Міністерство освіти , науки, молоді та спорту України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра прикладної математики

100-98

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт з дисципліни

«ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ »

для студентів напряму 6.040301

«Прикладна математика»

денної форми навчання

Частина 2

Національний університет водного господарства та природокористування

Рекомендовані до видання
методичною комісією напряму
«Прикладна математика»
Протокол ***№3*** *від 11 січня 2010 р.*

Рівне -2011

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Функціональний аналіз» для студентів напряму 6.040301 «Прикладна математика» денної форми навчання. Частина 2/ Гладун Л.В. – Рівне: НУВГП, 2011. - 28 с.

Упорядник: Л.В. Гладун, к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики

Відповідальний за випуск: А.П. Власюк, д. т. н., професор, завідувач кафедри прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ

Функціональний аналіз відіграє важливу роль у сучасній математичній освіті спеціаліста з прикладної математики, якому потрібно використовувати математичні методи при розв'язанні конкретних задач.

Методичні вказівки розроблені для студентів напряму "Прикладна математика" . Вони також можуть використовуватись для студентів технічних вузів, а також для студентів фізико-математичних напрямів педагогічних вузів.

В першій практичній роботі розглянуто поняття скалярного добутку в лінійному просторі , а також кута між елементами евклідового простору.

Друга практична робота, крім понять лінійного, неперервного, обмеженого функціонала на нормованому просторі, містить методи знаходження норми лінійного неперервного функціонала.

До кожної практичної роботи приводиться необхідний теоретичний матеріал. Також наведено приклади розв'язання найбільш типових задач.

В кінці кожної практичної роботи подано завдання для самостійної роботи, які містять значну кількість задач. Вони можуть використовуватися для проведення тестового опитування з відповідних тем.

Задачі, номери яких більші за тридцять, можна віднести до задач підвищеної складності.

Практична робота №1
Евклідові простори

Нехай X – лінійний простір над дійсними числами. Функція $(\cdot,\cdot): X \times X \to R$ називається скалярним добутком у просторі X, якщо вона задовольняє наступним умовам (аксіомам):

1) $(x,x) \geq 0, \ \forall x \in X$;

2) $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

3) $(x,y) = (y,x)$, $\forall x, y \in X$;

4) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$, $\forall x, y, z \in X$;

5) $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$, $\forall \lambda \in R$, $\forall x, y \in X$.

Лінійний простір X, разом зі заданим у ньому скалярним добутком, називається евклідовим простором.

Кожний евклідовий простір стає нормованим простором, якщо ввести в ньому норму за формулою $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Повний евклідовий простір називається гільбертовим простором.

Для довільних елементів x і y евклідового простору X виконується нерівність Коші – Буняковського

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \ . \qquad (1)$$

Кутом між ненульовими елементами x і y евклідового простору X називається кут φ, який знаходиться між 0 та π, такий, що

$$\cos\varphi = \frac{(x,y)}{\|x\|\|y\|}. \qquad (2)$$

Якщо $(x,y) = 0$, то елементи x та y називаються ортогональними і це записують $x \perp y$.

Для того щоб нормований простір X був евклідовим, необхідно і достатньо, щоб для довільних його елементів x та y виконувалась рівність паралелограма :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \ , \qquad (3)$$

при цьому скалярний добуток визначається за формулою

$$(x, y) = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4} \quad . \tag{4}$$

Приклад 1. Перевірити чи є функція $(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$ скалярним добутком у лінійному просторі R^2.

Розв'язування. Перша аксіома скалярного добутку

$$(x, x) = ((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 2x_1^2 + 3x_2^2 \geq 0$$

виконується для будь-якого елемента $x \in R^2$.

Оскільки $2x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$, то друга аксіома скалярного добутку

$$2x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x = (0{,}0)$$

також виконується.

Для довільних елементів $x, y, z \in R^2$ завжди мають місце рівності:

$$(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 = 2y_1 x_1 + 3y_2 x_2 = (y, x) \ ,$$

$$(x+y, z) = ((x_1+y_1, x_2+y_2), (z_1, z_2)) = 2(x_1+y_1)z_1 +$$

$$+3(x_2+y_2)z_2 = (2x_1 z_1 + 3x_2 z_2) + (2y_1 z_1 + 3y_2 z_2) = (x, z) + (y, z),$$

тому третя і четверта аксіоми скалярного добутку справджуються.

Перевіримо виконання п'ятої аксіоми скалярного добутку . Маємо

$$(\lambda x, y) = ((\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2)) = 2\lambda x_1 y_1 + 3\lambda x_2 y_2 =$$

$$= \lambda(2x_1 y_1 + 3x_2 y_2) = \lambda(x, y) \ ,$$

тобто вона виконується. Отже, функція $(x, y) = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$ є скалярним добутком у лінійному просторі R^2.

Приклад 2. Перевірити чи є функція $(x, y) = x_1^2 y_1 + x_2 y_2$ скалярним добутком у лінійному просторі R^2.

Розв'язування. Перша аксіома скалярного добутку має вигляд

$$(x, x) = x_1^3 + x_2^2 \geq 0, \forall x \in R^2 .$$

Візьмемо елемент $x = (-1{,}0)$. Тоді $(x, x) = (-1)^3 + 0^2 = -1 < 0$, тобто перша аксіома скалярного добутку не виконується. Значить, функція $(x, y) = x_1^2 y_1 + x_2 y_2$ не є скалярним добутком у лінійному просторі R^2.

Приклад 3. Перевірити чи є функція $(x, y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$ скалярним добутком у лінійному просторі R^3.

Розв'язування. Для будь-якого елемента $x \in R^3$ завжди виконується нерівність

$$(x, x) = 2x_1^2 + x_2^2 \geq 0,$$

тому перша аксіома скалярного добутку справджується.

Друга аксіома скалярного добутку має вигляд

$$2x_1^2 + x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x = (0,0,0).$$

Візьмемо елемент $x = (0,0,1)$, який не є нульовим елементом лінійного простору R^3. Знайдемо значення функції $(x, x) = 2 \cdot 0^2 + 0^2 = 0$. Тобто друга аксіома скалярного добутку не виконується. Отже, функція $(x, y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2$ не є скалярним добутком у лінійному просторі R^3.

Приклад 4. Перевірити чи є функція $(x, y) = \sup\limits_{1 \leq i \leq \infty} |x_i y_i|$ скалярним добутком у лінійному просторі c_0.

Розв'язування. Нехай $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ – довільний елемент простору c_0. Тоді маємо :

$$\sup_{1 \leq i \leq \infty} |x_i^2| \geq 0,$$

$$\sup_{1 \leq i \leq \infty} |x_i^2| = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \ \forall i \geq 1 \Leftrightarrow x = (0,0,...,0...),$$

тобто перші дві аксіоми скалярного добутку виконуються.

Третя аксіома скалярного добутку $\sup\limits_{1 \leq i \leq \infty} |x_i y_i| = \sup\limits_{1 \leq i \leq \infty} |y_i x_i|$, $\forall x, y \in c_0$ є очевидною.

Запишемо четверту аксіому скалярного добутку :

$$\sup_{1 \leq i \leq \infty} |(x_i + y_i) z_i| = \sup_{1 \leq i \leq \infty} |x_i z_i| + \sup_{1 \leq i \leq \infty} |y_i z_i|, \forall x, y, z \in c_0. \qquad (5)$$

Покажемо, що вона не виконується. Для елементів $x=(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...)$, $y=(-1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...,\frac{1}{n},...)$, $z=(1,1,0,...,0,...)$ простору c_0 дістанемо:

$$\sup_{1\le i\le\infty}\left|(x_i+y_i)z_i\right|=\sup\{\left|(1-1)\cdot 1\right|,\left|(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})\cdot 1\right|,$$

$$\left|(\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\cdot 0\right|,...,\left|(\frac{1}{n}+\frac{1}{n})\cdot 0\right|,...\}=1,$$

$$\sup_{1\le i\le\infty}\left|x_i z_i\right|=\sup\{\left|1\cdot 1\right|,\left|\frac{1}{2}\cdot 1\right|,\left|\frac{1}{3}\cdot 0\right|,...,\left|\frac{1}{n}\cdot 0\right|,...\}=1,$$

$$\sup_{1\le i\le\infty}\left|y_i z_i\right|=\sup\{\left|(-1)\cdot 1\right|,\left|\frac{1}{2}\cdot 1\right|,\left|\frac{1}{3}\cdot 0\right|,...,\left|\frac{1}{n}\cdot 0\right|,...\}=1.$$

Оскільки 1≠1+1, то рівність (5) справджується не для всіх елементів $x,y,z\in c_0$. Отже, функція $(x,y)=\sup_{1\le i\le\infty}\left|x_i y_i\right|$ не є скалярним добутком у лінійному просторі c_0.

Приклад 5. Перевірити чи є функція $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}x_{2i}y_{2i-1}$ скалярним добутком у лінійному просторі l_2.

Розв'язування. Перша аксіома скалярного добутку $\sum_{i=1}^{\infty}x_{2i}x_{2i-1}\ge 0$ виконується не для всіх елементів $x\in l_2$. Наприклад, якщо взяти $x=(1,-1,0,...,0,...)$, тоді $\sum_{i=1}^{\infty}x_{2i}x_{2i-1}=(-1)\cdot 1=-1<0.$ Таким чином, задана функція не є скалярним добутком у лінійному просторі l_2.

Приклад 6. Перевірити чи є функція $(x,y)=\int_0^1 t^2x(t)y(t)dt$ скалярним добутком у лінійному просторі $C[0,1]$.

Розв'язування. Нехай $x(t)$ – довільна неперервна функція на відрізку $[0,1]$. Тоді для всіх $t \in [0,1]$ $t^2 x^2(t) \geq 0$ і за властивістю визначеного інтеграла $\int_0^1 t^2 x^2(t)dt \geq 0$. Значить, перша аксіома скалярного добутку виконується.

Якщо $\int_0^1 t^2 x^2(t)dt = 0$ то, враховуючи невід'ємність підінтегральної функції, отримаємо : $t^2 x^2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv 0$.

Згідно властивостей визначеного інтеграла, маємо:

$$\int_0^1 t^2 x(t) y(t)dt = \int_0^1 t^2 y(t) x(t)dt ,$$

$$\int_0^1 t^2 (x(t) + y(t))z(t)dt = \int_0^1 (t^2 x(t)z(t) + t^2 y(t)z(t))dt =$$

$$= \int_0^1 t^2 x(t)z(t)dt + \int_0^1 t^2 y(t)z(t)dt ,$$

$$\int_0^1 t^2 (\lambda x(t)) y(t)dt = \lambda \int_0^1 t^2 x(t) y(t)dt .$$

Значить, функція $(x, y) = \int_0^1 t^2 x(t) y(t)dt$ є скалярним добутком у лінійному просторі $C[0,1]$.

Приклад 7. Перевірити чи є функція $(x, y) = \int_{-1}^1 tx(t) y(t)dt$ скалярним добутком у лінійному просторі $C[-1,1]$.

Розв'язування. Перша аксіома скалярного добутку має вигляд

$$\int_{-1}^1 tx^2(t)dt \geq 0, \ \ \forall x \in C[-1,1] . \qquad (6)$$

Покажемо, що нерівність (6) виконується не для всіх функцій $x \in C[-1,1]$. Наприклад, для функції $x(t) = t - \frac{1}{2}$ маємо:

$$\int_{-1}^{1} t(t - \frac{1}{2})^2 dt = \int_{-1}^{1} t(t^2 - t + \frac{1}{4})dt = (\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{8})\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= (\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8}) - (\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}) = -\frac{2}{3} < 0.$$

Отже, функція $(x, y) = \int_{-1}^{1} tx(t)\,y(t)dt$ не є скалярним добутком у лінійному просторі $C[-1,1]$.

Приклад 8. Знайти кути між елементами $x = (1,-1,0,...,0,...)$, $y = (1,0,0,...,0,...)$, $z = (0,1,0,...,0,...)$ в евклідовому просторі l_2.

Розв'язування. Обчислимо значення скалярних добутків елементів та їх норми . Отримаємо :

$$(x, y) = 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 0\cdot 0 + ... = 1,\ (x, z) = 1\cdot 0 + (-1)\cdot 1 +$$
$$+ 0\cdot 0 + ... = -1,\ (y, z) = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0 + ... = 0,$$
$$\|x\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2 + ...} = \sqrt{2},$$
$$\|y\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + ...} = 1,\ \|z\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2 + ...} = 1.$$

Тепер знаходимо значення косинусів кутів між ними . Маємо :

$$\cos(x \hat{,} y) = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(x \hat{,} z) = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot 1} = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos(y \hat{,} z) = 0.$$

Звідки отримаємо, що кут між елементами x і y рівний $\pi/4$, кут між елементами x і z рівний $3\pi/4$, а елементи y і z ортогональні між собою (кут між ними дорівнює $\pi/2$).

Приклад 9. Довести, що в евклідовому просторі X елементи x та y ортогональні тоді і тільки тоді, коли

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \tag{7}$$

Розв'язування. *Необхідність.* Нехай x, y – ортогональні елементи евклідового простору X , тобто $(x, y) = (y, x) = 0$. Тоді маємо :

$$\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x+y) + (y, x+y) =$$
$$= (x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) = (x,x) + (y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Достатність. Припустимо, що для елементів x та y евклідового простору X виконується рівність (7). Виразимо кожну з частин рівності (7) через скалярний добуток: $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y)$, $\|x\|^2 = (x,x)$, $\|y\|^2 = (y,y)$. Тоді (7) матиме вигляд $(x,x) + 2(x,y) + (y,y) = (x,x) + (y,y)$. Звідки отримаємо $(x,y) = 0$, тобто елементи x та y ортогональні між собою.

Приклад 10. Довести, що в нормованому просторі $C[0,1]$ норма не породжується скалярним добутком.

Розв'язування. Розглянемо в нормованому просторі $C[0,1]$ функції $x(t) = t$, $y(t) = 1$, $\forall t \in [0,1]$. Перевіримо виконання для них рівності паралелограма (3). Маємо $(x+y)(t) = t+1$, $(x-y)(t) = t-1$. Знаходимо: $\|x\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |t| = 1$, $\|y\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |1| = 1$, $\|x+y\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |t+1| = 2$, $\|x-y\| = \max\limits_{0 \le t \le 1} |t-1| = 1$ Тепер отримаємо $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2^2 + 1 = 5$, а $2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 2(1+1) = 4$. Тобто для функцій $x(t) = t$ та $y(t) \equiv 1$ рівність паралелограма не виконується. Отже, норму в просторі $C[0,1]$ не можна задати за допомогою скалярного добутку.

Завдання для самостійної роботи

Перевірити чи є функція $(\cdot,\cdot) : X \times X \to R$ скалярним добутком у лінійному просторі X .

1. $X = R^3$, $(x,y) = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3$.
2. $X = R^3$, $(x,y) = 2x_1 y_1 + 3x_3 y_3$.
3. $X = R^3$, $(x,y) = 2x_1 y_1 + x_2 y_2^2 + x_3 y_3$.

4. $X = R^n$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} i x_i y_i$.

5. $X = R^n$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i$.

6. $X = R^n$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2$.

7. $X = c_0$, $(x,y) = \sup_{1 \le i \le \infty} x_i y_i$.

8. $X = c$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x_i y_i$.

9. $X = c$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} x_i y_i$.

10. $X = l_1$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$.

11. $X = l_1$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i-1} y_{2i-1}$.

12. $X = l_2$, $(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x_i y_i$.

13. $X = C[0,1]$, $(x,y) = \max_{0 \le t \le 1} x(t) y(t)$.

14. $X = C[0,1]$, $(x,y) = x(0)y(0) + 2x(1)y(1)$.

15. $X = C[0,1]$, $(x,y) = x(0)y(0) + \int_0^1 x(t)y(t)dt$.

16. $X = C[0,1]$, $(x,y) = x(1)y(1) + \int_0^1 t^2 x(t)y(t)dt$.

17. $X = C^1[0,1]$, $(x,y) = x(0)y(0) + \max_{0 \le t \le 1} x'(t)y'(t)$.

18. $X = C[0,\pi]$, $(x,y) = \int_0^{\pi} \sin t x(t) y(t) dt$.

19. $X = C[-1,1]$, $(x,y) = \int\limits_{-1}^{1} e^t x(t)y(t)dt$.

20. Нехай $f(t)$ - додатно-визначена неперервна функція на відрізку [0,1]. Перевірити чи є функція $(x,y) = \int\limits_{0}^{1} f(t)x(t)y(t)dt$ скалярним добутком у лінійному просторі $C[0,1]$.

21. Довести, що в нормованому просторі $X = C[-1,1]$ норма не породжується скалярним добутком.

22. Довести, що в нормованому просторі l_1 норма не породжується скалярним добутком.

23. Довести, що в нормованому просторі c_0 норма не породжується скалярним добутком.

24. Знайти кути між елементами $x = (1,0,0,-1)$, $y = (1,0,0,0)$, $z = (0,0,0,-1)$ в евклідовому просторі R^4.

25. Знайти кути між елементами $x = (0,\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$, $y = (0,\sqrt{2},0,0)$, $z = (0,0,\sqrt{2},0)$ в евклідовому просторі R^4.

26. Знайти кути між елементами $x = (1,1,1,0,...,0,...)$, $y = (1,-1,0,...,0,...)$, $z = (1,0,-1,0,...,0,...)$ евклідовому просторі l_2.

27. Знайти кути між функціями $1, \cos 2t, \sin 4t$ у просторі $C[0,2\pi]$ зі скалярним добутком $(x,y) = \int\limits_{0}^{2\pi} x(t)y(t)dt$.

28. Довести, що в евклідовому просторі X для довільних елементів x, y, z має місце тотожність Аполонія

$$\|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2.$$

Перевірити чи є функція $(\cdot,\cdot) : X \times X \to R$ скалярним добутком у лінійному просторі X.

29. $X = R^n$, $(x,y) = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^i x_i y_i$.

30. $X = R^{2n}$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_{2i} y_{2i}$.

31. $X = c$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} x_i y_{2i}$.

32. $X = l_2$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i-1}{i+1} x_i y_i$.

33. $X = c_0$, $(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} x_i y_i$.

34. $X = C[0,1]$, $(x, y) = x(0)y(0) + x(1)y(1) + \int_0^1 x(t)y(t)dt$.

35. $X = C^1[0,1]$, $(x, y) = \max_{0\le t\le 1} x(t)y(t) + \max_{0\le t\le 1} x'(t)y'(t)$.

36. $X = C^1[0,1]$, $(x, y) = x'(0)y'(0) + 3x(1)y(1)$.

37. $X = C^1[0,1]$, $(x, y) = 2x(0)y(0) + x'(1)y'(1)$

38. $X = C^1[0,1]$, $(x, y) = 3x'(0)y'(0) + 2x'(1)y'(1)$.

39. $X = C^1[0,\pi]$, $(x, y) = \int_0^{\pi} x(t)y(t)dt + 2\int_0^{\pi} x'(t)y'(t)dt$.

40. $X = C^1[0,\pi]$, $(x, y) = 4\int_0^{\pi} x(t)y(t)dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x'(t)y'(t)dt$.

41. $X = C[0,\pi]$, $(x, y) = \int_0^{\pi} \cos t x(t)y(t)dt$.

42. $X = C[-1,1]$, $(x, y) = \int_{-1}^{1} t^3 x(t)y(t)dt$.

43. $X = C[-1,1]$, $(x, y) = \int_{-1}^{1} 2^{-t} x(t)y(t)dt$.

44. $X = C[0,\pi]$, $(x, y) = \int_0^{\pi} \sin(t + \frac{\pi}{4}) x(t)y(t)dt$.

45. $X = C[-1,1]$, $(x,y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,sign\,t\,dt$.

46. Нехай $f(t)$ - додатно-визначена неперервна функція на відрізку [0,1]. Перевірити чи є функція $(x,y) = \int_{0}^{1} f(t)x'(t)y'(t)dt$ скалярним добутком у лінійному просторі $C^1[0,1]$.

47. Нехай $f(t), g(t)$ - додатно-визначені неперервні функції на відрізку [0,1]. Перевірити чи є функція $(x,y) = \int_{0}^{1} f(t)x(t)y(t)dt + \int_{0}^{1} g(t)x'(t)y'(t)dt$ скалярним добутком у лінійному просторі $C^1[0,1]$.

48. Довести, що в нормованому просторі $C^1[0,1]$ норма не породжується скалярним добутком.

49. Довести, що в нормованому просторі l_3 норма не породжується скалярним добутком.

50. Довести, що в нормованому просторі c норма не породжується скалярним добутком.

51. Довести, що в нормованому просторі m норма не породжується скалярним добутком.

52. Знайти кути між елементами $x = (0,0,\sqrt{3},-\sqrt{3})$, $y = (0,0,2,0)$, $z = (0,0,0,3)$ в евклідовому просторі R^4.

53. Знайти кути між елементами $x = (1/2,1/2,-1/2,-1/2)$, $y = (1,-1,0,0)$, $z = (0,1,-1,0)$ в евклідовому просторі R^4.

54. Знайти кути між елементами $x = (\sqrt{1/2},\sqrt{1/4},...,\sqrt{1/2^n},...)$, $y = (0,\sqrt{1/4},...,\sqrt{1/2^n},...)$, $z = (0,-\sqrt{1/4},...,-\sqrt{1/2^n},...)$ в евклідовому просторі l_2.

55. Знайти кути між функціями $\cos t$, $\sin 2t$, $\cos 3t$ у просторі $C[0,2\pi]$ зі скалярним добутком $(x, y) = \int\limits_0^{2\pi} x(t)\, y(t) dt$.

56. Довести, що функція $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i x_i y_i$, $0 < a_i \le 1$, $\forall i \ge 1$ задає скалярний добуток у лінійному просторі l_2.

57. Довести, що в евклідовому просторі X для довільних елементів x, y, z, t справедлива нерівність Птоломея

$$\|x-z\|\|y-t\| \le \|x-y\|\|z-t\| + \|y-z\|\|x-t\| .$$

58. Довести, що в евклідовому просторі X рівність $\|x\| + \|y\| = \|x+y\|$, $x, y \in X$, виконується тоді і тільки тоді, коли або $x = 0$, або $y = \lambda x$ для деякого $\lambda > 0$.

59. Нехай $x_1, x_2, \ldots$ - ортогональна система в гільбертовому просторі H . Довести, що ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ збігається в H тоді і тільки тоді, коли збіжний числовий ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2$.

60. Нехай $l_1, l_2, \ldots$ - ортонормована система в гільбертовому просторі H , $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ - послідовність дійсних чисел. Довести, що ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i l_i$ збіжний в H тоді і тільки тоді, коли $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < \infty$.

Практична робота №2
Лінійні неперервні функціонали

Нехай X - нормований простір. Відображення $f : X \to R$ називається функціоналом. Функціонал f називається лінійним, якщо для довільних чисел $\lambda, \mu \in R$ і довільних елементів $x, y \in X$ виконується рівність $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

Функціонал $f: X \to R$ називається неперервним у точці x_0, якщо $f(x_n) \to f(x_0)$ при $x_n \to x_0$.

Теорема. Якщо лінійний функціонал $f: X \to R$ неперервний в точці $0 \in X$, тоді він неперервний в будь-якій точці $x_0 \in X$.

Лінійний функціонал $f: X \to R$ називається неперервним, якщо він неперервний в точці $0 \in X$.

Лінійний функціонал $f: X \to R$ називається обмеженим, якщо $\exists M > 0$, що для будь-якого елемента $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \le M\|x\|$.

Теорема. Лінійний функціонал $f: X \to R$ неперервний тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Нормою лінійного неперервного функціонала називається число

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|. \tag{1}$$

Приклад 1. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f: c_0 \to R,\ f(x) = 2x_1 - 3x_2$, і знайти його норму.

Розв'язування. Для будь-яких чисел $\lambda, \mu \in R$ і довільних елементів $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...), y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in c_0$ маємо :

$$f(\lambda x + \mu y) = f(\lambda(x_1, x_2, ..., x_n, ...) + \mu(y_1, y_2, ..., y_n, ...)) =$$
$$= f((\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ..., \lambda x_n + \mu y_n, ...)) =$$
$$= 2(\lambda x_1 + \mu y_1) - 3(\lambda x_2 + \mu y_2) =$$
$$= \lambda(2x_1 - 3x_2) + \mu(2y_1 - 3y_2) = \lambda f(x) + \mu f(y) .$$

Значить, функціонал f лінійний.

Візьмемо будь-який елемент $x \in c_0$ і оцінимо значення функціонала f на ньому: $|f(x)| = |2x_1 - 3x_2| \le 2|x_1| + 3|x_2|$. Оскільки $\|x\| = \sup\limits_{1 \le i \le \infty} |x_i|$, тоді $|x_1| \le \|x\|$, $|x_2| \le \|x\|$ і $|f(x)| \le 2\|x\| + 3\|x\| = 5\|x\|$. Функціонал f обмежений, а значить, неперервний і $\|f\| \le 5$. Припустимо, що існує такий елемент $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, ...)$ із одиничною нормою, для якого $\left|f(x^{(0)})\right|=5$. Тоді повинна виконуватись наступна рівність $\left|2x_1^{(0)}-3x_2^{(0)}\right|=5$. Так як $\left|x_1^{(0)}\right|\le 1$ і $\left|x_2^{(0)}\right|\le 1$, то ця рівність може виконуватись лише тоді, коли $x_1^{(0)}=-x_2^{(0)}=1$ або $x_1^{(0)}=-x_2^{(0)}=-1$. Візьмемо, наприклад, елемент $x^{(0)}=(1,-1,0,...,0,...)$. Норма його $\left\|x^{(0)}\right\|=\sup\{|1|,|-1|\}=1$, а значення функціонала на ньому $\left|f(x^{(0)})\right|=2\cdot 1-3\cdot(-1)=5$. Враховуючи раніше отриману оцінку $\|f\|\le 5$, отримаємо, що норма функціонала дорівнює 5, тобто $\|f\|=5$.

Приклад 2. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f: l_2 \to R$, $f(x)=2x_1-4x_2+3x_3$, і знайти його норму.

Розв'язування. . Нехай λ,μ - довільні дійсні числа, а $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$ - довільні послідовності простору l_2 .Тоді

$$f(\lambda x+\mu y)=2(\lambda x_1+\mu y_1)-4(\lambda x_2+\mu y_2)+3(\lambda x_3+\mu y_3)=$$
$$=\lambda(2x_1-4x_2+3x_3)+\mu(2y_1-4y_2+3y_3)=\lambda f(x)+\mu f(y)\ ,$$

тобто функціонал f лінійний.

Візьмемо будь-який елемент $x\in l_2$ і оцінимо значення $|f(x)|$:

$$|f(x)|=|2x_1-4x_2+3x_3|\le\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\le$$
$$\le\sqrt{29}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2}=\sqrt{29}\|x\|.$$

При оцінці значення $|f(x)|$ ми використали нерівність Коші – Буняковського в просторі l_2. Значить, функціонал f обмежений і неперервний, причому $\|f\|\le\sqrt{29}$.

Припустимо, що існує послідовність $x^{(0)}\in l_2$ із одиничною нормою, для якої $\left|f(x^{(0)})\right|=\sqrt{29}$, тобто $\left|2x_1^{(0)}-4x_2^{(0)}+3x_3^{(0)}\right|=\sqrt{29}$.

Рівність справджується при $x_1^{(0)} = 2/\sqrt{29}, x_2^{(0)} = -4/\sqrt{29}$, $x_3^{(0)} = 3/\sqrt{29}$. Розглянемо тепер елемент $x^{(0)} = (2/\sqrt{29}, -4/\sqrt{29}, 3/\sqrt{29}, 0, ..., 0, ...) \in l_2$. Його норма $\|x^{(0)}\| =$

$$= \sqrt{(2/\sqrt{29})^2 + (-4/\sqrt{29})^2 + (3/\sqrt{29})^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{16}{29} + \frac{9}{29}} = 1,$$ а

значення функціонала f на ньому

$$f(x^{(0)}) = 2\frac{2}{\sqrt{29}} - 4(-\frac{4}{\sqrt{29}}) + 3\frac{3}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

Отже, норма функціонала f дорівнює $\sqrt{29}$.

Приклад 3. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f : l_1 \to R,\ f(x) = x_1 - 3x_3$, і знайти його норму.

Розв'язування. Перевіримо лінійність функціонала. Для довільних дійсних чисел λ, μ і довільних елементів $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l_1$ маємо :

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 - 3(\lambda x_3 + \mu y_3) =$$
$$= \lambda(x_1 - 3x_3) + \mu(y_1 - 3y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad .$$

Значить, функціонал f є лінійним.

Оцінимо значення $|f(x)|$ для будь-якого елемента $x \in l_1$:

$$|f(x)| = |x_1 - 3x_3| \le |x_1| + 3|x_3| \le \max\{1,3\}(|x_1| + |x_2|) \le$$
$$\le \max\{1,3\}\sum_{i=1}^{\infty}|x_i| = 3\|x\|.$$

Звідси випливає обмеженість, неперервність функціонала і оцінка $\|f\| \le 3$.

Нехай існує послідовність $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, ...) \in l_1$, норма якої дорівнює одиниці, така, що $|f(x^{(0)})| = 3$. Тоді маємо $|x_1^{(0)} - 3x_3^{(0)}| = 3$. Рівність виконується, наприклад, при $x_1^{(0)} = 0$, $x_3^{(0)} = 1$. Розглянемо послідовність $x^{(0)} = (0,0,1,0,...,0,...)$. Вона належить простору l_1, має одиничну норму, а значення функціонала $\left|f(x^{(0)})\right| = |0-3\cdot 1| = 3$. Отже, норма функціонала f рівна 3.

Приклад 4. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f: c_0 \to R$, $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} x_i$, і знайти його норму.

Розв'язування. Для будь-яких чисел $\lambda, \mu \in R$ і довільних послідовностей $x, y \in c_0$ маємо $f(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}(\lambda x_i + \mu y_i)$.

Оскільки послідовності x і y є обмеженими, а ряд $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$ є абсолютно збіжним, тому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}(\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} x_i + \mu \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} y_i = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Значить, функціонал f є лінійним.

Нехай x - будь-яка послідовність простору c_0. Тоді

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} x_i\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} |x_i| \le \sup_{1\le i \le \infty} |x_i| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} .$$

Так як $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} = e^2 - 1$, тому $|f(x)| \le (e^2-1)\|x\|$. Звідки отримаємо, що функціонал f обмежений, неперервний і $\|f\| \le e^2 - 1$.

Припустимо, що в просторі c_0 існує послідовність $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, ...)$ із одиничною нормою така, що $\left|f(x^{(0)})\right| = e^2 - 1$. Тоді повинна виконуватись рівність $\left|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} x_i^{(0)}\right| = e^2 - 1$. Вона можлива тоді і тільки тоді, коли $x_i^{(0)} = 1, \forall i \ge 1$. Тобто послідовність $x^{(0)}$ повинна мати вигляд $x^{(0)} = (1,1,...,1,...)$. Ця послідовність не збіжна до нуля, тому простору c_0 не належить. Значить, у просторі c_0 не існує елемента з одиничною нормою, значення функціонала f на якому дорівнює $e^2 - 1$.

Розглянемо послідовність елементів $x^{(1)} = (1,0,...,0,...)$, $x^{(2)} = (1,1,0,...,0,...),...,$ $x^{(n)} = (1,1,...,1,0,...),...,$ простору c_0. Норма кожного елемента послідовності дорівнює одиниці. Знайдемо значення функціонала f на елементах послідовності :

$$f(x^{(1)}) = \frac{2}{1},\ f(x^{(2)}) = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!},$$

$$f(x^{(3)}) = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!},...,\ f(x^{(n)}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^i}{i!},... \ .$$

Отримані значення, як неважко переконатись, співпадають із послідовністю часткових сум ряду $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$, тому $\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)}) = = e^2 - 1$. Звідси випливає, що $\sup_{\|x\|=1} |f(x)| \geq e^2 - 1$. Враховуючи раніше отриману оцінку $\|f\| \leq e^2 - 1$, отримаємо $\|f\| = e^2 - 1$.

Приклад 5. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f : l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} x_i$, і знайти його норму.

Розв'язування. Для будь-яких дійсних чисел λ, μ і довільних послідовностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots),\ y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots) \in l_1$ маємо

$$f(\lambda x + \mu y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} (\lambda x_i + \mu y_i) \quad .$$

Ряди $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ і $\sum_{i=1}^{\infty} y_i$ абсолютно збіжні і для кожного $i \geq 1$ $\frac{i}{2i+1} < \frac{1}{2}$, тому

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} x_i + \mu \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} y_i = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

Тим самим лінійність функціонала перевірена.

Перевіримо тепер його неперервність. Для будь-якої послідовності $x \in l_1$ отримаємо :

$$\left| f(x) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} x_i \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} \left| x_i \right| \le \sup_{1 \le 1 \le \infty} \frac{i}{2i+1} \sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i \right| = \frac{1}{2} \|x\|.$$

Отже, функціонал f обмежений, тобто неперервний, а також

$\|f\| \le \frac{1}{2}$.

Нехай існує елемент $x^{(0)} \in l_1$ із одиничною нормою такий, що $\left| f(x^{(0)}) \right| = \frac{1}{2}$, тобто виконується рівність $\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} x_i^{(0)} \right| = \frac{1}{2}$. Але

для будь-якого $i \ge 1$ завжди $\frac{i}{2i+1} < \frac{1}{2}$, тому

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} x_i^{(0)} \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2i+1} \left| x_i^{(0)} \right| < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \left| x_i^{(0)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Отримали протиріччя, тобто такого елемента в просторі l_1 не існує.

Розглянемо послідовність елементів $x^{(1)} = (1,0,...,0,...)$, $x^{(2)} = (0,1,0,...,0,...)$, …, $x^{(n)} = (0,0,\ldots,1,0,\ldots)$ …, простору l_1 із одиничною нормою. Знайдемо значення функціонала на елементах цієї послідовності:

$$f(x^{(1)}) = \frac{1}{3},\ f(x^{(2)}) = \frac{2}{5}, \ldots,\ f(x^{(n)}) = \frac{n}{2n+1}, \ldots .$$

Оскільки $\sup_{1 \le n \le \infty} \left| f(x^{(n)}) \right| = \frac{1}{2}$, то звідси випливає, що $\sup_{\|x\|=1} \left| f(x) \right| \ge \frac{1}{2}$.

Отже, маємо $\|f\| \le \frac{1}{2}$ і $\|f\| \ge \frac{1}{2}$, тобто $\|f\| = \frac{1}{2}$.

Приклад 6. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f : C[0,1] \to R,\ f(x) = 4x(0) - 2x(1)$, і знайти його норму.

Розв'язування. Для довільних чисел $\lambda, \mu \in R$ і довільних функцій $x = x(t),\ y = y(t) \in C[0,1]$ отримаємо :

$$f(\lambda x+\mu y)=4(\lambda x(0)+\mu y(0))-2(\lambda x(1)+\mu y(1))=$$
$$=\lambda(4x(0)-2x(1))+\mu(4y(0)-2y(1))=\lambda f(x)++\mu f(y)\ .$$

Умова лінійності функціонала виконується.

Оцінимо значення функціонала f на будь-якому елементі x простору $C[0,1]$. Маємо $|f(x)|=|4x(0)-x(1)|\le 4|x(0)|+2|x(1)|$. Згідно визначення норми в просторі $C[0,1]$ $\|x\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)|$, звідси $|x(t)|\le\|x\|$ для кожного t із відрізка $[0,1]$, тобто $|x(0)|\le\|x\|$ і $|x(1)|\le\|x\|$. Тоді $|f(x)|\le 4\|x\|+2\|x\|=6\|x\|$. Значить, функціонал f обмежений, неперервний і $\|f\|\le 6$.

Знайдемо норму функціонала. Нехай існує така функція $x^{(0)}=x^{(0)}(t)$, норма якої дорівнює одиниці, що $\left|f(x^{(0)})\right|=\left|4x^{(0)}(0)-2x^{(0)}(1)\right|=6$. Оскільки $\left\|x^{(0)}\right\|=1$, то значення функції $x^{(0)}(t)$ в точках $t=0$ і $t=1$ по модулю не перевищують одиниці. Звідси випливає, що рівність $\left|f(x^{(0)})\right|=6$ може виконуватись тоді, коли $x^{(0)}(0)=-x^{(0)}(1)=1$ або $x^{(0)}(0)=-x^{(0)}(1)=-1$. Розглянемо функцію $x^{(0)}(t)=1-2t$. Норма цієї функції $\left\|x^{(0)}\right\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|1-2t|=1$, а в точках $t=0$ і $t=1$ її значення відповідно дорівнюють 1 і -1. Оскільки раніше отримали оцінку $\|f\|\le 6$, а для функції $x^{(0)}(t)$ маємо $f(x^{(0)})=6$, то норма функціонала f дорівнює 6.

Приклад 7. Перевірити лінійність, неперервність функціонала $f:C[-1,1]\to R,\ f(x)=\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt$, і знайти його норму.

Розв'язування. Перевіримо лінійність функціонала:

$$f(\lambda x+\mu y)=\int\limits_{-1}^{1}t(\lambda x(t)+\mu y(t))dt=\lambda\int\limits_{-1}^{1}tx(t)dt+\mu\int\limits_{-1}^{1}ty(t)dt=$$
$$=\lambda f(x)+\mu f(y)\ ,\ \forall\lambda,\mu\in R,\forall x,y\in C[-1,1]\ ,$$

тобто функціонал f лінійний.

Для довільної функції $x \in C[-1,1]$ маємо :

$$|f(x)| = \left|\int_{-1}^{1} tx(t)dt\right| \le \int_{-1}^{1} |t||x(t)|dt \le \max_{0\le t\le 1}|x(t)| \cdot \int_{-1}^{1}|t|dt = \|x\|,$$

бо $\int_{-1}^{1}|t|dt = 1$. Отже, функціонал f обмежений, причому $\|f\| \le 1$.

Припустимо, що існує функція $x^{(0)} \in C[-1,1]$, $\|x^{(0)}\| = 1$, така, для якої $|f(x^{(0)})| = 1$. Тоді повинна виконуватись рівність $\left|\int_{-1}^{1} tx^{(0)}(t)dt\right| = 1$. Функція t міняє знак на відрізку $[-1,1]$, і, крім того, $\int_{-1}^{1}|t|dt = 1$, тому рівність можлива тоді і тільки тоді, коли $x^{0}(t) = \pm signt$. Але функція $signt$ не належить простору $C[-1,1]$.

Розглянемо послідовність функцій $x_n(t)$: $x_n(t) = -1$, $t \in [-1,-1/n]$, $x_n(t) = nt$, $t \in [-1/n, 1/n]$, $x_n(t) = 1$, $t \in [1/n, 1]$, $n \in N$.

Кожна функція $x_n(t)$ неперервна на відрізку $[-1,1]$ і має одиничну норму. Обчислимо значення функціонала f на елементі $x_n(t)$:

$$f(x_n) = \int_{-1}^{1} tx_n(t)dt = \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} t\cdot(-1)dt + \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} tntdt + \int_{\frac{1}{n}}^{1} t\cdot 1dt =$$

$$= -\frac{t^2}{2}\bigg|_{-1}^{-\frac{1}{n}} + n\frac{t^3}{3}\bigg|_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} + \frac{t^2}{2}\bigg|_{\frac{1}{n}}^{1} =$$

$$= -(\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2}) + \frac{1}{3n^2} - (-\frac{1}{3n^2}) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2} = 1 - \frac{1}{3n^2} \quad ,$$

тобто $f(x_n) = 1 - \frac{1}{3n^2}$. Оскільки $f(x_n) \to 1$ при $n \to \infty$, то це означає, що $\sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \geq 1$.Але раніше було отримано оцінку $\|f\| \leq 1$. Значить, $\|f\| = 1$.

Завдання для самостійної роботи

Перевірити, що функціонали є лінійними, неперервними і знайти їх норми.

1. $f : R^3 \to R,\ f(x) = x_1 + 2x_3$.
2. $f : R^4 \to R,\ f(x) = 3x_2 + 4x_4$.
3. $f : R^k \to R,\ f(x) = x_1 + 2x_k$.
4. $f : c_0 \to R,\ f(x) = x_1 + 2x_4$.
5. $f : c_0 \to R,\ f(x) = x_2 - 5x_1$.
6. $f : c_0 \to R,\ f(x) = 4x_3 - x_2 - x_1$.
7. $f : c_0 \to R,\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x_i$.
8. $f : c_0 \to R,\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} x_{2i}$.
9. $f : c_0 \to R,\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} x_i$.
10. $f : c \to R,\ f(x) = x_1 + 2x_3$.
11. $f : c \to R,\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} x_{2i}$.
12. $f : m \to R,\ f(x) = 2x_1 - x_3$.
13. $f : m \to R,\ f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} x_{2i-1}$.
14. $f : l_1 \to R,\ f(x) = 2x_1 + 4x_2$.

15. $f: l_1 \to R,\ f(x) = 3x_2 - 4x_3.$

16. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_{2i}.$

17. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} x_i.$

18. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+2} x_i.$

19. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{3i+4} x_{2i}.$

20. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{2i}) x_{2i}.$

21. $f: l_2 \to R,\ f(x) = 3x_1 + 2x_2.$

22. $f: l_2 \to R,\ f(x) = 2x_1 - 3x_3.$

23. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = 3x(0) + 2x(1).$

24. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = 4x(1) - 2x(0).$

25. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^1 t^2 x(t)\,dt.$

26. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^1 x(t) \cos t\,dt.$

27. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^1 (t - 0.5) x(t)\,dt.$

28. $f: C[-1,1] \to R,\ f(x) = 2x(0) + 3x(1) - 4x(-1).$

29. $f: C[-1,1] \to R,\ f(x) = \int_{-1}^1 t^3 x(t)\,dt.$

30. $f: C^1[0,1] \to R,\ f(x) = x'(0).$

31. $f: R^n \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} x_i.$

32. $f: R^{2n} \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} x_{2i}$.

33. $f: c_0 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} x_{2i-1}$.

34. $f: c_0 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} x_i$.

35. $f: c_0 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)!} x_{2i}$.

36. $f: c_0 \to R, f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3i} x_{3i}$.

37. $f: c \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} x_{2i-1}$.

38. $f: c \to R,\ f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

39. $f: c \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x_i$.

40. $f: m \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} x_i$.

41. $f: m \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{3^i} x_{3i}$.

42. $f: m \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} x_{2i}$.

43. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{3i}) x_{3i}$.

44. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} (x_i + x_{i+1})$.

45. $f: l_1 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i^2 + 2} x_i$.

46. $f: l_2 \to R,\ f(x) = 2x_1 + 3x_2 - 4x_3$.

47. $f: l_2 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}(x_i + x_{i+1}).$

48. $f: l_2 \to R,\ f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} x_i.$

49. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = 3x(1) - 2x(0.5).$

50. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^1 x(\sqrt{t})dt.$

51. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^1 x(t)\cos\pi t dt.$

52. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^1 x(t) sign(t-0.5)dt.$

53. $f: C[0,1] \to R,\ f(x) = \int_0^{\ln 2} e^t x(t)dt + 3x(1).$

54. $f: C[-1,1] \to R,\ f(x) = 2x(0.5) - 3x(1) - 4x(-1).$

54. $f: C[-1,1] \to R,\ f(x) = \int_{-1}^1 x(t)dt - x(0).$

55. $f: C[-1,1] \to R,\ f(x) = \int_{-1}^1 x(t) sign t dt.$

56. $f: C[0,\pi] \to R,\ f(x) = \int_0^{\pi} x(t)\sin t dt - 3x(\pi).$

57. $f: C[0,\pi] \to R,\ f(x) = \int_0^{\pi} x(t)\cos t dt - 2x(0).$

58. $f: C[0,2] \to R,\ f(x) = \int_0^1 (1-2t)x(t)dt - 3x(0) + 4x(2).$

59. $f: C^1[0,1] \to R,\ f(x) = x'(0) + x(1).$

60. $f: C^1[0,1] \to R,\ f(x) = 2x(0) - 3x'(0).$

Література

1. Банах С.С. Курс функціонального аналізу. – Київ : Радянська школа, 1948. – 216 с.
2. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу / Укладачі М.Ф.Городній, О.Ю.Костантінов, О.Н.Нестеренко, А.В.Чайковський. – К.: ВПЦ ''Київський університет'', 2006.-103 с
3. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П, Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Выща школа, 1990.-479 с.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. -744 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
6. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984. – 256 с.