УДК 532.5:519.63

Барановський С.В., к.т.н., доц. (Рівненський державний гуманітарний університет), **Щодро О.Є., к.т.н., доц.** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ПОБУДОВА ПЛАНОВОЇ КАРТИНИ ТЕЧІЇ ТА ПРОСТОРОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ РУСЛА БІЛЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ МОСТОВОЇ ОПОРИ

В роботі розроблено алгоритм побудови планової картини течії на основі методу конформних відображень та просторових деформацій русла поблизу циліндричної мостової опори на основі дифузійної теорії розмиву.

В работе разработан алгоритм построения плановой картины течений на основе метода конформных отображений и пространственных деформаций русла вблизи цилиндрической мостовой опоры на основе диффузионной теории размыва.

Algorithm of the plane flume picture evaluation is proposed with the aid of conformal mapping theory. Algorithm of river-bed deformations near the cylindrical bridge abutment also was proposed using the diffusion conception of scour development.

Метою роботи є розробка алгоритму та програми для побудови трьохвимірного зображення деформованого дна русла поблизу циліндричної мостової опори з урахуванням реальної форми зони відриву.

Об'єктом досліджень є процес деформації річкового русла, пов'язаний з гідравлічною структурою потоку в ньому.

Предметом досліджень є вплив реальної геометрії русла на кінематичну структуру та розмивну спроможність потоку.

В роботі розглядалася задача математичного моделювання процесу деформації русла поблизу циліндричної мостової опори з врахуванням відриву потоку за спорудою.

Розглянемо відривне обтікання кругового циліндра (рис. 1). Для розрахунку характеристик потоку використаємо метод Леві-Чівіти [1].

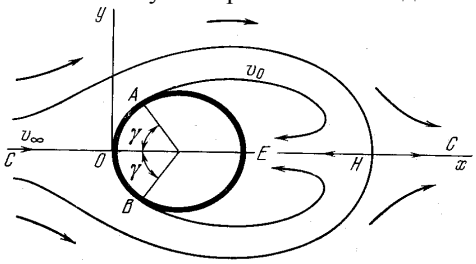


Рис. 1.

В якості області зміни параметричної змінної ξ виберемо півкруг одиничного радіусу. Відобразимо область течії у фізичній площині $z = x + iy$ на внутрішність півкола таким чином, щоб омиваюча поверхня AOB перейшла в дугу кола $\xi = e^{i\sigma}\left(0 \le \sigma \le \pi\right)$, а границі застійної області – в діаметр півкола. Критичній точці O в цьому випадку буде відповідати точка $\xi = i$, а нескінченно віддаленій точці E струмини – точка $\xi = 0$. Критична точка H в середині рідини і нескінченно віддалена точка C основного потоку при такому відображенні перейдуть в точки ih, ic відповідно, причому $0 < y < c$. Область зміни комплексного потенціалу ω є площиною з горизонтальним розрізом скінченої довжини. Тому в параметричній області похідна комплексного потенціалу має полюс другого порядку в точці $u = ih$, $\pm 1, \pm i$.

Розглянемо функцію $\xi d\omega / d\xi$. Вона приймає на діаметрі дійсні, а на колі $u = e^{i\sigma}$ – чисто уявні значення. Тому її можна за принципом симетрії продовжити на всю площину, причому характер нулів і особливостей в симетричних відносно діаметру і кола точках зберігається. Побудуємо за нулями і особливостями функцію $d\omega / d\xi$:

$$\frac{d\omega}{d\xi} = Nv_0 \frac{\left(\xi^4 - 1\right)\left(\xi^2 + h^2\right)\left(h^2\xi^2 + 1\right)}{\xi\left(\xi^2 + c^2\right)^2\left(c^2\xi^2 + 1\right)^2}, \tag{1}$$

де постійний множник вибраний для зручності у вигляді Nv_0.

Знайдемо комплексну швидкість для пластинки ($\frac{d\omega}{dz}$), яка має наступні властивості: в критичних точках $\xi = ih$ та $\xi = i$ вона має прості нулі, на діаметрі зберігає постійне значення v_0 її модуль, а на дузі півкола приймає частково постійне значення аргументу. В силу принципу симетрії, в симетричній відносно кола точці $\xi = \frac{i}{h}$ функція $\frac{d\omega}{d\xi}$ має простий нуль, в симетричних відносно діаметра точках $-ih$, $-\frac{i}{h}$, $-i$ прості полюси. Знаючи всі полюси і нулі, а також значення функції в одній точці, можемо побудувати саму функцію

$$\frac{d\omega}{dz} = v_0 \frac{(\xi - ih)(h\xi - i)(\xi - i)}{(\xi + ih)(h\xi + i)(\xi + i)} e^{F(\xi)}, \tag{2}$$

де
$$F(\xi) = iA_1\xi - \frac{iA_3}{3}\xi^3 + \frac{iA_5}{5}\xi^5 - \ldots, \tag{3}$$

причому $A_1, A_3, \ldots$ дійсні сталі. Функція $F(\xi)$ містить тільки непарні степені ξ. Очевидно, що визначена формулою (2) функція $\frac{d\omega}{dz}$ має на вільній поверхні модуль рівний v_0, але при $F(\xi) \neq 0$ контур вже буде криволінійним.

Із формул (1) і (2) знайдемо:

$$\frac{dz}{d\xi} = N \frac{(\xi^2 - 1)(\xi + ih)^2 (h\xi + i)^2 (\xi + i)^2}{\xi(\xi^2 + c)^2 (c^2\xi^2 + 1)^2} e^{-F(\xi)}, \tag{4}$$

причому будемо вимагати, щоб функція $z(\xi)$ після обходу навколо точки $\xi = ic$ поверталась в початкове значення. Вказану умову можна звести до рівняння [1]

$$i\left\{\frac{d}{d\xi}\left[\ln\frac{dz}{Nd\xi}(\xi - ic^2)\right]\right\}_{\xi=ic} = \frac{2}{1-c^2} + \frac{2h}{1+hc} - \frac{2h}{c(c+h)} + A_1 + A_3c^2 + A_5c^4 + \ldots = 0 \cdot \tag{5}$$

Визначимо всі сталі, які входять у формули (1)–(4). Величина N є масштабним коефіцієнтом і її задання рівносильне заданню радіуса циліндра R. Рівняння (5) дозволяє визначити один параметр, наприклад h. Ще один параметр, наприклад c, можна визначити, задаючи число $Q = \left(\frac{v_\infty}{v_0}\right)^2 - 1$. Для цього знайдемо відношення $\frac{v_\infty}{v_0}$. Поклавши $\xi = ic$, отримаємо:

$$\frac{v_\infty}{v_0} = \frac{(c-h)(1-hc)(1-c)}{(c+h)(1+ch)(1+c)} \exp\left(-A_1c - \frac{A_3c^3}{3} - \frac{A_5c^5}{5} - \ldots\right). \tag{6}$$

Для знаходження коефіцієнтів $A_1, A_3, A_5, \ldots$ покладемо наближено, що коефіцієнти A_{2m+1}, починаючи з номера 7, дорівнюють нулю. Для визначення відмінних від нуля коефіцієнтів прирівняємо кривизну у від-

повідній кількості окремих довільно вибраних точок контуру величині – $\frac{1}{R}$.

Крім того, до цих умов приєднаємо умови, які полягають в тому, що кривизна струмини в точці її сходження з циліндра повинна бути скінченою і рівною кривизні циліндра. Така умова призводить до співвідношення [1]

$$\frac{4h}{h^2+1}+1+A_1-A_3+A_5-...=0\,. \tag{7}$$

Тепер знайдемо кривизну циліндра. Розглянемо тільки верхню половину течії, враховуючи її симетрію відносно осі x. На верхній половині циліндра $OA(\pi/2\le\sigma\le\pi)$ кут вектора швидкості c віссю x рівний

$$\theta=\frac{\pi}{2}-A_1\cos\sigma+\frac{A_3}{3}\cos 3\sigma-\frac{A_5}{5}\cos 5\sigma+...$$

Визначимо диференціал довжини дуги на контурі:

$$ds=\left|(dz)_{\xi=e^{i\sigma}}\right|=N\frac{8\,sin\,\sigma\,cos^2(\sigma/2-\pi/4)(h^2+2h\,sin\,\sigma+1)^2}{(c^4+2c^2\,cos\,2\sigma+1)^2}\times$$
$$\times exp\left(A_1\,sin\,\sigma-\frac{A_3}{3}sin\,3\sigma+\frac{A_5}{5}sin\,5\sigma-...\right)d\sigma. \tag{8}$$

Звідси й із (8), позначуючи через $R>0$ радіус кривизни контуру, отримаємо для дуги OA:

$$\frac{1}{R}=-\frac{d\theta}{ds}=-\frac{(A_1\,sin\,\sigma-A_3\,sin\,3\sigma+A_5\,sin\,5\sigma-...)(c^4+2c^2\,cos\,2\sigma+1)^2}{8N\,sin\,\sigma\,cos^2(\sigma/2-\pi/4)(h^2+2h\,sin\,\sigma+1)^2}\times$$
$$\times exp\left(-A_1\,sin\,\sigma+\frac{A_3}{3}sin\,3\sigma-...\right). \tag{9}$$

При $\sigma=\pi/2$

$$\left(\frac{N}{R}\right)_{\pi/2}=-\frac{(A_1+A_3+A_5+...)(1-c^2)^4\exp\left(-A_1-\frac{A_3}{3}-\frac{A_5}{5}-...\right)}{8(1+h)^4}\,. \tag{10}$$

При $\sigma=\pi$

$$\left(\frac{N}{R}\right)_{\pi} = -\frac{\left(A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \ldots\right)\left(1+c^2\right)^4}{4\left(1+h^2\right)^2}. \qquad (11)$$

При $\sigma = 3\pi / 4$

$$\left(\frac{N}{R}\right)_{3\pi/4} = -\frac{\left(A_1 - A_3 - A_5 + \ldots\right)\left(1+c^4\right)^2 \exp\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(A_1 - \frac{A_3}{3} - \frac{A_5}{5} + \ldots\right)\right]}{2\left(2+\sqrt{2}\right)\left(h^2+\sqrt{2}h+1\right)^2}. \qquad (12)$$

Для моделювання процесу деформації русла, що виникає в результаті відриву і осідання частинок дна під впливом турбулентного потоку, будемо вважати, що такий відрив, перенесення і осідання здійснюється внаслідок дифузії частинок ґрунту у рідину. Для опису процесу дифузії наносів будемо використовувати відому дифузійну теорію Маккавеєва перенесення частинок турбулентним потоком. Така модель була запропонована для випадку незмінної в часі поверхні дна. Використання її для моделювання деформації русла призводить до необхідності розгляду відповідних задач в областях з вільними ділянками границь [2, 3].

Важливим питанням при використанні такої моделі є визначення кінематичних характеристик турбулентного водного потоку, що є окремою, достатньо складною задачею. Часткове вирішення цього питання можливе шляхом заміни реального турбулентного потоку ідеалізованим потенційним випадком руху рідини. Проте така заміна в багатьох практичних задачах виявляється достатньо “грубим” наближенням, оскільки вона не враховує, зокрема явище відриву потоку при обтіканні ним різного типу перешкод.

Розглянемо процес обтікання водним потоком циліндричної мостової опори. Для задання розподілу компонент швидкості потоку по вертикалі будемо використовувати залежність показникового вигляду, яка з урахуванням впливу зміни положення поверхні дна ($z=l(x,y,t)$), представлятиметься у вигляді:

$$u(x,y,z,t) = \frac{u_0(x,y)l_0}{(1+\alpha)^m l(x,y,t)}\left(\frac{l(x,y,t)-z}{l(x,y,t)}+\alpha\right)^m;$$

$$v(x,y,z,t) = \frac{v_0(x,y)l_0}{(1+\alpha)^m l(x,y,t)}\left(\frac{l(x,y,t)-z}{l(x,y,t)}+\alpha\right)^m;$$

$$w(x,y,z,t) = \frac{l_0\left(l'_x(x,y,t)u_0(x,y)+l'_y(x,y,t)v_0(x,y)\right)}{(1+\alpha)^m l^2(x,y,t)}\left(\frac{l(x,y,t)-z}{l(x,y,t)}+\alpha\right)^m, \qquad (13)$$

де m – показник параболи;

α – досить мале число, яке введено для того, щоб забезпечити ненульові значення компонент швидкості на поверхні рідини;

u_0, v_0 – компоненти вектора швидкості потоку на поверхні рідини.

Як перше наближення компоненти швидкості потоку на поверхні рідини u_0, v_0 можна задавати, як у випадку обтікання циліндричної перешкоди потенційним потоком. З метою врахування зони відриву потоку за спорудою замінимо обтікання потенційним потоком циліндричної перешкоди відповідним обтіканням деякого профілю Жуковського (рис. 2).

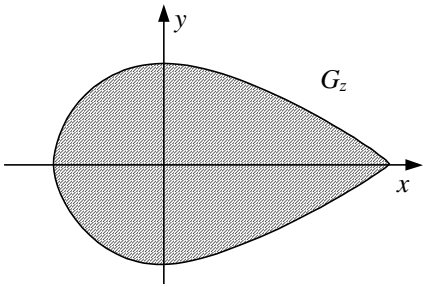


Рис. 2. Фізична область G_z

Розрахунок обтікання потенційним потоком цього профілю здійснимо методом конформних відображень. Відобразимо площину з вирізом $G_\omega=\{\omega=\varphi+i\psi$: $-\infty<\varphi<+\infty$, $-\infty<\psi<+\infty\}\backslash\{\omega=\varphi+i\psi$: $-R<\varphi<+R$, $\psi=0\}$ на зовнішність відомого профілю Жуковського при відповідності $-R\to-2v_\infty R$, $R\to 2v_\infty R$, $\infty\to\infty$. Таке відображення реалізується функцією

$$z=\frac{v_\infty}{2}\left(w+\sqrt{w-4v_\infty^2R^2}+\frac{R_0^2}{w+\sqrt{w-4v_\infty^2R^2}}\right). \tag{14}$$

Виділивши дійсну і уявну частини, отримаємо:

$$x(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}\left(X_1+R_0-R\right)\left(1+\frac{R_0^2}{\left(X_1+R_0-R\right)^2+Y_1^2}\right), \tag{15}$$

$$y(\varphi,\psi)=\frac{Y_1}{2}\left(1+\frac{R_0^2}{\left(X_1+R_0-R\right)^2+Y_1^2}\right), \tag{16}$$

де $$Y_1 = \frac{\psi + Y_2}{2v_\infty},\ X_1 = \frac{\varphi + X_2}{2v_\infty},$$

$$X_2 = \frac{X_3}{2Y_2},\ Y_2 = \sqrt{\frac{-X_3 \pm \sqrt{X_3^2 + Y_3^2}}{2}},$$

$$X_3 = \varphi^2 - \psi^2 - 4R^2 v_\infty^2,\quad Y_3 = 2\varphi\psi.$$

u_∞ – значення швидкості ідеального горизонтального потоку в при $\omega \to \infty$.

Використовуючи (14), знаходимо вирази для компонент швидкості функцій u_0, v_0, які після виділення дійсної і уявної частини приймають вигляд:

$$u_0 = \frac{u_1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}},\ v_0 = \frac{v_1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2}}, \tag{17}$$

$$u_1 = v_\infty \left(1 - \frac{R^2\left(X_1^2 - Y_1^2\right)}{\left(X_1^2 + Y_1^2\right)}\right),\ v_1 = \frac{v_\infty R^2 X_1 Y_1}{X_1^2 + Y_1^2},$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\left(1 - R_0^2 \frac{(X_1 + R_0 - R)^2 - Y_1^2}{\left((X_1 + R_0 - R)^2 + Y_1^2\right)^2}\right),$$

$$v_2 = R_0^2 \frac{(X_1 + R_0 - R)Y_1}{\left((X_1 + R_0 - R)^2 + Y_1^2\right)^2}.$$

Вважатимемо, що відрив та вертикальний підйом частинок ґрунту під впливом водного потоку здійснюється за рахунок їх дифузії у рідину з деяким фіктивним «коефіцієнтом», змулені ж частинки переносяться потоком конвективно. Причому розглядатимемо випадок настільки дрібних наносів, щоб можна було знехтувати їх впливом на кінематичні та турбулентні характеристики водного потоку, та вважатимемо, що вони рухаються в потоці так само, як і частинки рідини.

Перейшовши від фізичної області руху рідини до відповідної області G_* змінних (φ,ψ,z,t), $G_*=\{(\varphi,\psi,z,t)$: $-\infty<\varphi<+\infty$, $0<\psi<+\infty$, $0<z<l(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),\ t)$, $t>0\}\backslash\{(\varphi,\psi,z,t)$: $-R<\varphi<+R$, $\psi=0$, $0<z<l(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),t)$, $t>0\}$, процес конвективної дифузії частинок ґрунту в рідини будемо описувати наступною модельною задачею [2, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D(V(\varphi,\psi,z,l(\varphi,\psi,t)))\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\left(u_0^2(\varphi,\psi)+v_0^2(\varphi,\psi)\right)l_0}{(1+\alpha)^m l(\varphi,\psi,t)}\left(\frac{l(\varphi,\psi,t)-z}{l(\varphi,\psi,t)}+\alpha\right)^m\frac{\partial c}{\partial\varphi}- \quad (18)$$

$$-\left(w(\varphi,\psi,z,l(\varphi,\psi,t))+w_0\right)\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{\partial c}{\partial t};$$

$$c(\varphi,\psi,z,t)\Big|_{z=0}=0, \qquad c(\varphi,\psi,z,t)\Big|_{z=l(\varphi,\psi,t)}=c_*,$$

$$\frac{\partial c(\varphi,\psi,z,t)}{\partial\psi}\Big|_{\psi=0}=0; \quad (19)$$

$$c(\varphi,\psi,z,0)=\bar{c}(\varphi,\psi,z);\ l(\varphi,\psi,0)=l_0; \quad (20)$$

$$\left(D(V(\varphi,\psi,z,l(\varphi,\psi,t)))\frac{\partial c}{\partial n}-\left(V_n(\varphi,\psi,z,l(\varphi,\psi,t))+w_{0n}\right)c\right)\Big|_{z=l(\varphi,\psi,t)}=c_*\frac{dl}{dt}, \quad (21)$$

де $c(x(\varphi,\psi),y(\varphi,\psi),z,t)$ – концентрація наносів в точці (x,y,z) в момент часу t, c_* – концентрація наносів на поверхні дна, $D(V(\varphi,\psi,z,l(\varphi,\psi,t)))$ – “фіктивний” коефіцієнт дифузії, l_0 – початкове положення поверхні дна, $\vec{V}_n(\varphi,\psi,z,l(\varphi,\psi,t))$ – нормальна до поверхні дна складова вектора швидкості, w_0 – швидкість осідання частинок ґрунту в стоячій воді. Умова (21) пов’язує потік донних частинок ґрунту через вільну ділянку границі $l(\varphi,\psi,t)$ та швидкість зміни положення поверхні дна.

Концентрацію наносів у початковий момент часу (відповідно до дифузійної теорії змулення дрібних частинок) задаватимемо у вигляді:

$$\bar{c}(\varphi,\psi,z)=c_*e^{-\frac{\gamma(l_0-z)}{\varepsilon}}, \quad (22)$$

а коефіцієнт *D* прийматимемо згідно гіпотези Маккавеєва про коефіцієнт турбулентного обміну пропорційним деякій степені швидкості потоку:

$$D=\chi\lambda^{\mu V+\beta\frac{\partial V}{\partial\varphi}}. \quad (23)$$

Тут χ, λ, μ, β – деякі числа (параметри).

Ввівши нові змінні *s, h, r*,

$$s=\varphi, h=\psi, r=\frac{l_0 z}{l(\varphi,\psi,t)}, \quad (24)$$

перепишемо рівняння (18)-(20) та рівності (11)-(13) відповідно у вигляді:

$$\frac{l_0^2}{l^2(s,h,t)}\frac{\partial}{\partial r}\left(D(V(s,h,r,l(s,h,t)))\frac{\partial c}{\partial r}\right)-\frac{\left(u_0^2(s,h)+v_0^2(s,h)\right)l_0}{(1+\alpha)^m l(s,h,t)}\left(\frac{l_0-r}{l_0}+\alpha\right)^m\frac{\partial c}{\partial s}-$$

$$-\frac{l_0 w_0}{l(s,h,t)}\frac{\partial c}{\partial r}=\frac{\partial c}{\partial t} \qquad (25)$$

$$c(s,h,r,t)\Big|_{r=0}=c_* e^{-\gamma_0}\approx 0,\ c(s,h,r,t)\Big|_{r=l_0}=c_*,\ \frac{\partial c(s,h,r,t)}{\partial h}\Big|_{h=0}=0; \qquad (26)$$

$$c(s,h,r,0)=\overline{c}(s,h,r); \qquad (27)$$

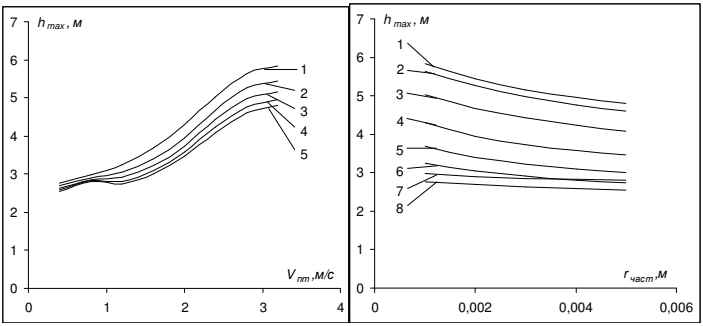
$$u(s,h,r,t)=\frac{u_0(s,h)}{(1+\alpha)^m}\left(\frac{l_0-r}{l_0}+\alpha\right)^m\frac{l_0}{l(s,h,t)}; \qquad (28)$$

$$v(s,h,r,t)=\frac{v_0(s,h)}{(1+\alpha)^m}\left(\frac{l_0-r}{l_0}+\alpha\right)^m\frac{l_0}{l(s,h,t)}; \qquad (29)$$

$$w(s,h,r,t)=\frac{l_0\left(u_0^2(s,h)+v_0^2(s,h)\right)l_s'(s,h,t)}{(1+\alpha)^m l^2(s,h,t)}\left(\frac{l_0-r}{l_0}+\alpha\right)^m.$$

Розв’язок задачі (25)-(27) шукався наближено методом скінченних різниць.

На рис. 3*а* зображені графіки залежності прогнозованої глибини воронки розмиву від швидкості набігаючого потоку та від діаметрів частинок однорідного ґрунту при $R_{опори}=1$ *м*, глибині набігаючого потоку *H*=1 *м*. На рис. 3*б* зображені графіки залежності прогнозованої глибини воронки розмиву від діаметру частинок ґрунту при аналогічних вихідних умовах. Аналіз наведених тут залежностей вказує на відповідність їх характеру даним натурних спостережень, а це, в свою чергу, дозволяє зробити висновок про адекватність побудованої математичної моделі фізичному процесу.



а) *б)*

Рис. 3. Графіки залежності глибини воронки розмиву поблизу циліндричної мостової опори а) від швидкості набігаючого потоку u_∞: 1 – d=1*мм*; 2 – d=2*мм*; 3 – d=3*мм*; 4 – d=4*мм*; 5 – d=5*мм*. б) від діаметра частинок: 1 – u_∞=4,0*м/с*; 2 – u_∞=3,5*м/с*; 3 – u_∞=3,0*м/с*; 4 – u_∞=2,5*м/с*; 5 – u_∞=2,0*м/с*; 6 – u_∞=1,5*м/с*; 7 – u_∞=1,0*м/с*; 8 – u_∞=0,5*м/с*

На рис. 4 зображено розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу циліндричної опори при таких вихідних даних: швидкість набігаючого потоку – u_∞ =1,5*м/с*; радіус опори – R=1 *м*; ґрунт приймався однорідним з діаметром частинок 1 *мм*. Аналіз розрахункової форми воронки розмиву вказує на відповідність отриманої конфігурації поверхні дна результатам натурних та експериментальних спостережень: максимальна глибина розмиву розміщена перед опорою, а за нею – зона активного відкладення наносів.

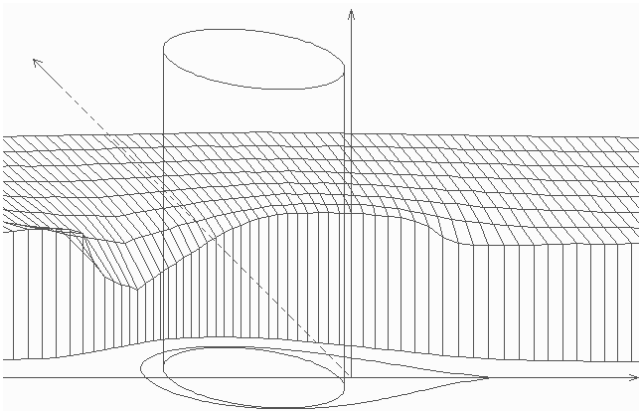


Рис. 4. Розрахункова конфігурація поверхні дна поблизу циліндричної перешкоди (мостової опори): u_∞=1,5 *м/с*, R=1 *м*, H=1 *м*; ґрунт – однорідний, з діаметром частинок 1 *мм*

Зауважимо, що використання запропонованої вище методики математичного моделювання процесу деформації дна русла дозволяє не лише проводити розрахунок параметрів розмиву, але й прослідкувати їх розвиток в часі та оцінити швидкість розмиву, що в більшості випадків неможливо при застосуванні емпіричних залежностей.

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной несжимаемой жидкости. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука. Главная редакция физико математической литературы, 1979. – 536 с. **2.** Барановський С. В. Про один підхід до моделювання тривимірного процесу деформації дна під впливом турбулентного потоку // Актуальні проблеми водного господарства. – Рівне : УДАВГ, 1997. – Том 1. – С. 7-10 **3.** Барановський С. В., Бомба А. Я. Про асимптотичне наближення розв'язків одного класу нелінійних задач конвективної дифузії в областях із вільними межами та проблеми моделювання розмивів // Волинський математичний вісник. – 1998. **–** №5. – С. 15-20.

Рецензент: д.т.н., професор Хлапук М.М. (НУВГП)