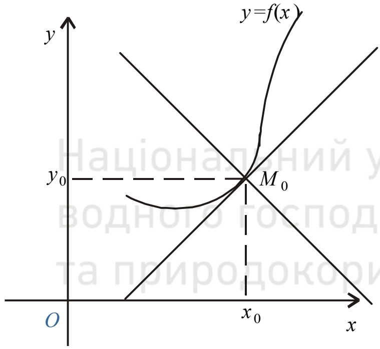
4. Рівняння дотичної і нормалі до плоскої кривої

Нехай функція $y = f(x)$ визначена і неперервна на деякому проміжку $[a;\ b]$. Визначимо рівняння дотичної й нормалі до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 \in [a;b]$.

Оскільки дотична й нормаль проходять через точку з абсцисою x_0, то рівняння кожної з них будемо шукати у вигляді рівняння прямої, що проходить через задану точку M_0 $(x_0; y_0)$ з відомим кутовим коефіцієнтом (мал. 4):

$$y - y_0 = k(x - x_0), \tag{2}$$

де k кутовий коефіцієнт дотичної. Використовуючи геометричний зміст похідної, маємо $k = f'(x_0)$.



Мал. 4

Рівняння дотичної. Оскільки $y_0 = f(x_0)$, то з формули (2) отримаємо рівняння дотичної у вигляді

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Рівняння нормалі.

Означення. Нормаллю до графіка функції в точці M_0 називають пряму, що проходить через дану точку перпендикулярно до дотичної в цій точці (мал. 4).

Використовуючи умову перпендикулярності дотичної та нормалі, знаходимо кутовий коефіцієнт нормалі $k_n = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ і записуємо її рівняння у вигляді

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \qquad (4)$$

Приклад 4. Знайти рівняння дотичної та нормалі до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Знайдемо похідну від заданої функції $f'(x) = 2x$, звідси $f'(-2) = -4; f(-2) = (-2)^2 = 4$.

Рівняння дотичної (3) і нормалі (4) запишуться у вигляді: $y - 4 = -4(x + 2)$, $y - 4 = \dfrac{1}{4}(x + 2)$ або в загальному вигляді: $4x + y + 4 = 0$, - рівняння шуканої дотичної; $x - 4y + 18 = 0$, - рівняння шуканої нормалі.

5. Основні правила диференціювання. Таблиця похідних.

Нехай функції $u = u(x), v = v(x)$ мають похідні в точці x.

1. Похідна сталої дорівнює нулю, тобто якщо $y = c$, де $c = \text{const}$, то $y' = 0$.

2. Похідна суми (різниці) скінченної функцій відповідно дорівнює сумі (різниці) похідних цих функцій: $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$.

3. Похідна добутку двох функцій дорівнює добутку

першого множника на похідну другого плюс добуток другого множника на похідну першого:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

4. Сталий множник можна винести за знак похідної:

$$(cu)' = c(u'), \text{ де } c = const.$$

5. Похідна частки дорівнює дробу, чисельник якого є різницею добутків знаменника на похідну чисельника і чисельника на похідну знаменника, а знаменник є квадратом знаменника початкового дробу:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ де } v(x) \neq 0.$$

Приклад 5. Обчислити похідну від функції $y = \text{tg}\, x$.

$$y' = (tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, отримали формулу: $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Похідна складної функції. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$. Функція $f(u)$ називається зовнішньою, а функція $\varphi(x)$ — внутрішньою, або проміжним аргументом.

Теорема. Якщо функції $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ мають похідні по своїх аргументах, то похідна складної функції існує і дорівнює: $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таким чином, похідна складної функції дорівнює добутку похідної зовнішньої функції за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу по незалежній змінній.

Таблиця похідних від основних елементарних функцій (через простий аргумент x):

1. $(x)' = 1$;
2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$; окремі випадки: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $(\dfrac{1}{x})' = -\dfrac{1}{x^2}$;
3. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$, $a \succ 0$; окремий випадок: $\left(e^x\right)' = e^x$;
4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$; окремий випадок: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
5. $(\sin x)' = \cos x$;
6. $(\cos x)' = -\sin x$;
7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10. $(arccos\, x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

6. Диференціал функції, його властивості та застосування.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x \in (a;b)$ і надамо аргументу x приросту Δx.

Якщо приріст функції Δy можна подати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \Delta x \,, \tag{5}$$

де α — нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$), A – стала по відношенню до Δx, то функцію $y = f(x)$ називають диференційовною.

Не важко бачити, що якщо функція $y = f(x)$ має похідну в точці x, то вона і диференційовна в точці x. Дійсно, якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, то враховуючи взаємозв'язок змінної величини, що має скінченну границю, і нескінченної малої величини, можемо записати $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, де α — нескінченно мала величина ($\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$).

Помноживши всі члени останньої рівності на Δx, дістанемо

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x , \tag{6}$$

що означає диференційовність функції.

Отже, для функції однієї змінної властивість мати похідну означає бути диференційовною, і навпаки.

З виразу (6)слідує, що приріст функції Δy складається із суми двох доданків, з яких перший доданок — *головна частина приросту*, є лінійним відносно Δx (при $\Delta x \to 0$ добуток $f'(x)\Delta x$ є нескінченно мала величина першого порядку відносно Δx). Другий доданок — добуток $\alpha \Delta x$ завжди нескінченно мала величина вищого порядку, ніж Δx.

Означення. Головна частина приросту функції, лінійна по відношенню до приросту аргументу, називається *диференціалом функції* $y = f(x)$; його позначають символом *dy,* тобто

$$dy = f'(x)\Delta x \tag{7}$$

Знайдемо диференціал функції $y = x$; для цього випадку $y' = (x)' = 1$, отже, $dy = dx = \Delta x$. Таким чином, диференціал незалежної змінної збігається з її приростом Δx. З огляду на це формулу для диференціала (7) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx . \tag{8}$$

Приклад 6. Знайти диференціал dy функції $y = x^2$: 1) при довільних значеннях x та Δx; 2) при $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$.

1) $dy = \left(x^2\right)' \Delta x = 2x\Delta x$;

2) якщо $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$, то $dy = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}1 = 2$.

6.1. Правила знаходження диференціала

З означення диференціала та властивостей похідних отримуємо правила знаходження диференціала:

1. $dc = 0$, c=const;
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3. $d(uv) = udv + vdu$;
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

Наслідок: $d(cu) = c\,du$, $c=const$.

6.2. Застосування деференціала в наближених обчисленнях.

Вираз (6) можна записати у вигляді:

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x. \tag{9}$$

Якщо $f'(x) \neq 0$, то величина $\alpha \Delta x$ є малою величиною вищого порядку порівняно з dy.

При малих Δx доданком $\alpha \Delta x$ у виразі (9) нехтують і користуються наближеною рівністю $\Delta y \approx dy$, або в розгорнутому вигляді: $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$, звідки

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \tag{10}$$

Остання наближена рівність тим точніша, чим менше Δx.

Приклад 7. Обчислити наближено $\sqrt{27}$.

Перетворимо вираз, що стоїть під знаком радикала:

$$\sqrt{27}=\sqrt{25+2}=\sqrt{25\left(1+\frac{2}{25}\right)}=5\cdot\sqrt{1+\frac{2}{25}}\,. \qquad (11)$$

Щоб обчислити вираз $\sqrt{1+\frac{2}{25}}$ введемо функцію $f(x)=\sqrt{x}$.

Знаходимо $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Формула (10) в даному випадку запишеться так:

$$\sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Delta x,\text{ де } x=1, \Delta x=\frac{2}{25}=0{,}08\,.$$

Отримуємо: $\sqrt{1+\frac{2}{25}}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}\frac{2}{25}=1+\frac{1}{25}=1{,}04\,.$ (12)

Підставивши (12) у рівність (11), дістанемо

$$\sqrt{27}\approx 5\cdot 1{,}04=5{,}2\,.$$

Приклад 8 . Знайти диференціал функції $y=arctg\,x$.

Знаходимо: $dy=(arctgx)'\,dx=\frac{dx}{1+x^2}$.

Приклад 9. Обчислити наближено значення $arcsin\,0{,}51$.

Розглянемо функцію $y=arcsin\,x$.Зауважуємо, що зручно обчислювати значення $arcsin\,0{,}5=\frac{\pi}{6}$ і що 0,51=0,5 + 0,01. Тому, покладаємо x = 0,5, Δx = 0,01 та, застосовуючи формулу $arcsin\,(x+\Delta x)\approx arcsin x+(arcsin x)'\Delta x$,

$(arcsin\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, одержимо

$$arcsin\, 0{,}51 \approx arcsin\, 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513\,.$$

7. Залежність між неперервністю і диференційовністю функції

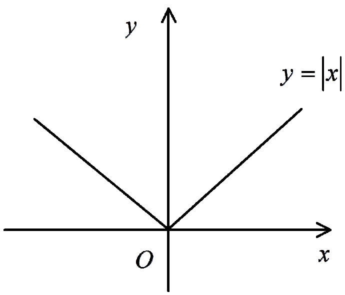
Функція $y = f\,(x)$ є *неперервною в точці x*, якщо у цій точці $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Очевидно, що для диференційовної функції ця умова виконується, отже, має місце

Теорема. Якщо функція диференційовна в деякій точці, то в цій точці функція неперервна.

Обернене твердження неправильне: неперервна функція може не мати похідної.

Прикладом неперервної функції, що не має похідної в одній точці, є функція $y = |x|$ (мал. 5). Ця функція неперервна при $x = 0$, але не диференційовна для цього значення, оскільки в точці з абсцисою $x = 0$ не існує дотичної до графіка функції.



Мал. 5

Таким чином, неперервність функції в точці є необхідною умовою диференційовності функції $y = f(x)$ в цій точці.

8. Похідна неявної функції.

Нехай співвідношення $F(x;\ y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будем вважати, що ця функція — диференційовна.

Продиференціювавши по змінній x обидві частини рівняння $F(x;\ y) = 0$, дістанемо рівняння першого степеня відносно y'. З цього рівняння легко знайти y', тобто похідну неявної функції.

Приклад 10. Знайти y'_x з рівняння $x^4 + y^2 - 5 = 0$.

Оскільки y є функцією від x, то y^2 розглядають як складну функцію від x, отже, $\left(y^2\right)' = 2y \cdot y'$.

Диференціюємо по x обидві частини заданого рівняння, дістанемо $4x^3 + 2yy' = 0$. Звідси $y' = -\dfrac{4x^3}{2y} = -\dfrac{2x^3}{y}$.

9. Похідна оберненої функції.

Нехай задані дві взаємно обернені диференційовні функції

$$y = f(x) \text{ та } x = \varphi(y), \left(f(\varphi(y)) = y\right).$$

Теорема. Похідна x'_y оберненої функції $x = \varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y = f(x)$: $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

Приклад 11. Обчислити похідну для функції $x = arcsin\ y$.

Задана функція обернена до функції $y = sin\,x$.

Згідно з теоремою 7 можна записати

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{(sin\,x)'} = \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{\sqrt{1 - sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Звідси $(arcsin\,y)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$.

Якщо в останньому виразі замість y записати x, то дістанемо

$$(arcsin\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10. Похідна параметрично заданої функції.

Нехай функцію y від x задано параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\} (t_1 \le t \le t_2).$$

Припустимо, що функції $\varphi(t), \psi(t)$ мають похідні і що функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$, яка також є диференційовною. Тоді визначену параметричними рівняннями функціональну залежність $y = f(x)$ можна розглядати як складну функцію $y = \psi(t)$, $t = \Phi(x)$ (t — проміжний аргумент).

На підставі двох останніх теорем маємо:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \psi'_t(t)\Phi'_x(x)\text{ , де } \Phi'_x(x) = \frac{1}{\varphi'_t(t)}.$$

Звідки $y'_x = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ або $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знайдена формула дає можливість знаходити похідну y'_x від параметрично заданої функції, не знаходячи явної залежності $y = f(x)$.

Приклад 12. Функція y від x задана параметричними рівняннями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t \end{aligned}\right\}(0 \le t \le \pi).$$

Знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$: а) при будь-якому t; б) при $t = \dfrac{\pi}{4}$.

а) $y'_x = \dfrac{(a\sin t)'}{(a\cos t)'} = \dfrac{a\cos t}{-a\sin t} = -ctgt$;

б) $\left(y'_x\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -ctg\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

Знайти похідні заданих функцій.

Приклад 13. $y = 5x^2 - \sqrt[3]{x} + \ln x$.

Дана функція є алгебраїчною сумою трьох функцій. Згідно правил диференціювання і таблиці похідних, отримуємо:

$$y' = \left(5x^2\right)' - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' + (ln\,x)' = 5\cdot 2x - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{x} = 10x - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{x}.$$

Приклад 14. $y = 7^{arcsin\left(x^4-6\right)}$.

Задана функція складна: зовнішня — показникова функція з основою 7, внутрішня для неї — обернена тригонометрична. Обернена тригонометрична, у свою чергу, є складною, для якої внутрішня функція — алгебраїчна сума (x^4-6) з аргументом x.

Таким чином, задана функція є суперпозицією трьох функцій.

При диференціюванні послідовно застосовуємо два рази теорему про похідну складної функції :

$$y' = \left[7^{\arcsin\left(x^4-6\right)}\right]\ \ln 7\left[\arcsin\left(x^4-6\right)\right]' =$$

$$= 7^{\arcsin\left(x^4-6\right)}\ln 7\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^4-6\right)^2}}\cdot(x^4-6)' =$$

$$= 7^{arcsin\left(x^4-6\right)}ln\,7\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^4-6\right)^2}}\cdot 4x^3.$$

Приклад 15. $y = (tg3x)^{sin\,4x}$.

Задана функція є степенево-показниковою функцією виду

$$y = (u(x))^{v(x)},\ \text{де}\ u(x) = tg3x, v(x) = sin\,4x. \qquad (13)$$

Щоб знайти похідну від такої функції, використовують попереднє логарифмування.

Прологарифмуємо функцію (13) за основою *e*:

$$ln\,y = v\,ln\,u\,. \qquad (14)$$

Зауважимо, що $ln\,y$ і $ln\,u$ — складні функції. Диференціюємо ліву і праву частини рівності (14), отримуємо:

$$\frac{1}{y}y' = v'\,ln\,u + \frac{1}{u}u'v\,.$$

Звідси $y' = y\left(v'\,ln\,u + \frac{u'}{u}v\right) = u^v\left(v'\,ln\,u + \frac{u'}{u}v\right)$.

Таким чином, дістали формулу для знаходження похідної від степенево-показникової функції виду (13).

$$y' = u^v\left(v'\,ln\,u + \frac{u'}{u}v\right). \qquad (15)$$

У даному випадку отримуємо:

$$y' = (tg3x)^{sin\,4x}\cdot\left(4\,cos\,4x\cdot ln\,tg3x + \frac{3\,sin\,4x}{tg3x\cdot cos^2\,3x}\right).$$

Зауважимо, що формулу (15) не потрібно вчити напам'ять, потрібно зрозуміти ідею.

11. Похідні вищих порядків.

Похідна $y' = f'(x)$ називається похідною першого порядку від функції $y = f(x)$ і, в свою чергу, як функція від *x*,також може мати похідну.

Похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається символами: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ і т.д.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$, $n = 1,\ 2,\ \ldots$

Приклад 16. Знайти похідну третього порядку для функції $y = sin(3x+5)$.

$$y' = 3cos(3x+5);\quad y'' = (y')' = -9sin(3x+5);$$
$$y''' = (y'')' = (-9sin(3x+5))' = -27cos(3x+5).$$

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

Приклад 17. $y = x\sqrt{x}(3ln\,x-4)$.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3ln\,x-4)\right)' = (x^{\frac{3}{2}})'(3ln\,x-4)+(x^{\frac{3}{2}})(3ln\,x-4)' =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3ln\,x-4)+x^{\frac{3}{2}}\frac{3}{x} = 3x^{\frac{1}{2}}+\frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot ln\,x-3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\,ln\,x.$$

Приклад 18. $y = sin(5x+3)$.

$$y' = cos(5x+3)\cdot(5x+3)' = 5cos(2x+3).$$

Приклад 19. $y = ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1} \right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Приклад 20. $y = \frac{1}{2} tg^2 \sqrt{x} + ln\, cos \sqrt{x}$.

$$y' = tg\sqrt{x} \frac{1}{cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{cos\sqrt{x}} \left(-sin\sqrt{x} \right) \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} tg\sqrt{x} \left(\frac{1}{cos^2 \sqrt{x}} - 1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} tg^3 \sqrt{x}.$$

Приклад 21. $y = x^{x^2}$.

Логарифмуємо ліву і праву частини: $ln\, y = x^2 ln\, x$.

Диференціюємо ліву і праву частини:

$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x\, ln\, x$, $\frac{y'}{y} = x(1+2\, ln\, x)$, звідки остаточно знаходимо $y' = xy(1+2\, ln\, x) = xx^{x^2}(1+2\, ln\, x) = x^{x^2+1}(1+2\, ln\, x)$.

Приклад 22. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^4 + ln\, y - x^2 e^y = 0$.

Диференціюємо по x обидві частини рівняння, вважаючи y функцією від x, дістанемо: $4x^3 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y \cdot y' - 2xe^y = 0$.

Звідки $y' = \dfrac{\left(2xye^{y} - 4x^{3}\right)y}{1 - x^{2}ye^{y}}$.

Приклад 23. Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точці $M_0(1, -1)$.

З рівняння кривої знайдемо похідну:

$$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0, \text{ тобто } y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Таким чином, $y'(1) = f'(1) = -\dfrac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \dfrac{1}{4}$.

Рівняння дотичної буде $y + 1 = \dfrac{1}{4}(x - 1)$, або $x - 4y - 5 = 0$.

Рівняння нормалі $y + 1 = -4(x - 1)$, або $4x + y - 3 = 0$.

Приклад 24. Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \dfrac{1}{2}x + 7$ Знайти $y', y'', y''', \ldots$.

Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \dfrac{1}{2}$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,\quad y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{(4)} = 120x + 48,\quad y^{(5)} = 120,\quad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

Приклад 25. Знайти y'_x, якщо

$$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$$

Знайдемо

$$x'_t = 3t^2 + 3 = 3\left(t^2 + 1\right),\ y'_t = 15t^2\left(t^2 + 1\right) \Rightarrow\ y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} =$$

$$= \frac{15t^2\left(t^2+1\right)}{3\left(t^2+1\right)} = 5t^2.$$

Завдання для самостійної роботи.

а) Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y = x^2$. *Відповідь.* $y' = 2x$.

2. $y = \sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y = 5\sin x + 3\cos x$. *Відповідь.* $y' = 5\cos x - 3\sin x$.

5. $y = 2^x$. *Відповідь.* $y' = 2^x \ ln 2$.

б) Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

1. $y = 3x^3 \cdot ln x - x^3$. *Відповідь.* $y' = 9x^2 \cdot ln x$.

2. $y = 2^{3x} / 3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\dfrac{8}{9}\right)^x \cdot ln\dfrac{8}{9}$.

3. $y = ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$.

4. $y = ln\dfrac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y' = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

5. $y=2x\cdot tg2x+ln\cos 2x-2x^2$. *Відповідь.* $y'=4x\cdot tg^2 2x$.

6. $y=arctg\dfrac{3x-x^2}{1-3x^2}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{3}{1+x^2}$.

7. $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}-\arcsin e^x$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{2e^{3x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

8. $y=e^x\cdot 2^{5x}/3^{4x}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{e^x\cdot 2^{5x}}{3^{4x}}\cdot ln\dfrac{32e}{81}$

9. $y=\dfrac{x+1}{x}-e^{-ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь.* $y'=0$.

10. $y=\dfrac{x^2\cdot e^{x^2}}{x^2+1}$. *Відповідь.* $y'=2e^{x^2}\cdot x\cdot\dfrac{x^4+x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

в) Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

1. $x\sin y+y\sin x=0$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$.

2. $y^2-2xy+b=0$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{y}{y-x}$.

3. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

4. $y=\cos(x+y)$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$

5. $y=1+xe^y$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{e^y}{2-y}$.

г) Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

1. $x = 1 - t^2,\ y = t - t^3.$ *Відповідь.* $\left(3t^2 - 1\right)/\left(2t\right).$

2. $x = \dfrac{t+1}{t},\ y = \dfrac{t-1}{t}.$ *Відповідь.* $-1.$

3. $x = ln\left(1 + t^2\right),\ y = t - arctgt.$ *Відповідь.* $\dfrac{t}{2}.$

4. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1},\ y = \dfrac{t}{t^2-1}.$ *Відповідь.* $\dfrac{1+t^2}{t\left(2+3t-t^3\right)}.$

5. $x = e^t\, sint,\ y = e^t\, cost.$ *Відповідь.* $\dfrac{1-tgt}{1+tgt}.$

д) Застосувати диференціал до наближених обчислень.

1. Обчислити Δy та dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ та $\Delta x = 0{,}01$.

Відповідь. $\Delta y = 0{,}0401;\ dy = 0{,}04$.

2. Знайти наближене значення $arctg1{,}05$.

Відповідь. 0,811.

3. Знайти наближене значення об’єму кулі радіусом 2,01 м.

Відповідь 34,04 м^3.

4. Знайти наближене значення $tg46^\circ$.

Відповідь. 1,035.

5. Знайти наближене значення $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Відповідь. 1, 9938.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

12. Правило Лопіталя

Нехай дані функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, визначені й диференційовні в деякому околі точки a, виключаючи, можливо, саму точку a. Розглянемо відношення $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$. Може бути, що при $x \to a$ обидві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ прямують до 0 або до ∞, тобто ці функції одночасно є або нескінченно малими, або нескінченно великими величинами при $x \to a$. Тоді говорять, що в точці a функція $f(x)$ має невизначеність виду

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{або} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]. \qquad (16)$$

У цьому випадку, використовуючи похідні $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$, можна сформулювати правило для знаходження границі функції $f(x)$ при $x \to a$, тобто визначити спосіб для розкриття невизначеностей виду (16).

Теорема (правило Лопіталя). **Границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих функцій дорівнює границі відношення їхніх похідних (скінченній або нескінченній), якщо остання існує.**

Зауваження. Якщо $\varphi'(x)$ і $\psi'(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до 0 або до ∞ і задовольняють ті умови, які були накладені теоремою на функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то до відношення

$\varphi'(x)/\psi'(x)$ знову застосовуємо правило Лопіталя і виводимо формулу

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi''(x)}{\psi''(x)} \text{ і т. п.}$$

Приклад 26. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$.

Виконавши граничний перехід, дістанемо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 7x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{7\cos x}{2}=\frac{7}{2}.$$

Приклад 27. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^3+7x+5}$.

Виконання граничного переходу приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+1}{2x^2+7x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+3x+1\right)'}{\left(2x^3+7x+5\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3}{6x^2+7}=$$

(виконання граничного переходу знову приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, а тому застосовуємо правило Лопіталя повторно):

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x+3)'}{(6x^2+7)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{12x} = \frac{1}{6} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \cdot 0 = 0.$$

Перетворення невизначеностей виду

$[0 \cdot \infty]$; $[0^0]$, $[\infty^0]$, $[1^\infty]$, $[\infty - \infty]$ до виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Правило Лопіталя можна застосувати тільки для розкриття невизначеностей вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. При розкритті інших типів невизначеностей їх перетворюють до одного з цих видів.

Невизначеність виду $[0 \cdot \infty]$. Нехай $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty$.

Потрібно знайти

$$\lim_{x\to a} (u(x) \cdot v \cdot (x)). \qquad (17)$$

Це невизначеність типу $[0 \cdot \infty]$.

Якщо вираз (17) записати у вигляді

$$\lim_{x\to a} (u \cdot v) = \lim_{x\to a} \frac{u}{\frac{1}{v}} \text{ або } \lim_{x\to a} u \cdot v = \lim_{x\to a} \frac{v}{\frac{1}{u}},$$

то при $x \to a$ дістанемо невизначеність відповідно вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 28. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3 \ln x\right)$.

Тут маємо невизначеність вигляду $\left[0\cdot\infty\right]$. Зобразимо добуток функції у вигляді частки, а потім, отримавши невизначеність $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3 \ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(x^{-3}\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{3}{x^4}}=-\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}x^3=0.$$

Невизначеність вигляду $\left[0^0\right]$, $\left[\infty^0\right]$, $\left[1^\infty\right]$. Нехай маємо функцію $u(x)^{v(x)}$.

При $x\to a$ (a — скінченне або нескінченне) можливі три випадки:

а) $u\to 0,\ v\to 0$ маємо невизначеність виду $\left[0^0\right]$;

б) $u\to\infty,\ v\to 0$ дістанемо невизначеність $\left[\infty^0\right]$;

в) $u\to 1,\ v\to\infty$ маємо невизначеність виду $\left[1^\infty\right]$.

Ці невизначеності за допомогою логарифмування зводяться до невизначеності вигляду $\left[0\cdot\infty\right]$. Справді, позначимо дану функцію через y, тобто візьмемо $y=u^v$. Прологарифмувавши цю рівність, дістанемо $\ln y = v\ln u\,(u>0)$.

Легко перевірити, що при $x\to a$ добуток $v\ln u$ буде невизначеністю $[0\cdot\infty]$ для всіх трьох випадків.

Відповідно до підпункту 1 розкриємо невизначеність $[0\cdot\infty]$, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{x\to a} \ln y = k$ (k — скінченне або ∞).

Звідси $\lim\limits_{x\to a} y = \lim\limits_{x\to a} u^v = e^k$.

Приклад 29. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$.

Це невизначеність виду $\left[0^0\right]$. Позначимо функцію, що стоїть під знаком границі, через y, тобто $y=(\sin x)^x$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y = x\ln\sin x = \frac{\ln\sin x}{x^{-1}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції. Тут маємо невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\sin x\left(-x^{-2}\right)} = -\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{\sin x} = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x = e^0 = 1$.

Приклад 30. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$.

При $x\to 1$ маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

$$y = x^{\frac{1}{x-1}},\;\; \ln y = \frac{\ln x}{x-1};\;\; \lim_{x\to 1} \ln y = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e^1 = e$.

Невизначеність $[\infty - \infty]$. Якщо функції $u(x) \to \infty,\; v(x) \to \infty$ при $x \to a$ (a — скінченне або нескінченне), то різниця $u - v$ при $x \to a$ дає невизначеність $[\infty - \infty]$. Остання з допомогою алгебраїчних перетворень зводиться до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 31. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$.

Маємо невизначеність виду $[\infty - \infty]$. Алгебраїчним перетворенням приведемо цю невизначеність до невизначеності $\left[\frac{0}{0}\right]$, а потім двічі застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

Приклад 32. Знайти $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Чисельник та знаменник дробу окремо прямують до нуля при $x \to 0$ (невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$).

Використовуючи правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Приклад 33. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{\frac{1}{2}e^{x/2}}=0.$$

Приклад 34. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]$.

Подамо добуток функцій у вигляді дробу, а потім, діставши невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Приклад 35. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]$.

Зведемо дроби до спільного знаменника. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. До неї застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x\left(2+x\right)}=\frac{1}{2}.$$

13. Дослідження функцій та побудова графіків

1. Інтервали монотонності функції, екстремуми функції. Інтервали опуклості та вгнутості графіка функції

1.1. Зростання та спадання функції. Екстремуми функції.

Функція $f(x)$ називається *зростаючою на інтервалі* з області визначення функції, якщо більшому значенню аргументу x відповідає більше значення функції $f(x)$ (т.б. при $x_2>x_1$ виконується нерівність $f(x_2)>f(x_1)$) для всіх x із даного інтервалу; аналогічно, функція $f(x)$ є *спадною* на інтервалі, якщо більшому значенню аргументу $\boldsymbol{x}$ відповідає менше значення функції $f(x)$(т.б. при $x_2>x_1$ виконується: $f(x_2)<f(x_1)$)для всіх x із даного інтервала.

Інтервали зростання та спадання функції називають інтервалами *монотонності* функції.

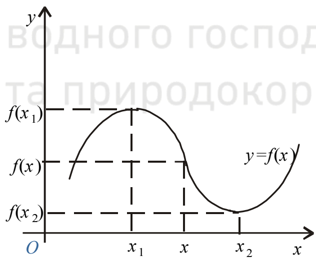
Достатня умова зростання (спадання) функції):

1. Якщо похідна диференційовної функції додатна всередині деякого проміжку, то функція зростає на цьому проміжку.

2. Якщо похідна диференційовної функції від'ємна всередині проміжку, то функція спадає на цьому проміжку.

Введемо поняття точок максимуму та мінімуму функції.

Означення. Функція $f(x)$ має *максимум при* $x = x_1$ якщо в деякому околі точки x_1 виконується нерівність $f(x_1) > f(x)$ при $x \neq x_1$ (мал. 6).



мал.6. Екстремуми функції

Функція $f(x)$ має *мінімум* при $x=x_2$, якщо в деякому околі точки x_2 має місце нерівність $f(x_2) < f(x)$ при $x \neq x_2$ (мал. 6).

Точки максимуму та мінімуму функції називають точками *екстремуму* функції.

Поняття екстремуму функції носить локальний характер.

Має місце **необхідна умова** екстремуму функції, що формулюється наступною теоремою.

Теорема 1.1. В точці екстремуму x_0 диференційовної функції $f(x\ )$ її похідна дорівнює нулю:

$$f'(x_0)=0. \tag{1.1}$$

Геометрично умова (1.1) означає, що дотична до графіка диференційовної функції $y=f(x)$ в точці екстремуму паралельна осі Ox , оскільки кутовий коефіцієнт цієї дотичної дорівнює нулю.

Неперервна функція може мати екстремум тільки в тих точках, де похідна функції або дорівнює нулю, або не існує.

Означення. Значення аргументу x, в яких похідна $f'(x)$ заданої функції рівна нулю або для якої похідна $f'(x)$ не існує, називають *критичними точками I роду.*

Зауважимо, що виконання умови (1.1) саме по собі ще не забезпечує екстремуму в точці x_0 .

Наприклад, для функції $f(x)=x^3$ маємо: $f'(x)=3x^2$ і $f'(0)=0$, однак значення $f(0)=0$ не є екстремумом даної функції, що ілюструє графік кубічної параболи $y=x^3$.

Для остаточного вирішення питання про наявність екстремуму в критичній точці використовують **достатні умови** існування екстремуму функції в критичній точці, які формулюють наступні теореми:

Теорема 1.2. (Достатня умова екстремуму за І-ю похідною**).**

Нехай функція $f(x)$ неперервна на деякому інтервалі, в якому міститься критична точка x_0, і диференційовна в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_0). Якщо при переході зліва направо через цю точку похідна:

1) змінює знак з «+» на «–», то при $x = x_0$ функція має максимум;

2) змінює знак з «–» на «+», то функція має у цій точці мінімум;

3) не змінює свого знака, то функція в точці $x = x_0$ екстремуму не має.

Зауважимо, що в більш-менш складних прикладах визначення знаку похідної зліва і справа від критичної точки може викликати незручності, які можна «обійти», скориставшись другою похідною функції та наступною теремою.

Теорема 1.3. *(*Достатня умова екстремуму за 2-ю похідною***).*** Якщо для диференційовної функції $y = f(x)$ у деякій точці x_0 її перша похідна $f'(x)$ дорівнює нулю, а друга похідна $f''(x)$ існує та відмінна від нуля, тобто $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, то:

а) при $f''(x_0) > 0$ в точці x_0 функція $y = f(x)$ має мінімум;

б) при $f''(x_0) < 0$ функція $y = f(x)$ має максимум.

1.2. Алгоритм знаходження екстремумів неперервної функції y= $f(x)$.

1. Знаходимо область визначення функції $y = f(x)$.

2. Знаходимо похідну функції $f'(x)$.

3. Визначаємо критичні значення аргументу x (критичні точки першого роду), для цього:

а) прирівнюємо першу похідну до нуля і знаходимо дійсні корені рівняння $f'(x) = 0$;

б) знаходимо значення x, для яких похідна $f'(x)$ не існує.

4. Ділимо область визначення функції знайденими критичними точками на інтервали.

5. Визначаємо знак похідної в кожному інтервалі. Оскільки знак похідної залишається сталим в інтервалі між двома сусідніми критичними точками, досить знайти знак похідної в будь-якій зручній («пробній») точці кожного інтервала.

6. Користуючись достатньою умовою екстремуму, наприклад, про зміну знаку похідної (Теор. 2), робимо висновок про наявність чи відсутність екстремуму в кожній критичній точці.

7. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у кожній точці

екстремуму, т.б. знаходимо максимальні та мінімальні значення функції.

Отримані результати дослідження зручно заносити в таблицю, наприклад:

x (інтервал, значення змінної)	(x_1, x_2)	x_2	(x_2, x_3)
$f'(x)$ (знак похідної в даному інтервалі або значення похідної в критичній точці)	$+$	0	$-$
$f(x)$ (висновки про поведінку функції в інтервалі та про наявність екстремуму в критичній точці)	$\nearrow$ Функція зростає	$f(x_2)$ Максимум функції	$\searrow$ Функція спадає

Приклад 36. Дослідити функцію на екстремум $y = \dfrac{e^x}{x}$.

1. Область визначення $D(y)$: $\begin{cases} x \in R \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

2. Знаходимо похідну:

$$y' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{\left(e^x\right)' \cdot x - e^x \cdot x'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2};$$

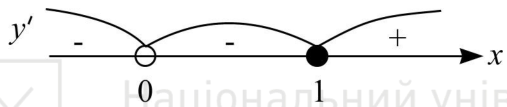
Знаходимо критичні точки I роду:

а) $y' = 0 \Rightarrow \dfrac{e^x(x-1)}{x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^x(x-1) = 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x-1=0 \\ x=1 \end{matrix}$;

б) y' не існує при $x = 0$, яке не належить області визначення функції.

Отже, $x = 1$ - критична точка I роду.

3. Розбиваємо $D(y)$ на інтервали критичною точкою $x = 1$:



Національний університет водного господарства та природокористування

Знаходимо знак y' в кожному інтервалі:

$$y'(-1) = \frac{e^{-1}(-1-1)}{(-1)^2} = -\frac{2}{e} < 0;$$

$$y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4\sqrt{e}\cdot\frac{1}{2} = -2\sqrt{e} < 0;$$

$$y'(2) = \frac{e^2(2-1)}{(2)^2} = \frac{e^2}{4} > 0.$$

Отримані дані можна подати в таблиці.

Таблиця 1

x	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	-	-		$+$
y	$\searrow$	$\searrow$	e	$\nearrow$
Висновки	Функція спадає	Функція спадає	min	Функція зростає

$$y(1)=\frac{e^1}{1}=e.$$

Отже, $y_{min}=e$ при $x=1$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання для самостійної роботи.

А) Знайти інтервали монотонності функцій:

1. $y=x^3-3x^2-9x+14$

2. $y=x^4-2x^2-5.$

3. $y=2-3x+x^3.$

4. $y=\left(x^2-1\right)^{3/2}.$

5. $y=xe^{-x}.$

6. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$

7. $y=x-e^x.$

8. $y=x^2e^{-x}.$

9. $y = \dfrac{x}{ln\,x}$.

Б) Дослідити функції на екстремум.

10. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

11. $y = 2x^3 - 3x^2$.

12. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

13. $y = \dfrac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$.

14. $y = ln\left(x^2 + 1\right)$.

15. $y = x - ln(1 + x)$.

1.3. Опуклість і вгнутість графіка кривої. Точки перегину.

Графік кривої називають *опуклим* (*вгнутим*) на деякому проміжку, якщо всі точки кривої лежать нижче (вище) дотичної, проведеної в будь-якій точці кривої на цьому проміжку.

Для функції з неперервною похідною 2-го порядку, має місце наступна теорема (достатня умова опуклості, вгнутості).

Теорема 1.4. Якщо в усіх точках проміжку (a; b) похідна 2-го порядку функції $y = f(x)$ додатна $\left(f''(x) > 0\right)$, то графік функції вгнутий, якщо ж в усіх точках проміжку (a;b) друга похідна від'ємна $\left(f''(x) < 0\right)$, то графік функції опуклий.

Точка, яка відокремлює опуклу частину графіка кривої від вгнутої, називається ***точкою перегину.***

Теорема 1.5. Якщо для функції $y = f(x)$ друга похідна $f''(x)$ у деякій точці x_0 перетворюється на нуль або не існує і при переході через цю точку змінює свій знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.

Точки, в яких друга похідна функції рівна нулю або не існує, називають критичними точками другого роду.

Алгоритм знаходження інтервалів опуклості та вгнутості, точок перегину графіка функції.

1). Знаходимо область визначення функції $y = f(x)$.

2). Визначаємо критичні точки другого роду, для цього:

а) знаходимо дійсні корені рівняння $f''(x)$=0;

б) знаходимо точки, в яких $f''(x)$ не існує.

3). Ділимо область визначення функції знайденими критичними точками на інтервали, в яких $f''(x)$ зберігає постійний знак.

4). Визначаємо знак похідної $f''(x)$ в кожному інтервалі, беручи «пробну» точку з інтервала.

5). При наявності чи відсутності зміни знаку $f''(x)$ при переході через критичну точку x_0, робимо відповідний висновок про наявність чи відсутність перегину в точці

$M(x_0; f(x_0))$ на графіку функції.

Приклад 37. Знайти інтервали опуклості, вгнутості та точки перегину графіка функції: $y = (1 + x^2)e^x$.

1.Область визначення функції $D(y)$: $x \in R$,

2. Знаходимо критичні точки другого роду:

$$y' = (1 + x^2)' \cdot e^x + (1 + x^2)(e^x)' =$$

$$= 2xe^x + (1 + x^2) \cdot e^x = e^x(x^2 + 2x + 1) = e^x \cdot (x + 1)^2,$$

$$y'' = (e^x)' \cdot (x + 1)^2 + e^x \cdot ((x + 1)^2)' =$$

$$= e^x \cdot (x + 1)^2 + e^x \cdot 2(x + 1) =$$

$$= e^x \cdot (x + 1)(x + 1 + 2) =$$

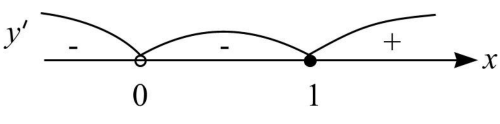
$= e^x \cdot (x + 1)(x + 3)$, - існує для всіх $x \in R$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$y'' = 0 \;\Rightarrow\; e^x \cdot (x + 1)(x + 3) = 0, \;\Rightarrow\; x + 1 = 0$ або $x + 3 = 0$.

Отже, $x_1 = -1$, $x_2 = -3$, - критичні точки другого роду.

3. Розбиваємо область визначення на інтервали критичними точками $x_1 = -1$, $x_2 = -3$ на інтервали та визначаємо знак y'' в кожному інтервалі, беручи « пробну» точку:



$$y''(-4)=e^{-4}(-4+1)(-4+3)=\frac{3}{e^{4}}>0\,;$$

$$y''(-2)=e^{-2}(-1)\cdot 1=-\frac{1}{e^{2}}<0\,;$$

$$y''(0)=e^{0}\cdot 1\cdot 3=3>0\,;$$

Отримані дані можна подати у вигляді таблиці.

Таблиця 2

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;+\infty)$
y''	$+$	0	-	0	$+$
y		$\frac{10}{e^{3}}$		$\frac{2}{e}$	
Висновки	Графік функції вгнутий	Перегин	Графік функції опуклий	Перегин	Графік функції вгнутий

$$y(-3)=\left(1+(-3)^{2}\right)e^{-3}=\frac{10}{e^{3}}\,;$$

$$y(-1)=\left(1+(-1)^{2}\right)e^{-1}=\frac{2}{e}\,.$$

Отже, точки $M_1\left(-3;\frac{10}{e^{3}}\right)$, $M_2\left(-1;\frac{2}{e}\right)$ є точками перегину графіка функції.

Графік функції вгнутий при $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)$, а опуклий при $x \in (-3;-1)$.

1.4. Найбільше та найменше значення функції на відрізку, алгоритм знаходження.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку [a; b], то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого та найменшого значення.

Функція на відрізку [a; b] досягає свого найбільшого значення або на одному з кінців цього проміжку, або в такій внутрішній точці , яка є точкою максимуму.

Аналогічно, найменше значення функції досягається або на одному з кінців даного проміжку, або в такій внутрішній точці, яка є точкою мінімуму.

Алгоритм знаходження найбільшого та найменшого значення неперервної функції на проміжку [a; b]:

1) знаходимо всі екстремуми функції на проміжку [a; b];

2) визначаємо значення функції на кінцях проміжку, тобто обчислюємо $f(a)$ і $f(b)$;

3) з усіх отриманих значень функції вибираємо найбільше і найменше значення, які і будуть шуканими найбільшим та найменшим значеннями функції на даному проміжку.

Приклад 38. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = x^3 - 3x + 1$ на проміжку [-2; 3].

1. Область визначення функції: $D(y)$: $x \in R$.

2. Знаходимо екстремуми функції на даному відрізку.

$y' = \left(x^3 - 3x + 1\right)' = 3x^2 - 3$;

$y' = 0$; $3x^2 - 3 = 0$, $\Rightarrow$ $x^2 = 1$ $\Rightarrow$ $x_{1,2} = \pm 1$,-критичні точки першого роду.

$x_1 = -1 \in [-2;3]$;

$x_2 = 1 \in [-2;3]$.

Визначаємо наявність екстремуму за другою похідною:

$y'' = (y')' = \left(3x^3 - 3\right)' = 6x$;

$y''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$, отже $x_1 = -1$, - точка максимуму функції.

$y''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0$, отже $x = 1$, - точка мінімуму функції.

$y_{max} = y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 1 = 3$;

$y_{min} = y(1) = 1 - 3 + 1 = -1$.

Знаходимо значення функції на кінцях проміжку:

$y(-2) = (-2)^3 - 3 \cdot (-2) + 1 = -8 + 6 + 1 = -1$,

$y(3) = 3^3 - 3 \cdot 3 + 1 = 27 - 9 + 1 = 19$.

Отже, $\underset{[-2;3]}{y_{найб.}} = 19$ при $x = 3$;

$\underset{[-2;3]}{y_{найм.}} = -1$ при $x = 1$.

Як бачимо, найбільше значення досягається на кінці проміжку, а найменше в точці мінімуму функції.

Завдання для самостійної роботи.

Знайти точки перегину кривих:

1. $y=(x-4)^5+4x+4$.

2. $y=(x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.

3. $y=x^4-8x^3+24x^2$.

Знайти точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості графіків функцій.

4. $y=x^3-5x^2+3x-5.$

5. $y=(x+1)^4+e^x.$

6. $y=3x^5-5x^4+3x-2.$

Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

7. $y=x^4-2x^3+3;\ \ [-3,\ 2].$

8. $y=x^4-2x^2+5;\ \ [-2,\ 2].$

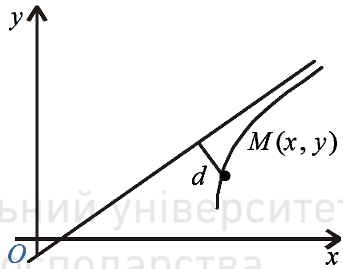
9. $y=x+2\sqrt{x};\ \ [0,\ 4].$

10. $y=x^5-5x^4+5x^3+1;\ \ [-1,\ 2].$

2. Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функції та побудови її графіка.

2.1. Асимптоти та їх знаходження.

Асимптотою кривої називають **пряму,** до якої необмежено наближається крива при необмеженому віддаленні точки кривої від початку координат, т.б., якщо відстань d від змінної точки M кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки M у нескінченність (мал. 7.).



мал.7. Асимтота кривої

Асимптоти бувають *вертикальні* та *похилі*.

Вертикальні асимптоти. Якщо виконується хоча б одна із умов

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty, \qquad \text{або} \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty,$$

то пряма $x=a$ є вертикальною асимптотою для графіка функції $y=f(x)$.

Похилі асимптоти. Нехай крива $y=f(x)$ має похилу асимптоту $y=kx+b$, тоді

$$\left.\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \\ b &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right) \end{aligned}\right\}. \qquad (2.1)$$

Похилі асимптоти можуть бути або одностронні, або двосторонні в залежності від того, чи різняться чи співпадають значення границь (2.1) при різних знаках нескінченності в цих формулах.

Якщо хоча б одна з границь (2.1) не існує або не є скінченна, то крива похилих асимптот у відповідній напівплощині не має.

2.2. Схема дослідження функції та побудови її графіка.

I. Загальні властивості функції.

1. Область визначення, область значень функції.

2. Парність (непарність) функції.

3. Періодичність функції.

4. Неперервність функції, точки розриву функції та їх характер. Асимптоти графіка функції.

5. Точки перетину графіка функції з осями координат.

II. Дослідження за I-ю похідною.

1. Інтервали зростання, спадання функції.

2. Точки екстремуму функції.

III. Дослідження за II-ю похідною.

1. Інтервали опуклості, вгнутості графіка функції.

2. Точки перегину.

Графік функції будують за характерними точками, лініями, отриманими у результаті дослідження. Якщо їх недостатньо, знаходять допоміжні точки для деяких конкретних значень аргументу та досліджують поведінку функції на границі області визначення.

Приклад39. Дослідити функцію і побудувати її графік.

$$y=\frac{x}{x^2-1};$$

I. Загальні властивості функції.

1) область визначення $D(y)$:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$\begin{cases} x\in R, \quad x^2-1\neq 0; & \Rightarrow \quad x^2\neq 1; \\ & \quad\ x\neq \pm 1. \end{cases}$$

$$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$$

Область значень: $y\in R$.

2) Парність, непарність.

Якщо $f(-x)=f(x)$ для всіх $x\in D(f)$, то функція парна.

Якщо $f(-x)=-f(x)$ для всіх $x\in D(f)$, то функція непарна.

$$f(x)=\frac{x}{x^2-1};$$

Знаходимо $f(-x)=\dfrac{(-x)}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x)$, отже функція непарна.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат. Графік парної функції симетричний відносно осі *ОУ*.

3) Періодичність.

Функція неперіодична.

4) Неперервність. Асимптоти графіка функції.

В області визначення функції неперервна.

Дослідимо поведінку функції в околах точок $x=-1$, $x=1$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}\frac{x}{\left(x^2-1\right)}=\lim_{\substack{x\to -1-0\\(x+1)\to -0}}\frac{\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{x}}{(\underset{\underset{-2}{\downarrow}}{x-1})(\underset{\underset{-0}{\downarrow}}{x+1})}=-\infty\,;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to -1+0\\(x+1)\to +0}}\frac{\overset{\overset{-1}{\uparrow}}{x}}{(\underset{\underset{-2}{\downarrow}}{x-1})(\underset{\underset{+0}{\downarrow}}{x+1})}=+\infty\,;$$

$\Rightarrow x=-1$ - вертикальна асимптота.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{\substack{x\to 1-0\\(x-1)\to -0}}\frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{x}}{(\underset{\underset{-0}{\downarrow}}{x-1})(\underset{\underset{2}{\downarrow}}{x+1})}=-\infty\,;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\substack{x\to 1+0 \\ (x-1)\to +0}} \frac{\overset{\overset{1}{\uparrow}}{x}}{\underset{\underset{+0}{\downarrow}}{(x-1)}\underset{\underset{2}{\downarrow}}{(x+1)}} = +\infty;$$

$\Rightarrow x = 1$ -вертикальна асимптота.

Похилі асимптоти шукаємо у вигляді рівняння

$y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$; $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(f(f) - kx\right)$.

Отримуємо: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x^2-1)x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$,

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x}{x^2-1} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0, \quad \Rightarrow y = 0,$$ -

двостороння горизонтальна асимптота.

5). Точки перетину графіка функції з осями координат:

$x = 0 \Rightarrow y = 0, \left(y(0) = \frac{0}{0^2-1} = 0\right);$

$y = 0 \Rightarrow x = 0$.

Отже, точка $0(0;0)$ належить графіку функції.

II. Дослідження за І-ю похідною.

Знаходимо похідну:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2-1}\right)' = \frac{x'\left(x^2-1\right) - x\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{x^2-1-x\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = -\frac{\left(1+x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2} < 0 \text{ для всіх } x \in D(y).$$

Отже, функція скрізь спадає, точок екстремуму немає.

III. Дослідження за II-ю похідною.

Знаходимо:

$$y'' = \left(y'\right)' = \left(-\frac{\left(1+x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}\right)' = -\frac{\left(1+x^2\right)'\left(x^2-1\right)^2 - \left(1+x^2\right)\left(\left(x^2-1\right)^2\right)'}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= -\frac{2x\left(x^2-1\right)^2 - \left(1+x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

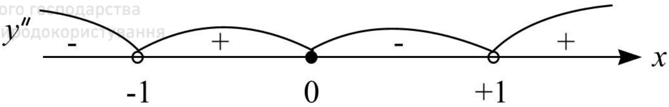
$$= -\frac{\left(x^2-1\right)\left(2x\left(x^2-1\right) - 4x\left(1+x^2\right)\right)}{\left(x^2-1\right)^4} = -\frac{\left(2x^3-2x-4x-4x^3\right)}{\left(x^2-1\right)^3} =$$

$$= -\frac{\left(-2x^3-6x\right)}{\left(x^2-1\right)^3} = \frac{2x^3+6x}{\left(x^2-1\right)^3};$$

Знаходимо критичні точки II-го роду:

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x^3+6x = 0,\ x \in D(y);$$

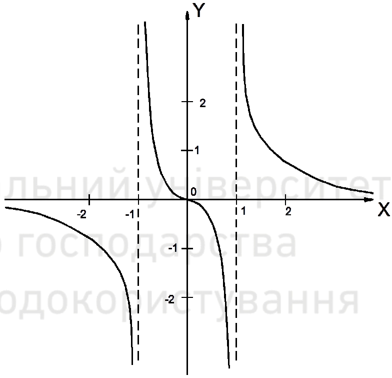
$$\Rightarrow 2x\left(x^2+3\right) = 0,\ x_1 = 0.$$



$$y''(-2)<0\,;\ y''\left(-\frac{1}{2}\right)>0\,;\ y''\left(\frac{1}{2}\right)<0\,;\ y''(2)>0\,.$$

Отже, графік опуклий при $x\in(-\infty;-1)\cup(0;1)$, а при $x\in(-1;0)\cup(1;+\infty)$ вгнутий.

Точка $0(0;0)$ є точкою перегину графіка функції. Згідно отриманих результатів дослідження, будуємо графік функції мал. 8).



мал. 8. Графік функції

$$y=\frac{x}{x^2-1}$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання для самостійної роботи.

Дослідити функцію та побудувати її графік.

1. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$; 2. $y=\dfrac{x^3+8}{x^2}$; 3. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$;

4. $y=\dfrac{x^2-2x+6}{x-3}$; 5. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$; 6. $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$;

7. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$; 8. $y=\dfrac{x}{e^x}$; 9. $y=\dfrac{x}{(x+2)^2}$;

10. $y=x^2\cdot ln\,x$; 11. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; 12. $y=\dfrac{x+2}{x^2-x}$;

13. $y=\dfrac{1}{x^2-4}$; 14. $y=\dfrac{e^{-x}}{x+1}$; 15. $y=\dfrac{e^x}{x}$;

16. $y=\dfrac{1}{e^x-1}$; 17. $y=e^{2x-x^2}$; 18. $y=x+e^{-x}$;

19. $y=\dfrac{x^2}{x+3}$; 20. $y=e^{\frac{1}{x}}$; 21. $y=(1+x^2)e^x$;

22. $y=\dfrac{x^3-1}{x^2}$; 23. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$; 24. $y=ln(x^2+1)$;

25. $y=x^3\cdot e^{-x}$; 26. $y=x\,ln\,x$; 27. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$;

28. $y=\dfrac{x^2+4}{x}$; 29. $y=\dfrac{x^4}{12}-2x^2+x+1$;

30. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Список використаної літератури

1. Антонюк Р. А. Вища математика. Навчальний посібник – Рівне: НУВГП, 2005. – 246 с.

2. Пискунов Н. С. Дифференциональное и интегральное исчисление. Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 456 с.

3.Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Ч. 1-3. – Харьков,: ХГУ, 1972. – 946 с.