УДК 539.3

Андрушков В.І., к.т.н., доцент, Русий Є.М., старший викладач
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ НА ПІДСТАВІ ГІПОТЕЗИ ПРЯМИХ ВЕРТИКАЛЕЙ

Наведені результати дослідження можливості застосування системи диференціальних рівнянь моментної теорії непологих оболонок в переміщеннях, побудованої на основі гіпотези прямих вертикалей, на випадок, коли товщина оболонки є змінною величиною.

The investigation results for the possibility of using the SPDE (system of partial differential equations) of moment non-shallow shells displacement theory based on hypothesis of direct verticals for the case, when the shell-thickness is variable, are presented.

Система трьох диференціальних рівнянь рівноваги моментної теорії непологих оболонок довільної форми в прямокутних координатах відносно трьох функцій переміщень на підставі гіпотези прямих вертикалей представлена в роботі [1]. Товщина оболонки по нормалі до її серединної поверхні вважалось сталою величиною.

Виведення цієї системи полягало в підстановці в рівняння рівноваги оболонки відповідних похідних від внутрішніх сил (1) і (2) з попередньою заміною в них осьових деформацій ε_x^*, ε_y^*, γ_{xy}^* і деформацій згину і кручення χ_x^*, χ_y^*, χ_{xy}^* через переміщення u, v, w.

$$\begin{cases} N_x^* = E \cdot h(\beta_{11} \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{12} \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{13} \cdot \gamma_{xy}^*); \\ N_y^* = E \cdot h(\beta_{12} \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{22} \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{23} \cdot \gamma_{xy}^*); \\ S_{xy}^* = E \cdot h(\beta_{13} \cdot \varepsilon_x^* + \beta_{23} \cdot \varepsilon_y^* + \beta_{33} \cdot \gamma_{xy}^*), \end{cases} \quad (1)$$

де $h = \dfrac{\overline{\delta}}{\cos\varphi_x \cdot \cos\varphi_y}$ – товщина оболонки в напрямку вертикальної осі z;

$\cos\varphi_x$, $\cos\varphi_y$ – косинуси кутів нахилу дотичних до поверхні оболонки вздовж координатних осей x і y.

$$\begin{cases} M_x^* = D^* (\beta_{11} \cdot \chi_x^* + \beta_{12} \cdot \chi_y^* + \beta_{13} \cdot \chi_{xy}^*)\,; \\ M_y^* = D^* (\beta_{12} \cdot \chi_x^* + \beta_{22} \cdot \chi_y^* + \beta_{23} \cdot \chi_{xy}^*)\,; \\ M_{xy}^* = D^* (\beta_{13} \cdot \chi_x^* + \beta_{23} \cdot \chi_y^* + \beta_{33} \cdot \chi_{xy}^*)\,, \end{cases} \tag{2}$$

де $D^* = \dfrac{E \cdot \overline{\delta}^2}{12\cos^2 \varphi_x \cdot \cos^2 \varphi_y}$.

Вирази (1) і (2) отримані автором роботи [2] і представляють собою фізичні рівняння моментної теорії непологих оболонок в прямокутних координатах з змінними коефіцієнтами $\beta_{i\,j}\,(i, j = 1, 2, 3)$.

Якщо товщина оболонки по нормалі до її серединної поверхні ($\overline{\delta}$) є функцією координат, то її можна ввести в значення цих коефіцієнтів. Тоді в любій точці поверхні оболонки з координатами x і y

$$\beta'_{i\,j}(x,\ y) = \beta_{i\,j}(x, y) \cdot \overline{\delta}(x, y),$$

де $\overline{\delta}(x, y)$ – функція зміни товщини оболонки.

Нові фізичні рівняння будуть відрізнятись від попередніх тільки тим, що розуміють під величинами їх коефіцієнтів. Це означає, що весь хід роздумів щодо отримання системи рівнянь оболонки в переміщеннях в [1] буде збережено, а в самій системі зміниться лише права частина кожного рівняння, яка буде записана як $\dfrac{Q^*}{E}$ (під величиною Q^* слід розуміти компоненти зовнішнього навантаження X^*, Y^*, Z^*). Крім того, змінна величина D^* тепер матиме вид:

$$D^* = \frac{E \cdot \overline{\delta^2}(x, y)}{12\cos^2 \varphi_x \cdot \cos^2 \varphi_y}\,. \tag{4}$$

Такі перетворення досить легко можна внести і в саму обчислювальну програму. Це потребує заміни лише чотирьох операторів, які представляють собою формули для підрахунку $\overline{\delta}(x, y)$, D^*, $\beta'_{i\,j}$ і формування вільних членів системи рівнянь.

В якості приклада наведено результати розрахунку квадратної в плані оболонки в вигляді еліптичного параболоїда (рис. 1), яка спирається по контуру на ідеальні діафрагми і товщина якої змінюється по закону

$$\overline{\delta}\,(x, y) = \frac{\overline{\delta_0}}{\cos\,\varphi_x \cdot \cos\,\varphi_y}\,. \tag{5}$$

Вихідні дані: $a = 18\,м$; $\dfrac{f}{a} = \dfrac{1}{4}$; $E = 3 \cdot 10^4\ МПа$; $\nu = 0{,}17$; вертикальне навантаження $Z^* = 5\,кН\,/\,м^2$.

$$z = -f\left[1 - \frac{2\,(x^2 + y^2)}{a^2}\right]$$

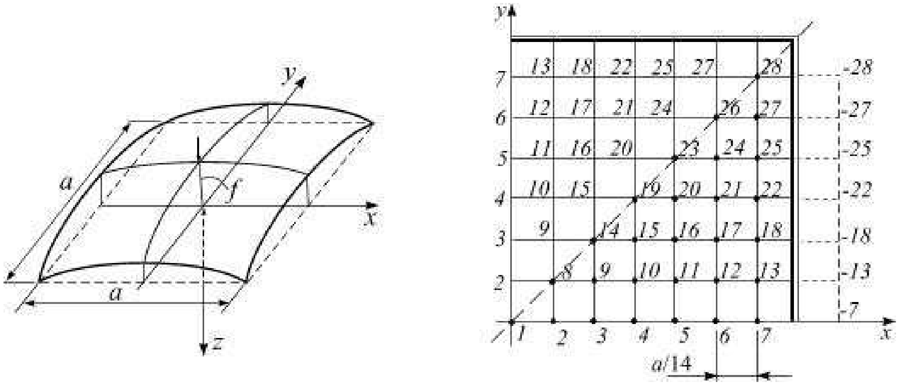

Рис. 1. Розрахункова схема оболонки

Розрахунок проведено методом скінчених різниць при сітці 14х14 (рис. 1).

Для порівняння було виконано розрахунок оболонки сталої товщини ($\overline{\delta} = 8\,см$). Якщо $\overline{\delta_0}$ оболонки змінної товщини прийняти теж $8\ см$, то за витратою матеріалу ці оболонки не будуть рівноцінні.

Згідно рис. 2 ордината точки серединної поверхні оболонки сталої товщини на відстані x від початку координат при умові, що переріз оболонки збігається з напрямком осі x, рівна

$$z(x) = -f\,(1 - 2\frac{x^2}{a^2})\,, \tag{6}$$

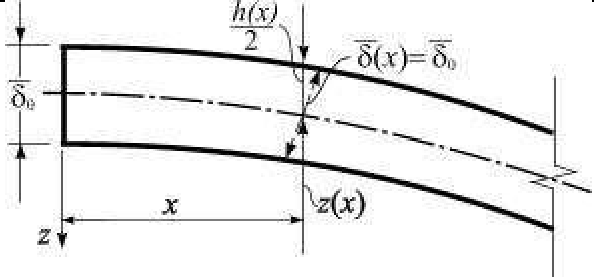

Рис. 2. Переріз оболонки сталої товщини

а точок на зовнішній і внутрішній поверхнях відповідно

$$z_1(x) = -f(1 - 2\frac{x^2}{a^2}) - \frac{h(x)}{2}, \qquad (7)$$

$$z_2(x) = -f(1 - 2\frac{x^2}{a^2}) + \frac{h(x)}{2}, \qquad (8)$$

де $h(x) = \dfrac{\overline{\delta_0}}{\cos \varphi_x}$ – товщина оболонки в напрямку осі z.

Тоді площа половини перерізу оболонки сталої товщини буде рівна

$$A_1 = \int_0^{0.5a} \left(z_1(x) - z_2(x)\right) dx = \int_0^{0,5a} h(x)\, dx = \overline{\delta}_0 \cdot \int_0^{0,5a} \left(\sqrt{1 + tg^2 \varphi_x}\right) dx. \qquad (9)$$

З урахуванням, що $tg\ \varphi_x = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{4f}{a^2} x$,

$$A_1 = \overline{\delta}_0 \cdot \int_0^{0,5a} \left(\sqrt{1 + \frac{16 \cdot f^2}{a^4} x^2}\right) dx. \qquad (10)$$

Після інтегрування отримаємо:

$$A_1 = \frac{\overline{\delta}_0 \cdot a^2}{8f} \cdot \left[\frac{2f}{a}\sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2}} + \ln\left(\frac{2f}{a} + \sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2}}\right)\right]. \qquad (11)$$

Аналогічно для оболонки змінної товщини (рис. 3) визначаємо площу її перерізу:

$$A_2 = \overline{\delta}_1 \left(\frac{a}{2} + \frac{2f^2}{3a}\right). \qquad (12)$$

Із рівності площ A_1 і A_2 знаходимо $\overline{\delta_1}$:

$$\overline{\delta_1} = \frac{3a^3 \cdot \overline{\delta}_0}{4f(3a^2 + 4f^2)} \cdot \left[\frac{2f}{a}\sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2}} + \ln\left(\frac{2f}{a} + \sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2}} \right) \right]. \quad (13)$$

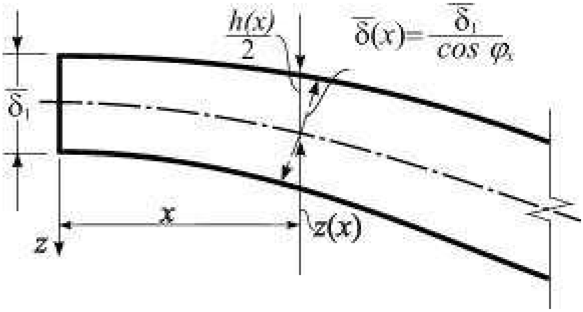

Рис. 3. Переріз оболонки змінної товщини

При заданих вихідних даних $\overline{\delta_1} \approx 7{,}7\,см$.

На рис. 4 наведено результати розрахунку оболонки сталої товщини $\left(\overline{\delta_0} = 8\,см\right)$ і змінної товщини $\left(\overline{\delta_1} \approx 7{,}7\,см\right)$ в якості епюр w, N_x^*, M_x^*, $\sigma_x^в$, $\sigma_x^н$ для перерізу, який збігається з напрямом осі x.

Аналіз результатів вертикальних переміщень (рис. 4, а) показує, що прогини оболонки змінної товщини збільшились в центрі і зменшились ближче до контуру в порівнянні з прогинами оболонки сталої товщини. Поздовжні сили N_x^* (рис. 4, в) не змінились, а згинні моменти M_x^* (рис. 4, б) дещо зросли.

Порівнюючи результати максимальних нормальних напруг $\sigma_x^в$ і $\sigma_x^н$ (рис. 4, г, д) для двох оболонок, можна зробити висновок, що більш раціональною є оболонка змінної товщини, тим паче, що об'єм її не змінився.

Таким чином, запропонована в роботі [1] методика дає можливість провести розрахунок оболонок змінної товщини, достатньо лише вказати характер її зміни. Такий підхід має перевагу при розрахунках оболонок змінної товщини з складним обрисом серединної поверхні і дозволяє розглядати як пологі, так і непологі оболонки.

Сталої товщини

$$\overline{\delta}(x,y)=\overline{\delta}_0=0{,}08\,м$$

Змінної товщини

$$\overline{\delta}(x,y)=\frac{\overline{\delta}_1}{\cos\varphi_x\cdot\cos\varphi_y};\quad \overline{\delta}_1=7{,}7\,см$$

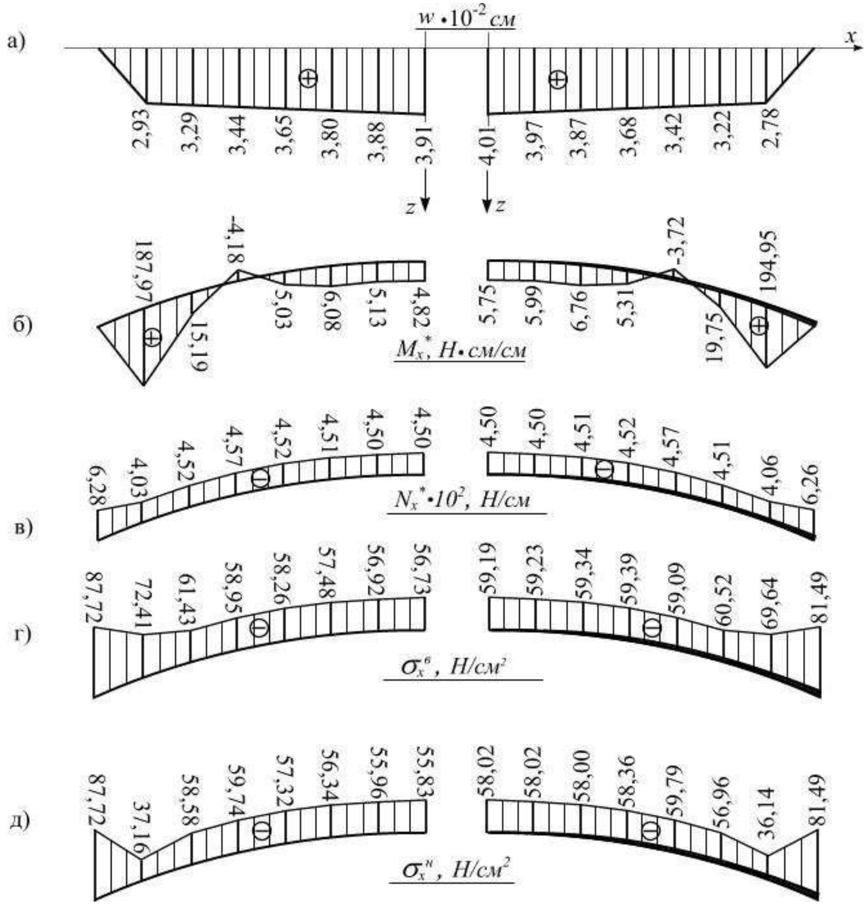

Рис. 4. Результати розрахунку оболонок

1. Андрушков В.И., Рассказов А.О. К расчету в перемещениях оболочек произвольной формы. – Прикладная механика, 1981. – Т. 17, № 11. – С. 118-121. **2.** Ржаницын А.Р. Расчет упругих оболочек произвольного очертания в прямоугольных координатах// Строительная механика и расчет сооружений. – 1977. – №1. – С. 21-28.

Рецензент: д.т.н., проф. Пугачов Є.В. (НУВГП)