УДК 532.546

Кузло М.Т., к.т.н., доцент, Філатова І.А., ст. викладач (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ВОДОПРОНИКЛИВОГО ҐРУНТОВОГО МАСИВУ ПРИ ФІЛЬТРАЦІЇ ВОДИ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ НАПРЯМКУ

Отримані розв'язки напружено-деформованого стану ґрунтових масивів при фільтрації води у вертикальному напрямку. Результати чисельних розв'язків наведено на конкретному прикладі.
Ключові слова: переміщення, деформації, напруження, фільтрація.

The solutions of soil massifs' strained-deformed state under filtration of water in the vertical direction are received. The results of numerical calculations are given on the specific example.

Полученные решения напряженно-деформированного состояния грунтовых массивов при фильтрации воды в вертикальном направлении. Результаты решений приведено на конкретном примере.

Експлуатацію гідротехнічних та водозабірних споруд нерідко доводиться проводити за наявності вертикальної фільтрації води у водопроникливих шарах ґрунту. Як правило, в процесі експлуатації водопідпірних гідротехнічних споруд спостерігається підвищення рівня ґрунтових вод, а водозабірних – навпаки, їх пониження. Пониження рівня ґрунтових вод виникає внаслідок зменшення дренування товщі ґрунту, каналізаційними колекторами, різноманітними підземними комунікаціями, тощо.

Рух фільтраційного потоку веде до виникнення об'ємних сил і зміни напружено-деформованого стану (НДС) ґрунтового масиву [1].

У зв'язку з цим виникла необхідність з визначення (НДС) (переміщень, деформацій, напружень) ґрунтових масивів за наявності фільтраційного потоку у водопроникливих шарах ґрунту.

Метою роботи є оцінка НДС ґрунтових масивів при дії фільтраційного потоку.

У даній роботі пропонуються розв'язки з визначення переміщень, деформацій та напружень в ґрунтовому масиві при фільтрації води у вертикальному напрямку.

Виходячи зі складності поставленої проблеми, розглянемо одновимірну задачу з визначення переміщень, деформацій та напружень шару ґрунту з врахуванням дії фільтраційного потоку у вертикальному напрямку. Для цього розглянемо водопроникливий ґрунтовий масив, фільтрація води в якому відбувається у вертикальному напрямку (рис. 1).

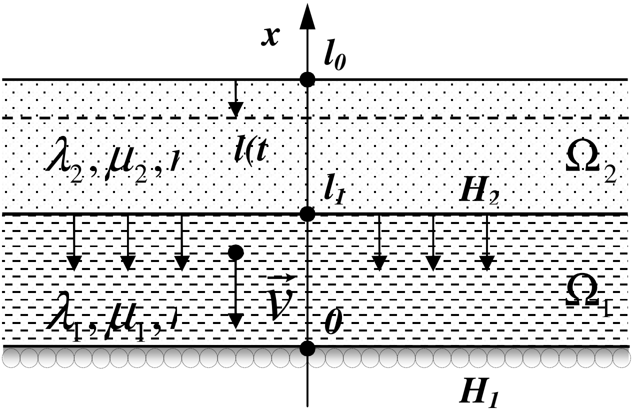

Рис. 1. Розрахункова схема з визначення НДС у ґрунтовому масиві при дії фільтраційного потоку

Нехай на нижній поверхні ґрунту на межі $x=0$ задано п’єзометричний напір H_1, а на глибині l_1 відповідно H_2 ($H_2>H_1$). В результаті різниці напорів відбувається процесс фільтрації води в ґрунтовому масиві у вертикальному напрямку. При цьому процесс фільтрації води підлягає закону А. Дарсі.

Запишемо рівняння НДС в переміщеннях [2]:

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{d^2 u_1}{dx^2} = X_1,\ \ x \in (0, l_1), \tag{1}$$

$$(\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{d^2 u_2}{dx^2} = X_2,\ \ x \in (l_1, l), \tag{2}$$

$$X_1 = \gamma_{sb} + \frac{dp}{dx} \quad , \quad X_2 = \gamma_{np.},$$

де γ_{sb} – ґрунт, що знаходиться в зваженому стані; γ_{np} – питома вага ґрунту в природному стані; p – фільтраційний тиск, що визначається за формулою

$$p = \gamma_{w.}(h - x), \tag{3}$$

де h – п’єзометричний напір; x – вертикальна координата.

Умови спряження записуються так:

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \tag{4}$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{du_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{du_2(l_1)}{dx}. \tag{5}$$

Фільтрація води у ґрунтовому масиві відбувається згідно закону А. Дарсі

$$V = -k(x)\frac{dh}{dx},\ \frac{dV}{dx} = 0, \tag{6}$$

$$h(0) = H_1, \tag{7}$$

$$h(l_1) = H_2. \tag{8}$$

де V – швидкість фільтрації ґрунтових вод; $k(x)$ – коефіцієнт фільтрації.

Знайдемо розв'язок задачі фільтрації води з (6)-(8). На основі формули (6) маємо:

$$\frac{d\left(k(x)\frac{dh}{dx}\right)}{dx} = 0.$$ Звідси $$\frac{dh}{dx} = \frac{A}{k(x)},$$

$$h(x) = A\int_0^x \frac{ds}{k(s)} + B, \tag{9}$$

де A і B – невідомі коефіцієнти, що знаходимо, використовуючи крайові умови (7) і (8):

$$h(0) = B = H_1; \tag{10}$$

$$A = \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}}. \tag{11}$$

Тоді формула для визначення п'єзометричного напору набуває вигляду:

$$h(x) = \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}} \int_0^x \frac{ds}{k(s)} + H_1. \tag{12}$$

Знайдемо $\frac{dp}{dx}$, використовуючи формулу (3):

$$\frac{dp}{dx} = \gamma_{w.}\left(\frac{1}{k(x)} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}} - 1\right).$$

Таким чином, масові сили запишуться у вигляді:

$$X_1 = \gamma_{sb.} + \gamma_w \left(\frac{1}{k(x)} \cdot \frac{H_2 - H_1}{\int\limits_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}} - 1 \right). \qquad (13)$$

Враховуючи, що $\overline{A_1} = A_1 \cdot l,\ \overline{a_i} = a_i \cdot l,\ i = 1{,}2$ (риски для простоти опущені), у безрозмірних змінних математична модель НДС ґрунтового масиву записується у вигляді:

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} = a_1 + A_1 \cdot \frac{1}{k(x)},\ x \in (0, l_1), \qquad (14)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} = a_2,\ x \in (l_1, 1)\ , \qquad (15)$$

де $a_1 = \dfrac{\gamma_{sb} - \gamma_{w.}}{\lambda_1 + 2\mu_1}$; $A_1 = \dfrac{\gamma_{w.}(H_2 - H_1)}{(\lambda_1 + 2\mu_1)\int\limits_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)}}$; $a_2 = \dfrac{\gamma_{np.}}{\lambda_2 + 2\mu_2}$.

Розглянемо випадок, коли крайові умови для переміщень мають вигляд:

$$u_1(0) = 0, \qquad (16)$$

$$\frac{du_2(l)}{dx} = 0. \qquad (17)$$

Це означає наявність переміщення верхньої межі ґрунту.

Запишемо умови спряження:

$$u_1(l_1) = u_2(l_1), \qquad (18)$$

$$(\lambda_1 + 2\mu_1)\frac{du_1(l_1)}{dx} = (\lambda_2 + 2\mu_2)\frac{du_2(l_1)}{dx}. \qquad (19)$$

Перейдемо до безрозмірних величин згідно формул (для спрощення риски над безрозмірними змінними опустимо):

$$\bar{x} = \frac{x}{l_0}, \bar{h} = \frac{h}{l_o}, \bar{p} = \frac{p}{l_0}, \bar{l_1} = \frac{l_1}{l_0},\ \bar{l} = \frac{l}{l_0},\ \overline{A_1} = A_1 \cdot l_0, \overline{u_i} = \frac{u_i}{l_0},\ \overline{a_i} = a_i \cdot l_0\ ,$$
$$i = 1{,}2,$$

де $\bar{l} < 1$ для будь-якого $t > 0$.

Враховуємо, що $l(t) \le l_0$,

$$l(t) - l_0 = u_2(l(t)),\ l(0) = l_0.$$

В даному випадку розв’язок задачі задається формулами:

$$u_1(x)=\frac{a_1x^2}{2}+A_1\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^z\frac{ds}{k(s)}\right)dz+c_1x+c_2,\ x\in(0,l_1),\tag{20}$$

$$u_2(x)=\frac{a_2x^2}{2}+c_3x+c_4,\ x\in(l_1,l),\tag{21}$$

де

$$c_2=0,\tag{22}$$

$$c_3=-a_2l,\tag{23}$$

$$c_1=\frac{\lambda_2+2\mu_2}{\lambda_1+2\mu_1}(a_2l_1-a_2l)-a_1l_1-A_1\int\limits_0^{l_1}\frac{ds}{k(s)},\tag{24}$$

$$c_4=A_1\int\limits_0^{l_1}\left(\int\limits_0^z\frac{ds}{k(s)}\right)dz-A_1l_1\int\limits_0^{l_1}\frac{ds}{k(s)}-\frac{(a_1+a_2)l_1^2}{2}+a_2ll_1+\frac{\lambda_2+2\mu_2}{\lambda_1+2\mu_1}(a_2l_1^2-a_2ll_1).\tag{25}$$

Величина деформації запишеться у вигляді:

$$\varepsilon_1(x)=a_1x+A_1\int\limits_0^x\frac{ds}{k(s)}+c_1,\ 0\le x\le l_1,\tag{26}$$

$$\varepsilon_2(x)=a_2x+c_3,\ l_1\le x\le 1.\tag{27}$$

Напруження матимуть вигляд:

$$\sigma_1(x)=(\lambda_1+2\mu_1)(a_1x+A_1\int\limits_0^x\frac{ds}{k(s)}+c_1),\ 0\le x\le l_1,\tag{28}$$

$$\sigma_2(x)=(\lambda_2+2\mu_2)(a_2x+c_3),\ l_1\le x\le 1.\tag{29}$$

Таким чином, задача НДС в шарі ґрунту при наявності фільтрації води у вертикальному напрямку розв'язана повністю і дається формулами (20)-(29).

У зв'язку із тим, що відбувається переміщення верхньої межі ґрунту, то його осідання буде визначатися за формулами

$$l(t)-l_0=u_2(l(t)).\tag{30}$$

Використовуючи формулу (21), маємо:

$$u_2(l(t))=\frac{a_2l^2(t)}{2}+c_3l(t)+c_4,\tag{31}$$

де коефіцієнти c_3 і c_4 визначаються згідно формул (23) і (25).

Підставивши значення (23) і (25) у формулу (31), а (31) у (30), після певних перетворень отримаємо:

$$\frac{a_2}{2}l^2(t)+b_1\cdot l(t)+b_2=0,\tag{32}$$

де
$$b_1 = \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_2 l_1 - a_2 l_1 + 1, \tag{33}$$

$$b_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} l_1^2 - \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_1 + 2\mu_1} a_2 l_1^2 - A_1 \int_0^{l_1} \left(\int_0^z \frac{ds}{k(s)} \right) dz + A_1 l_1 \int_0^{l_1} \frac{ds}{k(s)} - l_0 . \tag{34}$$

Розв'язуючи квадратне рівняння (32) відносно змінної $l(t)$, отримаємо:

$$l(t) = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 2a_2 b_2}}{a_2}, \tag{35}$$

де b_1 і b_2 визначаються за формулами (33), (34).

В якості прикладу виконано числові розрахунки при наступних вхідних даних:

$\lambda_1 = 13500\, кг/м^2$; $\lambda_2 = 17000\, кг/м^2$; $\mu_1 = 9000\, кг/м^2$; $\mu_2 = 11500\, кг/м^2$;

$\gamma_{зв.} = 10{,}5\ Кн/м^3$; $\gamma_{пр.} = 17{,}0\ Кн/м^3$; $\gamma_{w.} = 10{,}0\ Кн/м^3$;

$H_1 = 0{,}1$м ; $H_2 = 0{,}5$м ; $l_1 = 0{,}5$ м; $l_0 = 1$ м.

Розглядаємо випадок, коли *k=0,1м/добу*.

За формулою (35) знаходимо значення $l \approx 0{,}099\ м$.

Результати розрахунку наведені у таблиці.

Таблиця

Значення переміщень, деформацій та напружень

	x	$u(x)$, $\times 10^{-4}$	$\varepsilon(x)$, $\times 10^{-4}$	$\sigma(x)$
Ґрунт в природному стані	1	-2,21669	0,00094	0,00377
	0,9	-2,19553	-0,42406	-1,69623
	0,8	-2,13188	-0,84906	-3,39623
	0,7	-2,02572	-1,27406	-5,09623
	0,6	-1,87707	-1,69906	-6,79623
	0,5	-1,68591	-2,12406	-8,49623
Ґрунт в зваженому стані	0,5	-1,68591	-2,69722	-8,49623
	0,4	-1,40270	-2,96706	-9,34623
	0,3	-1,09250	-3,23690	-10,19623
	0,2	-0,75531	-3,50674	-11,04623
	0,1	-0,39115	-3,77658	-11,89623
	0	0	-4,04642	-12,74623

Графіки розподілу переміщень, деформацій та напружень за глибиною ґрунту наведені відповідно на рис. 2, 3 та 4.

Суцільною лінією побудований графік НДС ґрунту з фільтрацією води у ґрунті, пунктирною – графік НДС ґрунту без фільтрації води.

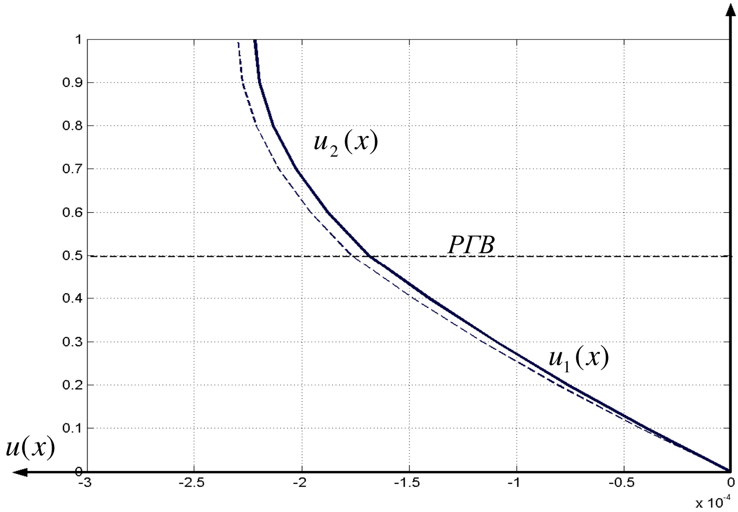

Рис. 2. Графік розподілу переміщень

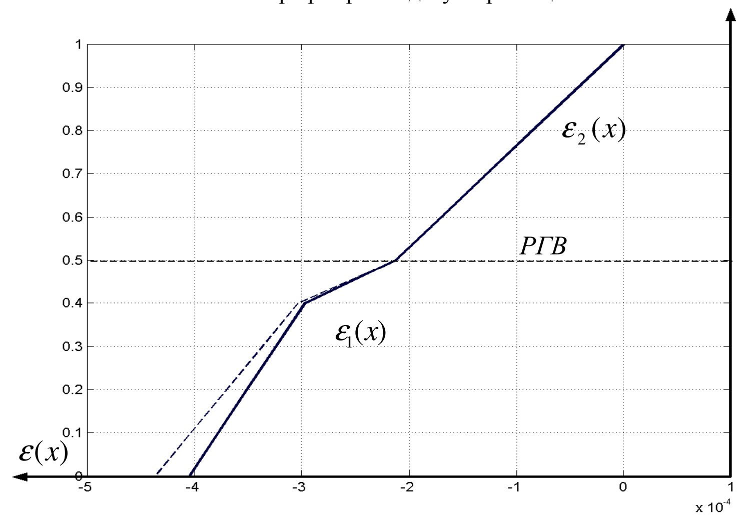

Рис. 3. Графік розподілу деформацій

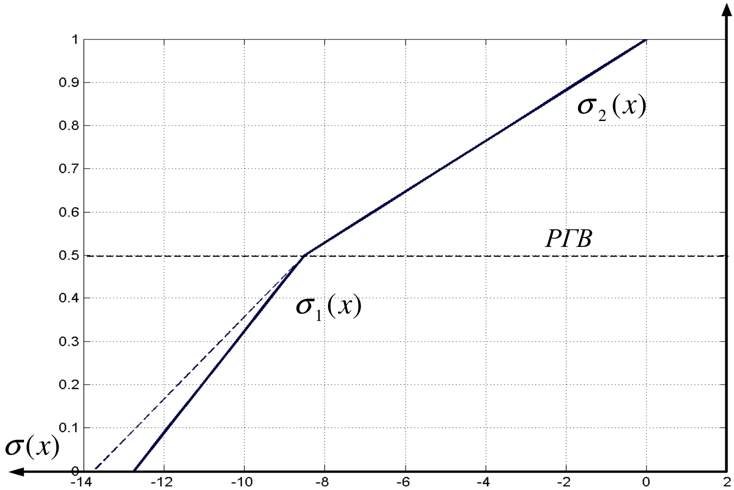

Рис. 4. Графік розподілу напружень

Висновок. Отримані розв'язки дають можливість визначити значення переміщень, деформацій і напружень у водопроникливих ґрунтових масивах при фільтрації води у вертикальному напрямку. Результати чисельних розрахунків наведено на конкретному прикладі. Подальшими дослідженнями можуть бути отримання відповідних розв'язків для багатошарових водопроникливих ґрунтових масивів.

1. Кузло М.Т., Філатова І.А. Про деякі математичні моделі напружено-деформівного стану ґрунтових масивів у процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод // Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. – Рівне, 2005. – Вип. 2 (30). – С. 282-287. **2.** Власюк І.А., Кузло М.Т. Математичне моделювання напружено-деформівного стану ґрунтових масивів у процесі руху вільної поверхні // Тези Всеукр. наукової конференції "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики", Львів, 2004. – С. 36.

Рецензент: д.т.н., професор Власюк А.П. (НУВГП)