Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-25

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ
до самостійної роботи із дисципліни
"Вища математика"
з розділу

"Функції багатьох змінних"

для студентів спеціальності 184"Гірництво"
денної форми навчання

Рекомендовано науково-
методичною
комісією за спеціальністю
"Гірництво"
протокол №3 від 22.11.2017р.

Рівне - 2017

Методичні вказівки та завдання до самостійної роботи із дисципліни ”Вища математика” з розділу ”Функції багатьох змінних ” для студентів спеціальності 184 “Гірництво ” денної форми навчання /Водяна С.П. – Рівне: НУВГП, 2017. – 35 с.

Укладач: Водяна С. П., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики.

Відповідальна за випуск: Цецик С.П., кандидат педагогічних наук, в.о. завідувача кафедри вищої математики.

Розділ : «Функції багатьох змінних»

п. 1. Основні поняття та означення.

Поняття функції багатьох змінних узагальнює поняття функції однієї змінної. В багатьох співвідношеннях (формулах) одна величина залежить від двох, трьох чи більшого числа інших величин (змінних). Наприклад, у формулі обчислення площі прямокутника зі сторонами *x,y*: $S = xy$, - значення площі S залежить від значень двох змінних *x,y*; у формулі обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда зі сторонами *x,y,z*: $V = xyz$, - значення об'єму V залежить від значень трьох змінних *x,y,z* і т.д.

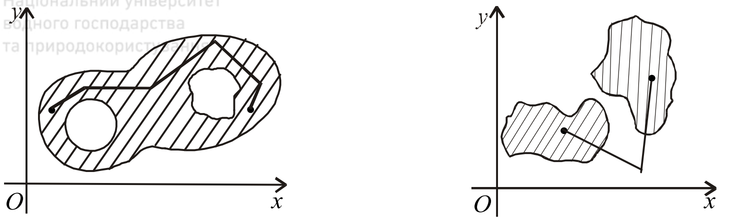
Детальніше розглянемо основні поняття для функції двох змінних.

1. Множини точок на площині. Означення функції двох змінних.

Впорядкованій парі чисел $(x_0; y_0)$ на координатній площині відповідає одна точка $M_0(x_0; y_0)$.

Означення. Множина точок називається *зв'язною*, якщо будь-які її дві точки можна з'єднати ламаною лінією так, щоб усі точки цієї лінії належали цій множині.

Приклад 1. На мал. 1 у випадку а) буде зв'язна множина, а у випадку б) — не зв'язна.

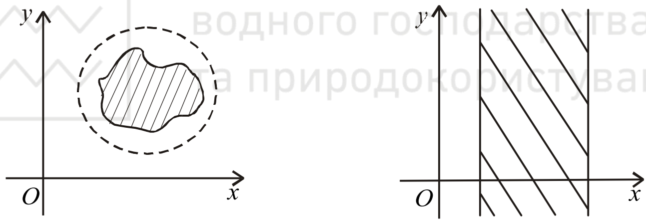


а) *б*)

Мал. 1

Означення. Множина точок називається *обмеженою*, якщо всі її точки належать множині точок деякого круга скінченного радіуса.

Приклад 2. На мал. 2 у випадку а) маємо обмежену множину, а у випадку б) — необмежену.



а) *б*)

Мал. 2

Означення. Множина точок, координати яких задовольняють нерівність

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$$

називається δ-околом точки $M_0(x_0;y_0)$.

Ця множина означає внутрішність круга з радіусом $R=\delta$ та з центром у точці $M_0(x_0;\,y_0)$.

Означення. Точка називається *внутрішньою* для множини точок, якщо вона належить цій множині разом з деяким своїм δ-околом, і *зовнішньою*, якщо існує такий її окіл, жодна з точок якого не належить цій множині.

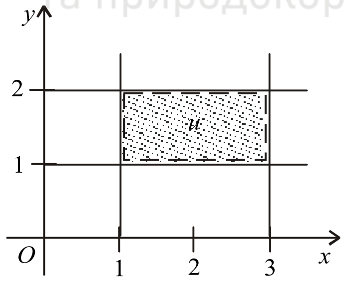
Означення. Зв'язна множина, яка складається тільки з внутрішніх точок, називається *відкритою областю* (або просто *областю*). Область позначають буквою D.

Наприклад, якщо D — прямокутник, область записують у вигляді

$$D = \{(x;\ y) \in R^2 \mid \quad a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Приклад 3. На мал. 3 множина точок D — область (відкритий прямокутник):

$$D = \{(x;\ y) \in R^2 | 1 < x < 3, 1 < y < 2\}.$$



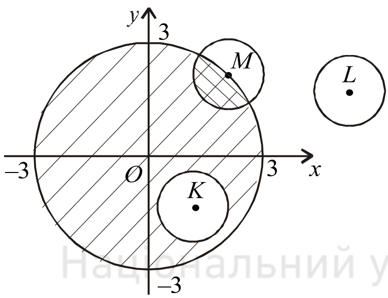
Мал. 3

Означення. Точка називається *межовою* для області, якщо в будь-якому її δ-околі існують точки, які належать області і точки, які не належать цій області.

Означення. Множина межових точок називається *межею області*.

Означення. Область, об'єднана зі своєю межею, називається *замкненою областю*.

Приклад 4. На мал. 4 $D = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + y^2 \le 9\}$ — замкнена область, $x^2 + y^2 = 9$ — рівняння межі області, K — внутрішня точка, L — зовнішня точка, M — межова точка області.



Мал. 4

Означення. Множина називається *опуклою*, якщо будь-які точки множини можна з'єднати відрізком, який буде належати цій множині.

Означення функції двох змінних. Якщо кожній точці $M(x;y)$ множини D на площині поставлено у відповідність за деяким законом одне і тільки одне дійсне число $z \in E \subset R$, то кажуть, що в області $D \subset R^2$ задано функцію *двох* незалежних змінних $z = f(x;y)$. При цьому D називають *областю визначення функції*, E — *областю значень функції*, а "f" означає «правило, закон відповідності» за яким ця залежність реалізується.

Згідно з означенням функцію $z = f(x;y)$ можна розглядати як функцію точки і записувати $z = f(M)$.

2. Способи задання функції

Як і функцію однієї змінної, функцію двох змінних можна задати:

— *аналітично* (у вигляді формули), наприклад:

$$z = x^2 + y^2;$$

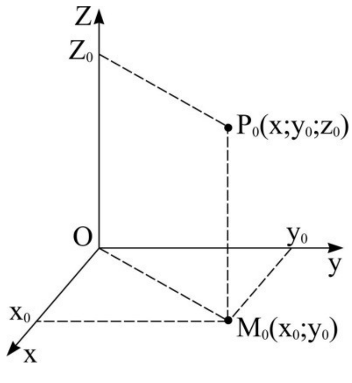
— *таблично* (у вигляді таблиці), наприклад:

$x \backslash y$	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	17	8

таблицею задана функція $z = x + y$;

— *графічно* (у вигляді деякої поверхні в просторі).

Для графічного зображення функції двох змінних використовуємо систему координат *Oxyz* у тривимірному просторі (мал. 5).

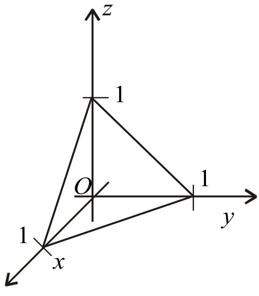


Мал. 5

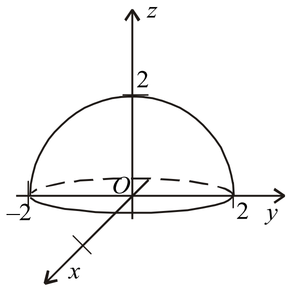
Кожній парі чисел x та y відповідає точка $M(x;y)$ площини Oxy. У точці $M(x;y)$ проводимо пряму, перпендикулярну до площини Oxy, та позначаємо на ній відповідне значення функції z; дістаємо в просторі точку Q з координатами $(x;y;z)$, яка позначається символом $Q(x;y;z)$. Точки Q, які відповідають різним значенням незалежних змінних, утворюють певну поверхню у просторі. Така поверхня є *графічним зображенням функції* $z = f(x;y)$.

Зауваження. На практиці побудувати графік функції важко, адже йдеться про зображення на площині просторової фігури, а це не завжди вдається.

Приклад 5. Графічне зображення функції $z = 1 - x - y$ є площи-на, яка проходить через точки (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) (мал. 6).



Мал. 6



Мал. 7.

Графічне зображення функції $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ є півсфера (мал. 7).

Існує й інший спосіб геометричного зображення функції двох змінних — зображення за допомогою *ліній рівня*.

Означення. *Лінією рівня* називається множина всіх точок площини, в яких функція $z = f(x;y)$ набуває однакових значень.

Рівняння ліній рівня записують у вигляді $f(x;y) = C$.

Накресливши кілька ліній рівня та зазначивши, яких значень набуває на них функція, дістанемо наближене уявлення про зміну функції. Елементарний приклад зображення функції за допомогою ліній рівня є зображення рельєфу місцевості на географічній карті. Висота місцевості над рівнем моря є функцією координат точки земної поверхні. За лініями рівня висоти, нанесеними на карту, легко уявити собі рельєф даної місцевості.

3. Знаходження області визначення функції двох змінних

Якщо функція двох змінних задана аналітично, то під областю визначення функції розуміють ту множину значень незалежних змінних *x,y*, для яких цей аналітичний вираз існує, т. б. має зміст. Покажемо алгоритм знаходження області визначення функції двох змінних на прикладі.

Приклад 6. Знайти область визначення функції $z = \ln\left(4 - x^2 - y^2\right) / \sqrt{4x - y}$ та зобразити її геометрично.

1. Знайдемо область визначення функції аналітично. Відмітимо, що аналітичний вираз існує тоді, коли під знаком логарифма вираз строго додатний і під знаком кореня

квадратного в знаменнику вираз строго додатний. Отже, область визначення D складається з таких точок площини, координати *x,y* яких задовільняють системі двох нерівностей:

$$D=\left\{(x;y)\in R^2 \middle| 4-x^2-y^2>0,\ \ 4x-y>0\right\}.$$

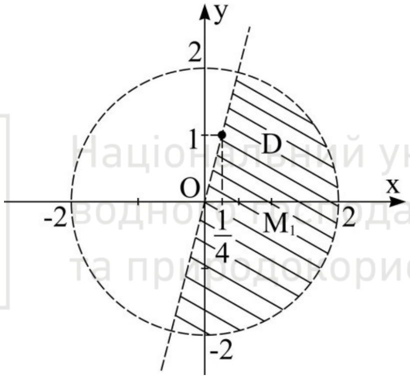
2. Нерівності в D замінюємо рівностями і отримуємо рівняння ліній, які будуть обмежувати шукану область D. Рівняння $x^2+y^2=4$ задає коло з центром в початку координат і радіусом R=2. Друге рівняння запишемо у вигляді $y=4x$, - це рівняння задає пряму, яка проходить через початок координат. Будуємо лінії на координатній площині, що відповідають цим рівнянням, а саме: $x^2+y^2=4$; $y=4x$. Зауважимо, що ці лінії будуємо пунктиром, оскільки вони шуканій області не належать (оскільки нерівності строгі). Коло ділить площину на дві частини - внутрішню і зовнішню по відношенню до самого кола. В точках кола $M(x;y)$ виконується рівність $x^2+y^2=4$, а у всіх точках вибраної частини (внутрішньої чи зовнішньої) виконується нерівність однакового змісту (або $\succ$, або $\prec$). Для визначення конкретного знаку нерівності досить взяти конкретну «пробну» (контрольну) точку з якоїсь частини, підставити її координати в рівняння і виявснити вид нерівності.

Пряма лінія $y=4x$ також ділить площину на дві частини: ліву і праву півплощини, в кожній з яких також виконується нерівність одного виду.

3. Визначаємо за допомогою контрольних точок $M_1(1;0)$, $M_2(0;3)$ розміщення D на площині і заштриховуємо її (мал. 6).

$$\left.\begin{aligned}(1)^2+(0)^2&=1<4\\ 4\cdot1-0&>0\end{aligned}\right\}\Rightarrow M_1\in D$$

$$\left.\begin{aligned}0^2+3^2&=9>4\\ 4\cdot0-3&\prec 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow M_2\;\overline{\in}\;D.$$



Мал. 6

4. Границя функції двох змінних

Означення. Число B називається *границею функції* $z=f(x;y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$, якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ існує число $\delta>0$ таке, що при виконанні нерівності $0<(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2$ виконується нерівність $|f(x;y)-B|<\varepsilon$ і позначається

$$\lim_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=B \text{ або } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x;y)=B .$$

Зауваження. Для функції багатьох змінних справедливі теореми про границю суми, різниці, добутку та частки, які аналогічні відповідним теоремам для функції однієї незалежної змінної.

Наведемо формулювання відповідних теорем.

Теорема 1. Якщо функція $z=f(x;\ y)$ має границю при $(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)$, то вона єдина.

Теорема 2. Якщо функція $z=f(x;\ y)$ має границю при $(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)$, то вона обмежена в деякому околі точки $(x_0;\ y_0)$.

Теорема 3. Нехай $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=b$, $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} g(x;y)=c$.

Тоді:

1) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \left(f(x;y)+g(x;y)\right)=b+c$;

2) $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} \left(f(x;y)\cdot g(x;y)\right)=b\cdot c$;

3) $\lim\limits_{(x;\ y)\to(x_0;\ y_0)} \dfrac{f(x;\ y)}{g(x;\ y)}=\dfrac{b}{c} \quad (c\neq 0)$.

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} \dfrac{x^2+y^2}{2x-3y}$.

Згідно з теоремами про арифметичні операції з границями, а також те, що границя сталої дорівнює сталій, тобто

$\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x=1$, $\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y=2$, маємо

$$\lim_{(x;y)\to(1;2)} \frac{x^2+y^2}{2x-3y} = \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}\left(x^2+y^3\right)}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)}(2x-3y)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} x^2 + \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} y^2}{\lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 2x - \lim\limits_{(x;y)\to(1;2)} 3y} = \frac{1+2^3}{2-3\cdot 2} = -\frac{9}{4}.$$

Приклад 8. Обчислити $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{ln(1+2xy)}{sin3xy}$.

Позначимо $xy=t$. Тоді з того, що $(x;y)\to(0;0)$ випливає $t\to 0$ і задану границю можна переписати у вигляді $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{ln(1+2t)}{sin3t}$. При $t\to 0$ маємо $ln(1+2t)\sim 2t$; $sin\,3t\sim 3t$, тобто $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{ln(1+2t)}{sin3t} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2t}{3t} = \dfrac{2}{3}$. Таким чином, $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)}\dfrac{(1+2xy)}{sin3xy} = \dfrac{2}{3}$.

Зауваження. Між поняттями границі в точці для функції однієї змінної та функції багатьох змінних є багато спільного, але є й принципова відмінність. Справа в тому, що коли $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ у випадку функції однієї змінної ,то це означає, що і лівостороння і правостороння границі дорівнюють *b*. Правильним є й обернене твердження: з існування та рівності двох односторонніх границь випливає існування границі функції в точці.

Для функції двох змінних $z=f(x;y)$ наближатися до точки

$(x_0;\ y_0)$ можна нескінченною множиною способів: і справа, і зліва, і зверху, і знизу, і під будь-яким кутом до осі Ox, і по будь-якій криволінійній траєкторії, тощо.

Очевидно, що рівність $\lim\limits_{(x;y)\to(x_0;y_0)} f(x;y)=b$ правильна тоді й тільки тоді, коли границя дорівнює b при наближенні до точки $(x_0;y_0)$ по будь-якій траєкторії. Це суттєво інша вимога, ніж рівність двох односторонніх границь у випадку функції однієї змінної.

Приклад 9. Довести, що $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

Будемо наближатися до точки (0; 0) по прямій $y=kx$. Якщо $y=kx$, тоді $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xky}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$.

Як бачимо, значення границі залежить від кутового коефіцієнта прямої, наприклад:

при $k=1$ границя дорівнює $1/2$.

при $k=2$ границя дорівнює $2/5$ і т. п.

Таким чином, якщо наближатися до точки (0; 0) з різних напрямків, то дістанемо різні значення, отже границя $\lim\limits_{(x;y)\to(0;0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ не існує.

5. Неперервність функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в точці $M_0(x_0;y_0)$, якщо $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x;y) = f(x_0;y_0)$.

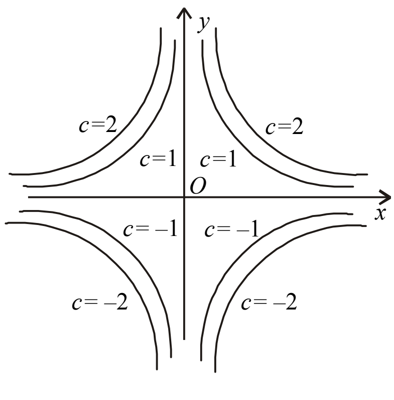
Означення. Функція $z = f(x;y)$ називається *неперервною* в області (замкненій чи відкритій), якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Точки розриву функції двох змінних можуть бути не тільки ізольованими, а й заповнювати деякі лінії. Так, функція $f(x;y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ має розриви — прямі $y = \pm x$.

Приклад 10. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 y$.

Розв'язання.

Рівняння ліній рівня має вигляд $x^2 y = c$ або $y = c/x^2$. При $c = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, дістанемо сімейство ліній рівня (мал. 7).



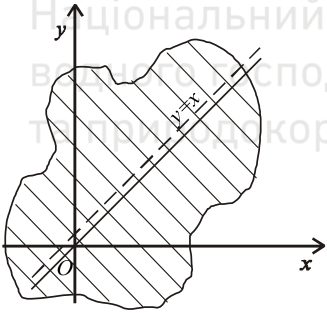
Мал. 7

Приклад 11**.** Знайти область визначення функції двох змінних, зробити схематичний малюнок:

а) $z = \dfrac{2x + y}{x - y}$.

Розв’язання.

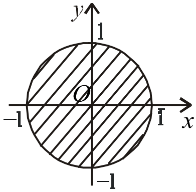
Функція невизначена, якщо $x = y$. Геометрично це означає, що область визначення складається із двох напівплощин, одна з яких лежить вище, а друга — нижче від прямої $y = x$, тобто вся площина крім точок прямої $y = x$.



Мал. 8

б) $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$

Функція визначена, якщо $1 - \left(x^2 + y^2\right) \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Це є круг з центром в точці (0; 0) та радіусом 1 (мал. 9).



Мал. 9

Завдання для самостійної роботи.

Знайти та зобразити область визначення функції двох змінних:

1) $z = \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y}$; 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$;

3) $z = ln\left(x \big/ \sqrt{1-x-y} \right)$; 4) $z = \sqrt{1-2x-y}$;

5) $z = ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$; 6) $z = arcsin\dfrac{y}{x}$;

7) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$; 8) $z = ln\left(x^2 + y^2 - 4\right)$

9) $z = \sqrt{x \sin y}$; 10) $z = ln\, x - ln \cos y$;

11) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$; 12) $z = ln\left(x + y^2\right)$;

13) $z = \sqrt{2 - x - y}$; 14) $z = \sqrt{2x + y}$;

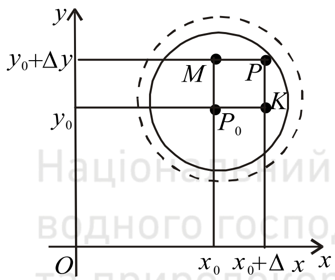
15) $z = arcsin\dfrac{x}{y}$; 16) $z = \ln\left(x^2 + y^2 - 9\right)$;

17) $z = ln\left(y \big/ \sqrt{1-x-y} \right)$; 18) $z = \sqrt{1-y} + \sqrt{x-1}$;

19) $z = ln\left(9 - x^2 - y^2\right)$; 20) $z = \sqrt{1-x-y}$.

6.Частинні та повний прирости функції двох змінних. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x; y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0; y_0)$. Надамо незалежним змінним x та y приросту відповідно Δx та Δy так, щоб точка $P(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ не виходила за межі вказаного околу. Тоді й точки $K(x_0 + \Delta x; y_0)$, $M(x_0; y_0 + \Delta y)$ також належатимуть розглядуваному околу (мал. 10).



Мал. 10

Означення. Різницю $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ *називають повним приростом* функції $z = f(x; y)$ при переході від точки $(x_0; y_0)$ до точки $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ і позначають Δz. Різницю $f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)$ називають *частинним приростом по x*, а різницю $f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$ — *частинним приростом по y* функції $z = f(x; y)$; їх позначають відповідно $\Delta_x z$ і $\Delta_y z$. Таким чином,

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0),\ \Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0).$$

Означення. Нехай функція $z = f(x;\ y)$ визначена в точці $(x_0;\ y_0)$ і в її деякому околі. Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} \left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} \right)$, то вона називається частинною похідною по x (по y) функції $z = f(x; y)$ у точці $(x_0; y_0)$ і позначається $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, або z'_x, або $f_x(x_0; y_0)$. Таким чином, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x} = Z'_x$, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y} = Z'_y$. При знаходженні частинних похідних використовують ті ж самі правила (і табличку похідних), що і для функції однієї змінної. Треба лише пам'ятати, що при знаходженні z'_x «y» вважається сталим, а при знаходженні z'_y змінна «x» вважається сталою.

7. Диференційовність функції двох змінних

Означення. Функція $z = f(x; y)$ називається *диференційовною* у точці $(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст Δz можна подати у вигляді:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A, B — числа, α, β — нескінченно малі при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Головна лінійна частина приросту функції, тобто $A\Delta x + B\Delta y$, називається *повним диференціалом функції* (точніше першим диференціалом) двох змінних $f(x;\, y)$у точці $(x_0,\, y_0)$ і позначається dz:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y\,.$$

Теорема 4. Якщо функція $z = f(x;\, y)$ диференційовна в точці $(x_0;\, y_0)$, тоді існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ та $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ і вони дорівнюють відповідно A і B.

Приклад 12. Знайти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \; + tg\, x + \ln y$.

Знайдемо $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Вважаємо, що $y = const$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

При знаходженні $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = const$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos\left(x^2 + \sqrt{y}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}\,.$$

Приклад 13. Знайти z'_x і z'_y для функції $z = x^2 y + xy^2$.

Знайдемо z'_x, вважаючи $y = const$:

$$z'_x = 2xy + y^2.$$

Знайдемо z'_y, вважаючи $x = const$:

$$z'_y = x^2 + 2xy .$$

Диференціали незалежних змінних співпадають з їхніми приростами: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тоді, як випливає із означення повного диференціала і теореми 4., повний диференціал функції $z = f(x; y)$ можна обчислити за формулою

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy .$$

Приклад 14. Знайти dz, якщо $z = ln(x + ln\, y)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \text{, де}$$

$$z'_x = \frac{1}{x + ln\, y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + ln\, y} \cdot \frac{1}{y} \text{, отже,}$$

$$dz = \frac{1}{x + ln\, y} \left(dx + \frac{1}{y} dy \right).$$

Достатня умова диференційовності функції двох змінних у точці:

Теорема 5. Якщо функція $z = f(x; y)$ у деякому околі точки $(x_0; y_0)$ має неперервні частинні похідні, тоді вона диференційовна в точці $(x_0; y_0)$.

Зауваження. Можна навести твердження про зв'язок між поняттями неперервності і диференційовності функції двох змінних у точці, аналогічні до тих, що виконуються для функції однієї змінної.

Теорема 6. Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то вона неперервна в цій точці. Обернене твердження неправильне.

Якщо функція $z = f(x; y)$ диференційовна в точці $(x_0; y_0)$, то виконується рівність

$$\Delta z \approx A\Delta x + B\Delta y,$$

або

$$f(x_0 + \Delta x;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) \approx f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

Узявши в цій наближеній рівності $a = x_0 + \Delta x$, $b = y_0 + \Delta y$, дістанемо:

$$f(a; b) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y.$$

На формулі ґрунтується *алгоритм використання диференціала для наближених обчислень*.

8.Дотична площина та нормаль

Якщо $z = f(x; y)$ рівняння деякої поверхні, $M_0(x_0; y_0; z_0)$ точка на поверхні, де $z_0 = f(x_0; y_0)$, то рівняння дотичної площини в цій точці має вигляд:

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0).$$

Якщо поверхню задано у просторі рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то рівняння дотичної площини до поверхні $F(x;\ y;\ z)=0$ в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ має вигляд:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

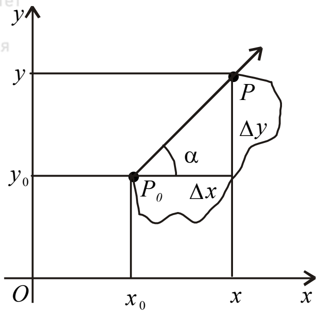
де $A=F'_x(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $B=F'_y(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $C=F'_z(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

Нормаль до поверхні в точці $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — це пряма, що проходить через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і перпендикулярна до дотичної площини. Отже, її рівняння

$$\frac{x-x_0}{F'_x}=\frac{y-y_0}{F'_y}=\frac{z-z_0}{F'_z}.$$

9. Похідна за напрямом. Градієнт

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $P_0(x_0;y_0)$; l — деякий промінь з початком у точці $P_0(x_0;y_0)$; $P(x;y)$ — точка на цьому промені, яка належить околу, що розглядається (мал. 11); Δl — довжина відрізка P_0P. Границя $\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{f(P)-f(P_0)}{\Delta l}$, якщо вона існує, називається *похідною функції* $z=f(x;y)$ *за напрямом* $\vec{l}$ *у точці* P_0 і позначається $\frac{\partial z}{\partial l}$.



Мал.11

Зокрема, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ є похідна функції $z = f(x;y)$ за додатним напрямом осі Ox, а $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ — похідна функції $z = f(x;y)$ за додатним напрямом осі Oy.

Похідна за напрямом $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ *характеризує швидкість зміни функції* $z = f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$ за напрямом $\vec{l}$.

Теорема. Якщо функція $z = f(x;y)$ має в точці $P_0(x_0;y_0)$ неперервні частинні похідні, тоді в цій точці існує похідна $\dfrac{\partial z}{\partial \vec{l}}$ за будь-яким напрямом $\vec{l} = (\cos\alpha;\ \cos\beta)$, причому

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} \cos\beta ,$$

де $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}$ і $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}$ — значення частинних похідних функції $z = f(x; y)$ у точці $P_0(x_0; y_0)$.

Приклад 15. Знайти похідну функції $z = x^2 + y^2$ у точці (1; 1) за напрямом $\vec{l} = (cos\,30^\circ;\ cos\,60^\circ)$.

Знайдемо та обчислимо частинні похідні в точці (1; 1) функції $z = x^2 + y^2$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;1)} = 2x\Big|_{(1;1)} = 2\,, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;1)} = 2y\Big|_{(1;1)} = 2\,.$$

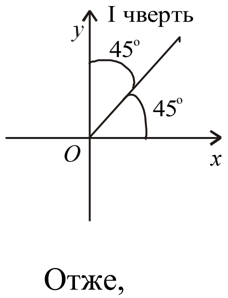
Тоді за формулою похідної за напрямом дістанемо:

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = 2\,cos\,30^\circ + 2\,cos\,60^\circ = 1 + \sqrt{3}\,.$$

Приклад 16. Знайти похідну функції $z = arctg\ xy$ у точці (1; 1) за напрямом бісектриси першого координатного кута.

Знайдемо значення z'_x, z'_y у точці (1; 1):



$$z'_x\Big|_{(1;\,1)} = \left.\frac{y}{1 + x^2 y^2}\right|_{(1;\,1)} \frac{1}{2};$$

$$z'_y\Big|_{(1;\,1)} = \left.\frac{y}{1 + x^2 y^2}\right|_{(1;\,1)} = \frac{1}{2}\,.$$

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{1}{2}cos\,45^\circ + \frac{1}{2}cos\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Означення. Вектор з координатами $\left(\dfrac{\partial z}{\partial x};\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, який характеризує напрям максимального зростання функції $z=f(x;y)$ у точці $P_0(x_0;y_0)$, називається *градієнтом функції* $z=f(x;y)$ у цій точці і позначається $\overrightarrow{grad}\ z$ ($\vec{i},\vec{j}$ — одиничні орти):

$$\overrightarrow{grad}\ z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0}\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0}\vec{j}\ .$$

Похідна за напрямом $\vec{l}$ функції $z=f(x;y)$ та градієнт пов'язані співвідношенням $\dfrac{\partial z}{\partial\vec{l}}=\overrightarrow{grad}\ z\cdot\vec{l}$.

Градієнт — це вектор, який характеризує напрям максимального зростання функції.

Приклад 17.Задано функцію $z=ln\left(x^2+4y^2\right)$. Знайти $\overrightarrow{\text{grad}z}$ в точці A(1; 1) і похідну за напрямом від точки A(1; 1) до точки B(6; 4).

Знайдемо значення частинних похідних у точці (1; 1)

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;1)}=\left.\frac{2x}{x^2+4y^2}\right|_{(1;1)}=\frac{2}{5},\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;1)}=\left.\frac{8y}{x^2+4y^2}\right|_{(1;1)}=\frac{8}{5}\,.$$

Підставивши знайдені значення частинних похідних у вираз градієнта, дістанемо $\overrightarrow{gradz}=\dfrac{2}{5}\vec{i}+\dfrac{8}{5}\vec{j}$.

Визначимо одиничний вектор $\vec{e}$, за напрямом якого обчислюється похідна:

$$\vec{e}=\frac{(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}}{\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}}=\frac{5}{\sqrt{34}}\vec{i}+\frac{3}{\sqrt{34}}\vec{j}\,.$$

Знайдемо шукану похідну за напрямом:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A e_x+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A e_y=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}+\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{34}}{5}\,.$$

10. Частинні похідні і повні диференціали вищих порядків

Нехай функція $z=f(x;y)$ має частинні похідні в усіх точках множини D. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ називають частинними похідними першого порядку.

Візьмемо будь-яку точку $(x;y)\in D$; у цій точці існують частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, які залежать від x і y, тобто вони є функції двох змінних. Отже, можна ставити питання про знаходження їхніх частинних похідних. Якщо вони існують, то їх називають *похідними другого порядку* і позначаються так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ або } z''_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ або } z''_{yx}.$$

Аналогічно визначають і позначають частинні похідні третього і вищих порядків, наприклад:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \equiv \frac{\partial^3 z}{\partial y\, \partial x^2}.$$

Частинні похідні вищих порядків по різних змінних називають мішаними частинними похідними. Наприклад, частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ - мішані частинні похідні другого порядку.

Теорема 7. Якщо функція $z = f(x;\, y)$ визначена в області D і в цій області існують перші похідні f'_x та f'_y, а також другі мішані похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які до того ж як функції від x і y неперервні в точці $(x_0; y_0) \in D$, то в цій точці $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Означення. Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x; y)$ називається диференціал від її повного диференціала першого порядку, тобто $d^2 z = d(dz)$.

Аналогічно визначаються диференціали третього і вищих порядків

$$d^3z = d\left(d^2z\right)$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$d^nz = d\left(d^{n-1}z\right).$$

Якщо мішані частинні похідні співпадають, то диференціал другого порядку обчислюють за формулою:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2 .$$

Приклад 18. Знайти d^2z, якщо $z = sin x \cdot sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = cos\,x\,sin\,y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = sin\,x\,cos\,y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -sin\,x\,sin\,y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = cos\,x\,cos\,y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -sin\,x\,sin\,y,$$

$$d^2z = -sin\,x\,sin\,y dx^2 + 2cos\,x\,cos\,y\,dx\,dy - sin\,x\,sin\,y dy^2 .$$

Приклад 19. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$$

Приклад 20. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = sin(x^2 + y^2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\,cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy\,sin\left(x^2 + y^2\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y\cos\left(x^2 + y^2\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xy\sin\left(x^2 + y^2\right).$$

Ми дістали очікуваний результат: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

11. Похідна неявної функції

Якщо існує неперервна функція однієї змінної $y = f(x)$, така що відповідні пари $(x;\, y)$ задовольняють умову $F(x;\, y) = 0$, тоді це співвідношення задає *функцію* $f(x)$ неявно, а сама функція $f(x)$ називається *неявною функцією*, яка задовольняє умову $F(x; y) = 0$.

Якщо неперервна функція $y = f(x)$ задана в неявній формі $F(x, y) = 0$ і $F'_y(x, y) \neq 0$, то похідну $\frac{dy}{dx}$ обчислюють за формулою

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}, \quad F'_y(x, y) \neq 0.$$

Приклад 21. Знайти похідну від неявної функції $y^5 + 2x^2y^2 + xy - -42 = 0$ в точці $x = 1,\ y = 2$.

Маємо $F'_x = 4xy^2 + y$, $F'_y = 5y^4 + 4x^2y + x$, звідки

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4xy^2 + y}{5y^4 + 4x^2y + x}.$$

Для $x = 1,\ y = 2$ маємо $\frac{dy}{dx} = -\frac{18}{89}$.

Аналогічно частинні похідні функції двох незалежних змінних $z=f(x;\,y)$, яку задано за допомогою рівняння $F(x;\,y;\,z)=0$, де $F(x;\,y;\,z)$ — диференційовна функція змінних x, y, z, можуть бути обчислені за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad (*)$$

за умови, що $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$.

Приклад 22. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо $z^3-3xyz=5$.

Маємо: $F(x,y,z)=z^3-3xyz-5$. Знаходимо $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=-3xz,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy.$$

Тоді за формулами (*)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Знайти повний диференціал функції двох змінних:

1. $z=arctg\frac{x+y}{x-y}$; 2. $z=x^3y^4-x^4y^4+x^4y^3$;

3. $z=\dfrac{x+y}{x-y}$;

4. $z=sin(xy)$;

5. $z=\dfrac{1}{2}ln\left(x^2+y^2\right)$;

6. $z=arcsin\dfrac{x}{y}$;

7. $z=arctg\dfrac{x+y}{1-xy}$;

8. $z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

9. $z=e^{-\frac{x}{y}}$;

10. $z=xy^3+3x^4y^5+10y^4$.

11. $z=ln(x-y)$;

12. $z=sin(4x+2y)$;

13. $z=sin\left(x^3+y^2\right)$;

14. $z=x\,ln(xy)$;

15. $z=x^3\,sin\,y+y^3\,sin\,x$;

16. $z=e^{x^2}\,sin\,y^2$;

17. $z=\left(x^2+y^2\right)e^{x+y}$;

18. $z=xye^{x+y}$;

19. $z=\dfrac{x^2-y}{x-y^2}$.

20. $z=x\,sin^2\,y$.

12. Екстремуми функції двох змінних

Означення. Нехай функція $z=f(x;y)$ визначена в деякому околі точки $(x_0;\,y_0)$ і неперервна в цій точці. Якщо для всіх точок $(x;\,y)$ цього околу виконується нерівність $f(x;\,y)\le f(x_0;\,y_0)$ $\left[f(x;\,y)\ge f(x_0;\,y_0)\right]$, тоді ця точка $(x_0,\,y_0)$ називається *точкою максимуму* (*мінімуму*) функції $z=f(x;\,y)$.

Точки максимуму й мінімуму функції називають *точками екстремуму* функції.

Необхідні умови екстремуму: в точці екстремуму функції частинні похідні першого порядку рівні нулю (або не існують).

Точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ називають стаціонарними точками. В цих точках може бути екстремум. Для встановлення наявності екстремуму в стаціонарній точці використовують достатні умови екстремуму, які описує наступна теорема.

Теорема 8. (достатні умови екстремуму). Нехай функція $z=f(x;y)$ має в стаціонарній точці точці $(x_0;\,y_0)$ неперервні частинні похідні першого й другого порядку ($f'_x(x_0;y_0)=0$, $f'_y(x_0;y_0)=0$). Позначимо $f''_{x^2}(x_0;y_0)=A$, $f''_{xy}(x_0;y_0)=B$, $f''_{y^2}(x_0;y_0)=C$. Тоді, якщо:

1) $\Delta=AC-B^2>0$ і $A<0$, то $(x_0;\,y_0)$ точка максимуму функції $z=f(x;y)$;

2) $\Delta=AC-B^2>0$ і $A>0$, то $(x_0;\,y_0)$ точка мінімуму функції $z=f(x;y)$;

3) $\Delta=AC-B^2<0$, то в точці $(x_0;y_0)$ немає екстремуму.

4) $\Delta=AC-B^2=0$, тоді потрібні додаткові дослідження.

Алгоритм дослідження функції $z=f(x;y)$ на екстремум

1. Знайти перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

2. Знайти стаціонарні точки, тобто точки, в яких $\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. Знайти частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

4. Обчислити значення частинних похідних другого порядку в стаціонарних точках.

5. Для кожної стаціонарної точки знайти $\Delta = AC - B^2$ і зробити висновки згідно достатніх умов екстремуму.

Приклад 23. Дослідити на екстремум функцію $f(x;y)=2x+8y-x^2-2y^2$.

1. Знаходимо $\frac{\partial f}{\partial x}=2-2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=8-4y$.

2. Знаходимо стаціонарні точки : $\begin{cases} 2-2x=0 \\ 8-4y=0 \end{cases}$.

Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=2$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=0$. Отже, A=-2, B=0, C=-4, звідки дістаємо, що $\Delta = 8$.

4. Як випливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $A<0$. Обчислюємо $z_{max} = z(1;2) = 9$.

Завдання для самостійної роботи.

Знайти екстремуми функцій:

1) $z = x^2 + 3y^2 - 5x \;\; + 10y \;\; - 4;;$

2) $z = x^2 + 5y^2 - 4x \;\; + 10y \;\; - 2;$

3) $z = x^2 + y^2 - 6x \;\; + 8y \;\; - 1;$

4) $z = x^2 + 4y^2 - 2x \;\; + 8y \;\; + 1;$

5) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

6) $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

7) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

8) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$;

9) $z = x^2 + (y - 1)^2$;

10) $z = 4x^2 + 2y^2 - 8x \;\; + -2y \;\; + 2;$

11) $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - y^2$;

12) $z = 4x^2 + 2y^2 - 8x \;\; + 2y \;\; - 3;$

13) $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x \;\; + 2y \;\; - 1;$

14 $z = x^2 + 5y^2 - 8x \;\; + 10y \;\; - 4;$

15) $z = x^2 + y^2 - 4x \;\; + 8y \;\; - 5.$

Список використаної літератури

1. Антонюк Р. А. Вища математика. Навчальний посібник – Рівне : НУВГП, 2005. – 246 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциональное и интегральное исчисление. Т. 1. – М. : Наука, 1978. – 456 с.
3. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. – Ч. 1-3. – Харьков, : ХГУ, 1972. – 946 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування