

## ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 551.24.02:624.131.66

**Герус В. А.**, аспірант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНО-СУФОЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ В ГЕТЕРОГЕННИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

**Сформовано математичну модель взаємозв'язаних процесів фільтрації, хімічної та механічної суфозії в ґрунтах. Чисельний розв'язок відповідної нелінійної крайової задачі для системи параболічних рівнянь знайдено методом скінченних елементів. Комп'ютерну реалізацію запропонованих скінченноелементних схем реалізовано в середовищі FreeFem++. На прикладі модельного чисельного експерименту показана можливість значного впливу суфозії на значення напорів в ґрунті.**

**Ключові слова:** суфозія, фільтрація, математична модель, метод скінченних елементів.

**Ґрунт як гетерогенне пористе середовище** є складною системою. При наявності впливів різних факторів (температури, сольових розчинів, напорів, електричних полів) в ґрунті проходять складні взаємозв'язані процеси. Необхідність вивчення вказаних процесів пов'язана із задачами захисту ґрунтів та ґрунтових вод від забруднень, забезпечення безаварійності роботи цивільних і промислових споруд тощо. В цілій низці наукових робіт досліджено різні аспекти та різні взаємозв'язані процеси в пористих середовищах. В [1] побудовано математичні моделі та визначено важливість таких досліджень для глинистих бар'єрів, як складових елементів сховищ відходів. В [2] розроблено нові математичні моделі стосовно очищення промислових стоків та опріснення морської води. В роботах [3-5] наведено теоретичні та експериментальні дослідження міграції мікрота наночастинок в пористих середовищах, ефектів кольтатації, процесів фільтрування та суфозії.

В роботі [6] розвинуто підхід до математичного моделювання взаємозв'язаних процесів в гетерогенних пористих середовищах з використанням повної похідної в часі. При цьому мають бути відомі



(теоретично або експериментально) залежності параметрів пористих середовищ від параметрів досліджуваних процесів (температура, концентрація розчинних та нерозчинних компонент, напір, електричне поле). Ціль даної статті – дослідити вплив суфозійних процесів на фільтрацію в ґрунтах методами комп'ютерного моделювання та числового експерименту.

**Розглянемо процес фільтрації рідини в суфозійному ґрунті** (враховуються явища як хімічної, так і механічної суфозії), який займає область  $\Omega$  з межею  $\Gamma$ . Математична модель цієї задачі з урахуванням впливу теплосолеперенесення може бути описана наступною крайовою задачею [6]:

$$\nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{K}_h(c, T, s, N) \nabla h) = \sigma \left( \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \right) - \quad (1)$$

$$- \frac{\rho_p}{\rho_N} \frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\rho_p}{\rho_s} \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p(c, T) \mathbf{F}_{osm}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla c) - \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla c + \quad (2)$$

$$+ \frac{c}{\rho_p} \left( \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \nabla T \right) - \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - \alpha_{er} \mathbf{u} \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (3)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla T - \quad (4)$$

$$- \left( \rho_s c_s \frac{\partial s}{\partial t} + \rho_N c_N \frac{\partial N}{\partial t} \right) T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(c, T, s, N) \nabla h + \mathbf{F}_{osm}, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t \geq 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_c(\mathbf{X}, t) = -\mathbf{D}_c \nabla c + \mathbf{u} c, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t \geq 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{q}_T(\mathbf{X}, t) = -\lambda \nabla T + \rho_p c_p \mathbf{u} T, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t \geq 0, \quad (8)$$

$$\mathbf{q}_s(\mathbf{X}, t) = -\mathbf{D}_s \nabla s + \alpha_{er} \mathbf{u} s, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t \geq 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{F}_{osm} = \mathbf{K}_c \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t \geq 0, \quad (10)$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = H_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1, \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (11)$$

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = C_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1, \mathbf{q}_c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (12)$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1, \mathbf{q}_T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (13)$$

$$s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1} = S_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_1, \mathbf{q}_s(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (14)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \\ s(\mathbf{X}, 0) = S_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}. \quad (15)$$

Тут  $\rho_p$  – густина порового розчину;  $c(\mathbf{X}, t)$  – концентрація солей в поровому розчині;  $h(\mathbf{X}, t)$  – невідома функція напорів в поровій рідині;  $t$  – час;  $s(\mathbf{X}, t)$  – відносна об'ємна концентрація суфозійних частинок;  $\rho_N$  – густина твердої компоненти солей;  $N(\mathbf{X}, t)$  – масова концентрація солей в твердій компоненті;  $T(\mathbf{X}, t)$  – температура пористого середовища;  $\rho_m$  – густина твердих частинок ґрунту (включаючи водорозчинні та нерозчинні компоненти);  $\mathbf{K}_h(\Phi)$  – коефіцієнт фільтрації, що залежить від вектора факторів впливу  $\Phi = (c, T, s, N)$ ;  $\mathbf{K}_c$ ,  $\mathbf{K}_T$  – коефіцієнти хімічного та термічного осмосу відповідно;  $\sigma$  – пористість ґрунту;  $\mathbf{D}_c$  – коефіцієнт конвективної дифузії хімічного розчину в поровій рідині;  $\mathbf{u}$  – вектор швидкості фільтрації сольового розчину;  $c_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту;  $\lambda$  – коефіцієнт ефективної теплопровідності вологого ґрунту;  $c_p$ ,  $c_N$ ,  $c_s$  – питомі теплоємності порового розчину, твердої компоненти солей та суфозійних частинок відповідно;  $\mathbf{D}_s$  – коефіцієнт дисперсії суфозійних частинок;  $\alpha_{er}$  – коефіцієнт розмиву ґрунту;  $\gamma_1$  – константа швидкості масообміну;  $C_m$  – концентрація граничного насичення;  $\mathbf{q}_c$ ,  $\mathbf{q}_T$ ,  $\mathbf{q}_s$  – вектори потоків розчинених солей, тепла, а також суфозійних частинок відповідно;  $C_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $S_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $h_0(\mathbf{X})$ ,  $C_0(\mathbf{X})$ ,  $T_0(\mathbf{X})$ ,  $S_0(\mathbf{X})$ ,  $N_0(\mathbf{X})$  – задані функції.

Функції  $\frac{\partial \rho_p}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial \rho_p}{\partial c}$  в (1), (2) мають бути відомими. Огляд залежностей

$\rho_p = \rho_p(c, T)$  наведено в [6]. Огляд залежностей коефіцієнта фільтрації  $\mathbf{K}_h$  від концентрації солей та температури наведено в роботі [7]; від концентрації суфозійних частинок – [8]; експеримента-



льні залежності для засолених та загіпсованих ґрунтів від концентрації гіпсу в твердій фазі [7].

**Для відшукання наближеного розв'язку сформованої нелінійної крайової задачі (1)-(15) використовуємо метод скінченних елементів (МСЕ). Наближений узагальнений розв'язок шукаємо у вигляді**

$$(h(\mathbf{X},t);c(\mathbf{X},t);T(\mathbf{X},t);s(\mathbf{X},t);N(\mathbf{X},t)) \approx \left\{ \sum_{j=1}^n a_j^{(k)}(t) \varphi_j(\mathbf{X}) \right\}_{k=1}^5, \quad (16)$$

де  $n$  – кількість вузлів у скінченноелементному покритті замикання  $\bar{\Omega}(t)$  області  $\Omega(t)$ ;  $a_j^{(k)}(t)$ ,  $j = \overline{1,n}$ ,  $k = \overline{1,5}$  – невідомі коефіцієнти, залежні лише від часу;  $\varphi_j(\mathbf{X})$  – поліноміальні базисні функції методу скінченних елементів (МСЕ).

Використовуючи відому процедуру методу скінченних елементів, з урахуванням (16) отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора  $\mathbf{A}(t) = \left\{ \mathbf{A}^{(k)}(t) \right\}_{k=1}^5$ :

$$\sum_{k=1}^5 \mathbf{R}^{(pk)} \cdot \frac{d\mathbf{A}^{(k)}}{dt} + \sum_{k=1}^5 \mathbf{G}^{(pk)}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{F}^{(i)}, \quad p = \overline{1,5}, \quad (17)$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(p)} \cdot \mathbf{A}^{(p)(0)} = \bar{\mathbf{F}}^{(p)}, \quad p = \overline{2,5}, \quad (18)$$

де

$$\mathbf{A}^{(k)}(t) = \left\{ a_i^{(k)}(t) \right\}_{i=1}^n; \quad \mathbf{A}^{(k)(0)} = \mathbf{A}^{(k)}(t) \Big|_{t=0};$$

$$\mathbf{R}^{(pk)} = \left\{ r_{ij}^{(pk)}(t) \right\}_{i,j=1}^n; \quad \mathbf{G}^{(pk)} = \left\{ g_{ij}^{(pk)}(t) \right\}_{i,j=1}^n; \quad \mathbf{F}^{(k)} = \left\{ f_i^{(k)} \right\}_{i=1}^n;$$

$$\bar{\mathbf{R}}^{(k)} = \left\{ \bar{r}_{ij}^{(k)}(t) \right\}_{i,j=1}^n; \quad \bar{\mathbf{F}}^{(k)} = \left\{ \bar{f}_i^{(k)} \right\}_{i=1}^n; \quad r_{ij}^{(11)} = 0;$$

$$r_{ij}^{(12)} = - \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}; \quad r_{ij}^{(13)} = - \int_{\Omega} \sigma \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X},$$

$$r_{ij}^{(14)} = \int_{\Omega} \frac{\rho_p}{\rho_s} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(15)} = \int_{\Omega} \frac{\rho_p}{\rho_N} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X},$$

$$g_{ij}^{(11)} = \int_{\Omega} \rho_p \mathbf{K}_h(\Phi) \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\mathbf{X}, \quad g_{ij}^{(12)} = - \int_{\Omega} \rho_p \mathbf{K}_c \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\mathbf{X},$$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^{(13)} &= -\int_{\Omega} \rho_p \mathbf{K}_T \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(22)} = \int_{\Omega} \sigma \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \\
 r_{ij}^{(23)} &= -\int_{\Omega} \frac{c\sigma}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(25)} = \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\mathbf{X}, \\
 g_{ij}^{(22)} &= \int_{\Omega} \mathbf{D}_c \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\mathbf{X} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \left( 1 - \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial c} \right) \nabla \varphi_j \varphi_i d\mathbf{X}, \\
 g_{ij}^{(23)} &= -\int_{\Omega} \frac{c}{\rho_p} \frac{\partial \rho_p}{\partial T} \mathbf{u} \nabla \varphi_j \varphi_i d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(33)} = \int_{\Omega} c_T \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \\
 r_{ij}^{(34)} &= \int_{\Omega} \rho_s c_s T \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(35)} = \int_{\Omega} \rho_N c_N T \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \\
 g_{ij}^{(33)} &= \int_{\Omega} \lambda \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\mathbf{X} + \int_{\Omega} \rho_p c_p \mathbf{u} \nabla \varphi_j \varphi_i d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(44)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \\
 g_{ij}^{(44)} &= \int_{\Omega} \mathbf{D}_s \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j d\mathbf{X} + \int_{\Omega} \alpha_{er} \mathbf{u} \nabla \varphi_j \varphi_i d\mathbf{X}, \quad r_{ij}^{(55)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \\
 g_{ij}^{(25)} &= -\int_{\Omega} \gamma_1 \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \quad f_i^{(5)} = -\int_{\Omega} \gamma_1 C_m \varphi_i d\mathbf{X}, \\
 \bar{r}_{ij}^{(k)} &= \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\mathbf{X}, \quad k = \overline{2,5}; \quad \bar{f}_i^{(2)} = \int_{\Omega} C_0 \varphi_i d\mathbf{X}, \quad \bar{f}_i^{(3)} = \int_{\Omega} T_0 \varphi_i d\mathbf{X}, \\
 \bar{f}_i^{(4)} &= \int_{\Omega} S_0 \varphi_i d\mathbf{X}, \quad \bar{f}_i^{(5)} = \int_{\Omega} N_0 \varphi_i d\mathbf{X}.
 \end{aligned}$$

Елементи матриць в (17), (18), які не визначені згідно вищевказаних формул, приймаються рівними нулю.

Для знаходження чисельного розв'язку задачі Коші (17), (18) можна використати схему Кранка-Ніколсона або повністю неявну лінеаризовану схему [7].

**В серії проведених числових експериментів** використовувались наступні залежності для коефіцієнтів крайової задачі (1)-(15). Зокрема, коефіцієнт об'ємної теплоємності пористого середовища

$$c_T = \rho_p c_p \sigma + \rho_s c_s s + \rho_N c_N N + \rho_m c_m (1 - \sigma_0),$$

де  $\sigma_0$  – пористість «скелету» пористого середовища (пористість у випадку повної відсутності суфозійних та водорозчинних частинок).



Формула залежності густини – водного розчину NaCl від його концентрації  $c$  (%) та від температури  $T$  ( $^{\circ}C$ ) взята з роботи [6]. Залежність коефіцієнта фільтрації від фізико-механічних та хімічних факторів визначалась за допомогою модифікованої формули Козені-Кармана

$$K_h = k_0(c, T) \cdot \frac{1 + e_0}{1 + e} \left( \frac{e}{e_0} \right)^3,$$

де  $e_0$  – початкове значення коефіцієнта пористості;  $e$  – коефіцієнт пористості ( $e = \frac{\sigma}{1 - \sigma}$ );  $\sigma(\mathbf{X}, t) = \sigma_0 - \frac{N(\mathbf{X}, t)}{\rho_N} - \frac{s(\mathbf{X}, t)}{\rho_s}$ . Залежність  $k_0(c, T)$  апроксимувались згідно методу радіальних базисних функцій (РБФ). Коефіцієнт дисперсії суфозійних частинок  $D_s = \alpha |\mathbf{u}|$ , де  $\alpha$  – деякий коефіцієнт, що встановлюється експериментально.

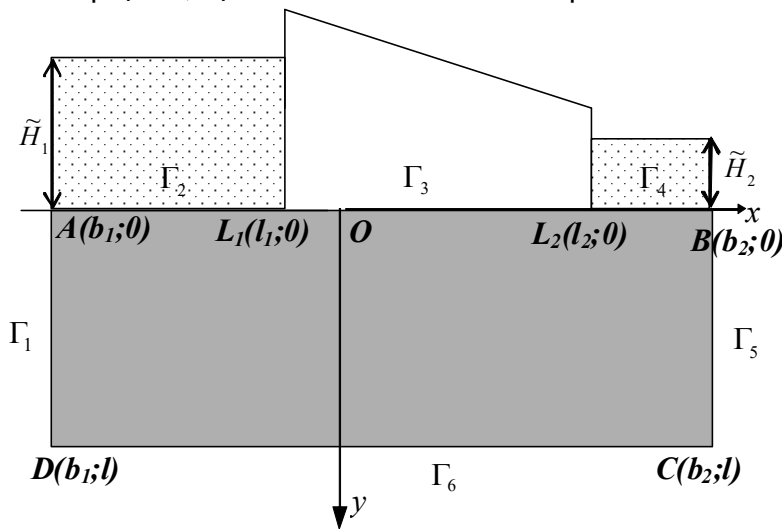


Рис. 1. Область  $\Omega$  процесу фільтрації

В якості модельної задачі з фізичної точки зору розглянуто процес фільтрації в суфозійному ґрунті, де враховуються явища як хімічної, так і механічної суфозії (рис. 1), в якому на межах  $\Gamma_3$  та  $\Gamma_6$  задана умова непроникності, на  $\Gamma_1$  та  $\Gamma_5$  – умова симетричності, а межі  $\Gamma_2$  та  $\Gamma_4$  – дренавані. Концентрації хімічних речовин у верхньому б'єфі дорівнюють 350 г/літр. При цьому враховано сезонні коливання температури від  $T_{max} = 40^{\circ}C$  до  $T_{min} = 4^{\circ}C$  на межі контакту ґрунту

із атмосферою. Розміри області фільтрації прямокутної форми (див. рис. 1)  $b_1 = -20\text{ м}$ ,  $b_2 = 20\text{ м}$ ,  $l = 10\text{ м}$ ,  $l_1 = -10\text{ м}$ ,  $l_2 = 10\text{ м}$ .

Значення решти вхідних даних взято наступними:

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= 0.7; e_0 = \frac{\sigma_0}{1 - \sigma_0}; c_p = 4.128 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}; \rho_s = 2200 \text{ кг/м}^3; \\ c_s &= 0.92 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}; \rho_N = 2170 \text{ кг/м}^3; c_N = 0.8709 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}; \\ \rho_m &= 1500 \text{ кг/м}^3; c_m = 0.8 \text{ кДж/кг} \cdot ^\circ\text{C}; k_c = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}; \\ k_T &= 2.8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/^\circ\text{C} \cdot \text{доба}; D_c = 9.51 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{доба}; \\ \gamma_1 &= 10^{-7} \text{ доба}^{-1}; \lambda = 108 \text{ кДж/м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{доба}; \alpha_{er} = 0.01; \alpha = 0.1 \text{ м}; \\ C_m &= 350 \text{ г/літр}; C_2 = C_{min} = 8 \text{ г/літр}; C_4 = C_{max}; C_0 = C_{min}; \\ H_2 &= 20 \text{ м}; H_4 = 1 \text{ м}; T_0 = T_{min} = 4 \text{ }^\circ\text{C}; N_0 = 120 \text{ кг/м}^3; \\ S_2 &= S_{min} = 1 \text{ кг/м}^3; S_4 = S_{min}; S_0 = 80 \text{ кг/м}^3.\end{aligned}$$

Час, протягом якого досліджувався процес фільтрації, дорівнює 2 роки. Крок по часу –  $\tau = 90$  діб. Задача розв'язана в середовищі FreeFem++, яке являє собою безкоштовне програмне забезпечення для розв'язування крайових задач для диференціальних рівнянь в частинних похідних методом скінченних елементів.

На рис. 2 зображено розподіл різниці напорів у відсотках без урахування та з урахуванням впливу теплосолеперенесення та явищ суфозії на момент часу 720 діб. Як видно, дана різниця напорів лежить в межах від 0,31% до 17,66%. Це говорить про те, що врахування теплових та хімічних факторів впливу, а також явища суфозії (рис. 3) зумовлює відхилення у значеннях напорів з амплітудою близько 17%. Такі коливання напорів обумовлюються урахуванням осмотичних явищ, хімічної та механічної суфозії, а також нелінійною залежністю коефіцієнта фільтрації від концентрації солей, температури та суфозійних частинок. Причому, ці залежності є немонотонними. А тому спрогнозувати вплив фільтраційно-суфозійних процесів та теплосолеперенесення в часі на розподіл напорів неможливо простим аналізом залежностей, а лише на основі математичного моделювання та відповідних чисельних експериментів.

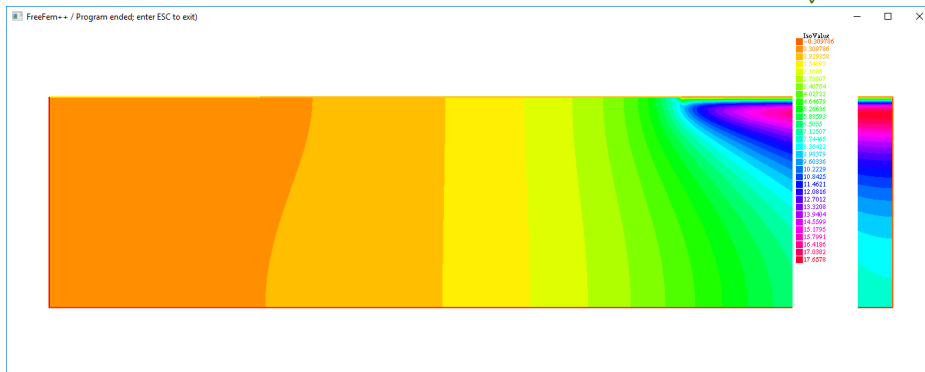


Рис. 2. Відносний розподіл різниці напорів без урахування та з урахуванням впливу теплосолеперенесення та явищ суфозії

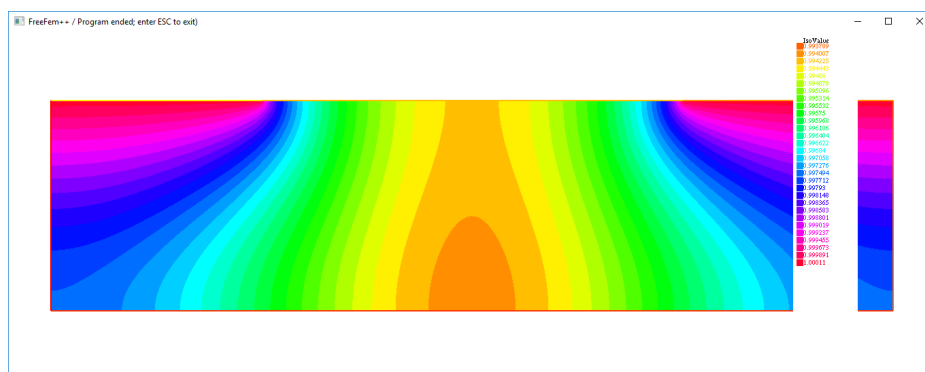


Рис. 3. Розподіл концентрації нерозчинних суфозійних частинок

**В статті чисельно досліджено математичну модель процесу фільтрації в ґрунті в умовах впливу явищ хімічної та механічної суфозії. Числовий розв'язок відповідної нелінійної крайової задачі методом скінченних елементів в двовимірному випадку. Програмну реалізацію сформованих алгоритмів МСЕ здійснено в середовищі FreeFem++. Використовуючи створене програмне забезпечення, проведено серію чисельних експериментів та їх аналіз, основні результати яких наведено на графіках. Показано, що результати чисельних експериментів при дослідженні фільтраційно-суфозійних процесів ґрунту є різними, якщо враховувати та не враховувати вплив теплосолеперенесення та явищ суфозії. Наприклад, відносна амплітуда різниці напорів в області фільтрації складає близько 17%. Напрямки подальшої роботи – якісні дослідження відповідних нелінійних крайових задач та їх наближених розв'язків.**

1. Electric–hydraulic–chemical coupled modeling of solute transport through landfill clay liners / Zhenze Li, Qiang Xue, Takeshi Katsumi, Toru Inui



// Applied Clay Science. – 2014. – Vol. 101. – Pp. 541–552. **2.** Heyang Yuan. Mathematical modeling assisted investigation of forward osmosis as pretreatment for microbial desalination cells to achieve continuous water desalination and wastewater treatment / Heyang Yuan, Ibrahim M. Abu-Reesh, Zhen He // J. of Membrane Science. – 2016. – Vol. 502. – Pp. 116–123. **3.** Carlo Bianco. A 3-dimensional micro- and nanoparticle transport and filtration model (MNM3D) applied to the migration of carbon-based nanomaterials in porous media / Carlo Bianco, Tiziana Tosco, Rajandrea Sethi // J. of Contaminant Hydrology. – 2016. – Vol. 193. – Pp. 10–20. **4.** Colloid release and clogging in porous media: Effects of solution ionic strength and flow velocity / S. Torkzaban, S. A. Bradford, J. L. Vanderzalm, B. M. Patterson, B. Harris, H. Prommer // J. of Contaminant Hydrology. – 2015. – Volume 181. – Pp. 161–171. **5.** Seghir A. Effects of Fine Particles on the Suffusion of Cohesionless Soils. Experiments and Modeling / A. Seghir, A. Benamar, H. Wang // Transp. Porous Med. – 2014. – Vol. 103, Is. 2. – Pp. 233–247. **6.** Герус В. А. Узагальнення рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням впливу фізико-хімічних факторів / В. А. Герус, П. М. Мартинюк // Вісник Харківського нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління. – 2015. – Вип. 27. – С. 41–52. **7.** Мічута О. Р. Математичне моделювання процесів хімічної та контактної суфозії в ґрунтах / О. Р. Мічута, П. М. Мартинюк, В. А. Герус. – Рівне : Вид-во НУВГП, 2016. – 207 с. **8.** Поляков В. Л. Фильтрационные деформации в дренируемых грунтах: теория и приложения / В. Л. Поляков. – Киев : Аграр Медиа Групп, 2014. – 382 с.

Рецензент: д.т.н., професор Турбал Ю. В. (НУВГП)

---

**Herus V. A., Post-graduate Student** (National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

### **COMPUTER MODELING OF MUTUALLY BOUNDED FILTRATION AND SUFFUSION PROCESSES IN HETEROGENEOUS POROUS ENVIRONMENTS**

**The article is numerically investigated mathematical model of filtration in the soil under the influence of chemical and mechanical phenomena suffusion. The numerical solution of nonlinear boundary value problem corresponding finite element method in two-dimensional case is offered. Software implementation of existing FEM algorithms implemented in the environment FreeFem++. Using software established series of numerical experiments and analysis, the main results of which are shown in the graphs. It is shown that the**



results of numerical experiments in the study of filtration and suffusion of soil processes are different if to consider and do not consider the impact of heat and salt transferring and suffusion phenomena. For example, the relative amplitude of difference in the filtration pressures of about 17%. The areas for further work – is quality researches of relevant nonlinear boundary problems and their approximate solutions.

**Keywords:** suffusion, filtering, mathematical model, finite element method.

---

**Герус В. А., аспирант** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

### **КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ ФИЛЬТРАЦИОННО-СУФФОЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В ГЕТЕРОГЕННЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

Сформулирована математическая модель взаимосвязанных процессов фильтрации, химической и механической суффозии в грунтах. Численное решение соответствующей нелинейной краевой задачи для системы параболических уравнений найдено методом конечных элементов. Программную реализацию предложенных конечноэлементных схем реализовано с помощью FreeFem++. На примере модельного численного эксперимента показана возможность значительного влияния суффозии на значение напоров в грунте.

**Ключевые слова:** суффозия, фильтрация, математическая модель, метод конечных элементов

---