

## ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МЕТРОЛОГІЇ, ВИМІРЮВАЛЬНОЇ ТЕХНІКИ І ТЕХНОЛОГІЙ

УДК 621. 317. 12

### ФАЗОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ ПРИ МНОЖЕННІ ЧАСТОТИ СИГНАЛІВ

**В.Я. Суп'ян, А.В. Рудик, І.В. Барановський**

Вінницький державний технічний університет

В різноманітних радіотехнічних та вимірювальних пристроях здійснюється багатократне множення частоти з коефіцієнтом множення, що досягає декількох десятків або навіть сотень. До таких пристроїв відносять, наприклад, деякі типи стандартів частоти, фазові системи різного призначення тощо. Як показали експериментальні дослідження, в таких пристроях при множенні частоти високостабільних за частотою сигналів вихідні сигнали мають паразитні фазову та амплітудну модуляції. Паразитна фазова модуляція при множенні в стандартах частоти призводить до зменшення відносної стабільності частоти, а в фазових системах – до зменшення точності вимірювання фази сигналів.

#### Фазові співвідношення в першому каскаді помножувача частоти

В першому каскаді помножувача частоти (поклавши тривалість імпульсів струму малою по відношенню до періоду) для спрощення аналізу форму імпульсів будемо вважати прямокутною (рис.1а). Перехід від прямокутної форми до синусої (рис.1б) не впливає на характер зміни напруги на контурі в інтервалах між імпульсами, а може вплинути тільки на енергетичний режим нелінійного елемента, який ми не розглядаємо. Припустивши, що навантаженням помножувача частоти є паралельний резонансний контур, опір якого в операторній формі дорівнює

$Z(p) = \frac{P}{C(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)}$ , стаціонарна напруга на контурі визначається з [1] таким співвідношенням:

$$U_{cm}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{I_m(1 - e^{-p\tau})e^{pt}}{C(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} dp - \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{I_m(1 - e^{-pT})e^{pt}}{C(1 - e^{-pT})(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} dp. \quad (1)$$

Тому що дія імпульсу обмежена інтервалом часу  $0 < t < \tau$ , рівняння (1) розпадається на два рівняння для інтервалів часу  $0 < t < \tau$  та  $\tau < t < T$ :

(2)

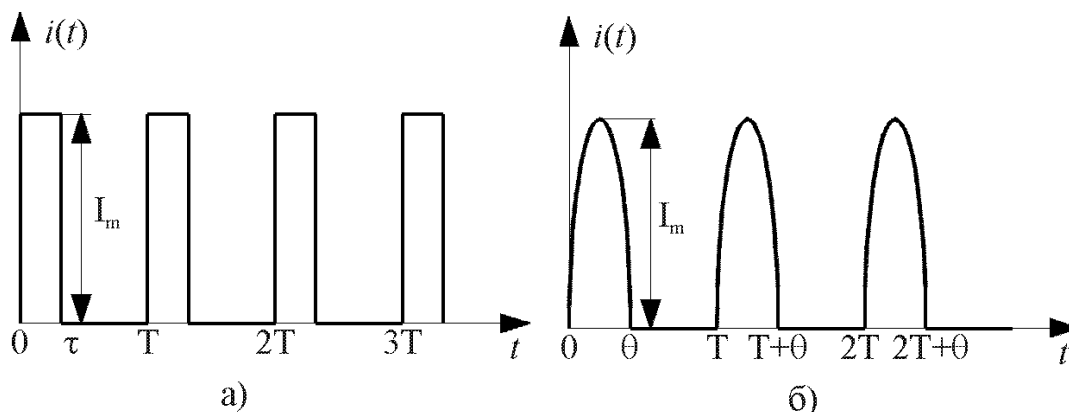


Рис.1. Послідовність прямокутних (а) та синусоїдних (б) імпульсів

(3)

Використовуючи теорему про лишки, отримаємо стаціонарні напруги в проміжках дії імпульсів та в паузах:

$$U_{cm}(0 < t < \tau) = \frac{I_m}{\omega_0 C} e^{-\alpha t} \left( \sin \omega_0 t - \frac{1 - e^{-p_1 \tau}}{1 - e^{-p_1 T}} e^{j\omega_0 t} + \frac{1 - e^{-p_2 \tau}}{1 - e^{-p_2 T}} e^{-j\omega_0 t} \right);$$

$$U_{cm}(\tau < t < T) = \frac{I_m}{\omega_0 C} e^{-\alpha t} \left( \sin \omega_0 t - e^{\alpha \tau} \sin \omega_0(t - \tau) - \frac{1 - e^{-p_1 \tau}}{1 - e^{-p_1 T}} e^{j\omega_0 t} + \frac{1 - e^{-p_2 \tau}}{1 - e^{-p_2 T}} e^{-j\omega_0 t} \right) \quad (4)$$

де  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  – власна частота коливального контура помножувача частоти;  $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$

– полюси підінтегральної функції;  $\alpha = \omega_0/2Q$  – коефіцієнт загасання контура; L, C та Q – відповідно, індуктивність, ємність та добротність паралельного коливального контура.

Отримані співвідношення (4) визначають усталену напругу у вигляді вільних коливань з власною частотою контура  $\omega_0$ . Послідовні цикли вільних коливань утворюють періодичний процес, основна частота якого дорівнює частоті повторення вхідних імпульсів. Тільки при точному налаштуванні контура на частоту однієї з гармонік струму нелінійного елемента період вільних коливань збігається з періодом від-повідної гармоніки. В цьому найбільш важливому випадку співвідношення (2)-(4) значно спрощуються. Дійсно, при  $\omega_0 = 2\pi n/T$  справедливі такі

співвідношення:  $p_{1,2}T = -\pi nd \pm j2\pi n$ ;  $p_{1,2}\tau = -\frac{\pi nd\tau}{T} \pm j\omega_0\tau$ , де  $d = \frac{1}{Q} = \frac{2\alpha}{\omega_0}$  – загасання коливального контура. Тому співвідношення (4) можна переписати таким чином:

$$U_{cm}(0 < t < \tau) = \frac{I_m e^{-\alpha t}}{\omega_0 C (1 - e^{-\pi nd})} \left( \sin \omega_0 t - e^{-\pi nd \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)} \sin \omega_0(t - \tau) \right);$$

$$U_{cm}(\tau < t < T) = \frac{I_m e^{-\alpha t}}{\omega_0 C (1 - e^{-\pi nd})} \left( \sin \omega_0 t - e^{-\pi nd \frac{\tau}{T}} \sin \omega_0(t - \tau) \right) \quad (5)$$

З співвідношень (5) легко знайти оптимальну тривалість імпульсів, при якій амплітуда вихідної напруги помножувача найбільша. Максимум  $U_{cm}(t)$  буде при збігові фаз складових  $\sin \omega_0 t$  та  $-\sin \omega_0(t - \tau)$ , тобто при  $\omega_0 \tau = (2k - 1)\pi$ , де  $k = 1, 2, \dots, n$ . При виконанні останньої умови оптимальні тривалість та шпаруватість вхідних імпульсів будуть визначатися такими співвідношеннями:

$$\tau_{onm} = \frac{T}{2n} (2k - 1);$$

$$\frac{T}{\tau_{onm}} = q_{onm} = \frac{2n}{2k - 1}. \quad (6)$$

Співвідношення (6) збігається з умовою отримання максимуму коефіцієнта  $n$ -ої гармоніки при прямокутній формі імпульсів [2], а також з умовою відсутності фазової модуляції (стрибка фази) у вихідній напрузі на межі ділянок дії імпульсу та паузи. Таким чином, при  $k=1$  та  $\tau_{onm} = \frac{T}{2n}$

з співвідношень (5) та (6) отримаємо:

$$\begin{aligned}
 U_{cm}(0 < t < \tau) &= \frac{I_m \left( 1 - e^{-\pi n d \left( 1 - \frac{\tau}{T} \right)} \right)}{\omega_0 C (1 - e^{-\pi n d})} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t; \\
 U_{cm}(\tau < t < T) &= \frac{I_m \left( 1 - e^{-\pi n d \frac{\tau}{T}} \right)}{\omega_0 C (1 - e^{-\pi n d})} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Суттєво спростити знаходження умов відсутності фазової модуляції (стрибків фази) на межі дії імпульсу та паузи можна при виключенні з розгляду на цих інтервалах відгуків від попередніх імпульсів, що діяли на інтервалах часу  $-T < t < 0$ ,  $-2T < t < -T$ , ...,  $-(m+1)T < t < -mT$ . Тоді співвідношення (2) та (3) можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned}
 U_{cm}(0 < t < T) &= U_{cm}(0 < t < \tau) - U_{cm}(\tau < t < T) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{I_m e^{p(t-\tau)}}{C(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2)} dp = \\
 &= \frac{I_m}{\omega_0 C} e^{\alpha \tau} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 (t - \tau).
 \end{aligned} \tag{8}$$

З співвідношення (8) видно, що відсутності стрибків фази на межі інтервалів можна досягти при  $\omega_0 \tau = (2k - 1)\pi$ , що збігається з умовою (6). Для того, щоб відносно зменшення амплітуди до кінця періоду  $T$  було не більше 5%, добротність контура повинна задовольняти нерівності  $\pi n d \leq 0.05$  або  $Q \geq 20n\pi$ . При виконанні цього припущення можна співвідношення (7) замінити одним співвідношенням, що буде справедливим для всього інтервалу часу  $0 < t < T$ :

$$U_{ct}(0 < t < T) = \frac{2I_m \rho Q}{\pi n} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t, \tag{9}$$

де  $\rho = \frac{1}{\omega_0 C}$  - характеристичний опір резонансного контура.

Якщо  $\tau = \frac{T}{2n}$ , співвідношення (9) можна переписати таким чином:

$$U_{cm}(0 < t < T) = I_n Z_{e.p.} e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t, \tag{10}$$

де  $Z_{e.p.} = \rho Q$  - резонансний опір контура для  $n$ -ої гармоніки струму;  $I_n = \frac{2I_m}{\pi n}$  - амплітуда

$n$ -ої гармоніки струму. За межами інтервалу  $0 < t < T$  напруга  $U_{cm}(t)$  повинна бути продовжена періодично.

#### Фазові співвідношення в $N$ -ому каскаді помножувача частоти

В  $N$ -ому каскаді помножувача частоти імпульси струму  $i(t)$  модульовані як за тривалістю, так і за амплітудою (рис.2). В загальному випадку центри симетрії імпульсів повторюються з інтервалом  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , де  $\omega_0$  - частота сигналу на виході  $(N-1)$ -го каскаду помножувача.

Відносно центра симетрії імпульси мають різну тривалість, тобто  $\theta_k = \Delta T_k + \Delta \tau_k$ , де  $\Delta \tau_k$  - зміщення переднього фронту імпульсів струму відносно центру.

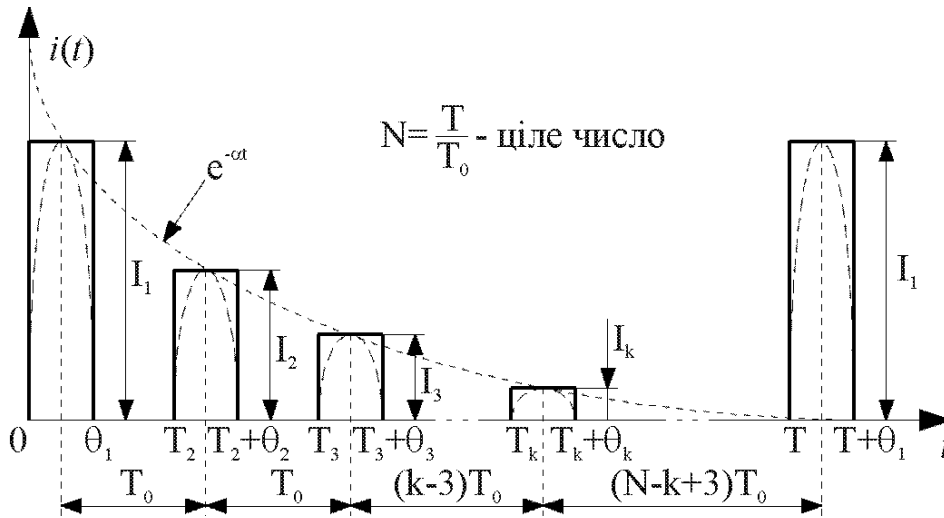


Рис.2. Прямокутні імпульси струму в N-ому каскаді помножувача частоти, модульовані за амплітудою та тривалістю

Так як кожний імпульс  $i_k(t)$  задається двома специфічними інтервалами часу  $0 < t < \theta_k$  та  $\theta_k < t < T$ , зображення по Лапласу граткової функції  $i(0 < t < T)$  (рис.2) можна записати таким чином:

$$I_T(p) = \sum_{k=1}^N \left( \int_0^{\infty} i_k(t) e^{-pt} dt \right) \cdot (1 - e^{-p\theta_k}) e^{-pT_k} = \sum_{k=1}^N I_k(p) \cdot (1 - e^{-p\theta_k}) e^{-pT_k} \quad (11)$$

Якщо функція  $i(0 < t < T)$  є періодичною, зображення по Лапласу граткової функції  $i(0 < t < \infty)$  запишеться таким чином [1]:

$$I(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \sum_{k=1}^N I_k(p) \cdot (1 - e^{-p\theta_k}) e^{-pT_k} \quad (12)$$

Стационарну напругу на виході N-го каскаду помножувача частоти можна знайти з таких співвідношень:

$$U_{cm}(T_k < t < T_k + \theta_k) = \frac{1}{2\pi j} \left( \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sum_{k=1}^N I_k(p) \cdot Z(p) e^{p(t-T_k)} dp - \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sum_{k=1}^N I_k(p) \cdot Z(p) e^{p(t-T_k-\theta_k)} dp \right) - \frac{1}{2\pi j} \oint_{L_2} \frac{I(p) \cdot Z(p) e^{pt}}{1 - e^{-pT}} dp; \quad (13)$$

$$U_{cm}(T_k + \theta_k < t < T_{k+1}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sum_{k=1}^N I_k(p) \cdot Z(p) \cdot (1 - e^{-p\theta_k}) e^{p(t-T_k)} dp - \frac{1}{2\pi j} \oint_{L_2} \frac{I(p) \cdot Z(p) e^{pt}}{1 - e^{-pT}} dp, \quad (14)$$

де  $I_k(p) = \int_0^{\infty} i_k(t) e^{-pt} dt$  – зображення k-го імпульсу граткової функції  $i(0 < t < \infty)$ ,  $Z(p)$  – опір контура для n-ї гармоніки в операторній формі.

Віднімаючи від співвідношення (13) співвідношення (14), отримаємо:

$$U_{cm}(T_k < t < T_{k+1}) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} I_k(p) \cdot Z(p) \cdot e^{p(t-T_k-\theta_k)} dp. \quad (15)$$

Співвідношення (15) спрощує знаходження умов відсутності стрибків фази на межі інтервалів дії імпульсів та паузи і мінімуму амплітудної модуляції. Тому що на межі інтервалів в (15) напруга визначається лишками в полюсах функцій  $Z(p)$  та  $I(p)$ , то в залежності від форми імпульсів та типу навантаження можна зробити висновок про наявність нестабільності фази та амплітуди вихідної напруги на всіх  $k=1, 2, \dots, n$  інтервалах для  $0 < t < T$ , тобто зробити висновок про стабільність фази стаціонарної напруги  $U_{cm}(t)$ . Тоді з співвідношення (15) для кожної з граничних умов отримаємо:

$$\begin{aligned} U_{cm}(\theta_1) &= I_1 \rho e^{\alpha \theta_1} e^{-\alpha t} \sin \omega_0(t - \theta_1); \\ \dots \dots \dots & \\ U_{cm}(T_k + \theta_k) &= I_k \rho e^{\alpha(T_k + \theta_k)} e^{-\alpha t} \sin \omega_0(t - T_k - \theta_k); \\ \dots \dots \dots & \end{aligned} \quad (16)$$

З співвідношень (16) можна отримати умови відсутності фазової модуляції на інтервалі часу  $0 < t < T$  у вихідній напрузі  $U_{cm}(t)$  помножувача частоти:  $\omega_0 \theta_1 = \omega_0 \theta_2 = \dots = \omega_0 \theta_n = \pi(2k - 1)$ ,  $I_1 = I_2 = \dots = I_n$  або  $I_1 \neq I_2 \neq \dots \neq I_n$ . Крім того, контур необхідно точно налаштувати в резонанс на частоту  $n$ -ої гармоніки струму, тобто  $\omega_0 T_2 = \omega_0 T_3 = \dots = \omega_0 T_n = \pi(2k - 1)$ . Умовою відсутності амплітудної модуляції є  $\alpha = 0$ . Таким чином, навіть у другому каскаді багатокаскадного помножувача частоти імпульси струму не задовольняють отриманим умовам, тобто не є оптимальними з точки зору відсутності фазової модуляції. Імпульси струму будуть оптимальними лише в першому каскаді помножувача частоти при виконанні умови (6).

**Зменшення фазової модуляції в багатокаскадному помножувачі частоти**

Розрахунок напруги на виході  $N$ -го каскаду помножувача частоти достатньо складний, а вихідна напруга має значні амплітудну та фазову модуляції. Тому в [3] пропонується багатокаскадний помножувач частоти розбити на окремі помножувальні каскади (комірки), напруги на виході яких були б гармонічними з частотою, у 5-6 разів більшою, ніж частота вхідного гармонічного сигналу (рис.3). Тоді склад-на задача про багатокаскадний помножувач розбивалася на декілька нескладних задач, рішення яких можна було б знайти традиційними методами. Крім того, бічні складові в спектрі вихідного коливання, що призводять до фазової та амплітудної модуляції, зводилися б до мінімуму.

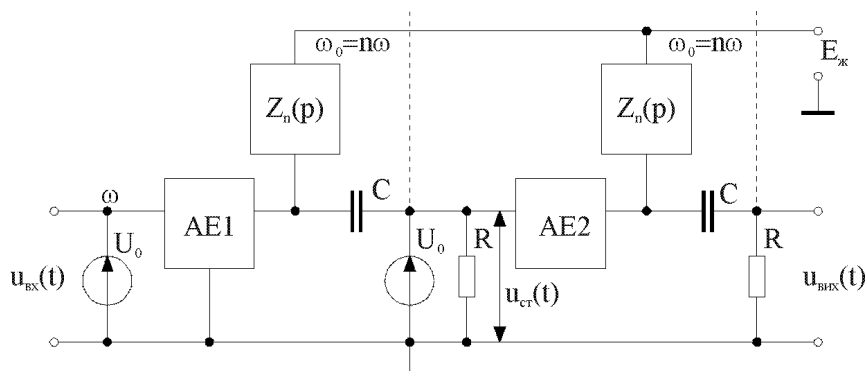


Рис.3. Помножувальна комірка для багатокаскадного помножувача частоти

Ідея побудови таких помножувачів зводиться до наступного. Якщо на перший каскад помножувальної комірки подати гармонічне коливання з частотою  $\omega$ , а на виході отримати напругу з частотою  $\omega_0 = n\omega$  у вигляді:

$$, \quad (17)$$

де  $\beta = 1/2Q$  – швидкість загасання амплітуди косинусоїдних імпульсів;  $Q$  – добротність контура першого каскаду помножувальної комірки;  $U_0$  – постійне зміщення на керуючому електроді активного елемента буферного каскаду помножувальної комірки;  $U_{II}$  – напруга, яка визначає початок вольтамперної характеристики активного елемента (АЕ) буферного каскаду;  $D_1$  та  $D_2$  – амплітудні коефіцієнти стаціонарної напруги, то в буферному (підсилювальному) каскаді комірки, який працює з відтином струму, при деяких визначених співвідношеннях між  $a$ ,  $b$ ,  $D_1$  та  $D_2$  можна отримати імпульси струму постійної тривалості, амплітуди яких змінюються незначно. Якщо в цьому випадку на керуючий електрод АЕ буферного каскаду помножувальної комірки подати напругу  $U_{cm}(t)$ , що визначається співвідношенням (17), то струм активного елемента запишеться як

$$i(t) = -SD_1 e^{-\alpha t} \left( 1 - \frac{D_2}{D_1} e^{-(\beta-\alpha)t} \cos \omega_0 t \right) + S|U_{II} - U_0|, \quad (18)$$

де  $S$  – крутизна характеристики активного елемента буферного каскаду.

Якщо покласти  $i(t) = 0$  при  $\omega_0 t = \theta_k + 2\pi(k-1)$ , то з співвідношення (18) знайдемо кут відтину  $k$ -го імпульсу струму буферного каскаду:

$$\cos \theta_k = \frac{D_1}{D_2} e^{2\pi(k-1)(\alpha-\beta)} - \frac{|U_{II} - U_0|}{D_2} e^{2\pi(k-1)\beta}. \quad (19)$$

Максимальне значення амплітуди імпульсів визначається таким чином:

$$I_{k,\max} = -SD_1 e^{-2\pi(k-1)\alpha} + SD_2 e^{-2\pi(k-1)\beta} + S|U_{II} - U_0|, \quad (20)$$

де  $k=1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – коефіцієнт множення першого каскаду помножувальної комірки.

З отриманих співвідношень (19) та (20) видно, що змінюючи параметри контура першого каскаду помножувальної комірки та режим буферного каскаду при  $\alpha = \beta$ ,  $U_0 = U_{II}$  та  $D_1 \leq D_2$ , можна досягти незмінної величини кута відтину імпульсів струму:

$$\cos \theta_k = \frac{D_1}{D_2}; \quad I_{k,\max} = SD_2 e^{-2\pi(k-1)\alpha} (1 - \cos \theta_k). \quad (21)$$

Це відповідає умові відсутності фазової та мінімуму амплітудної модуляції у вихідній напрузі підсилювального (буферного) каскаду помножувальної комірки, контур якого потрібно налаштувати на першу гармоніку струму  $i(t)$ . Для отримання багатократного множення помножувач частоти будується з декількох таких комірок.

Для отримання напруги  $U_{cm}(t)$  на виході буферного каскаду помножувальної комірки у вигляді суми експоненціального та експоненціально – загасаючого гармонічних процесів можна використовувати й інші методи. Так як навантаження активного елемента помножувального каскаду можна використовувати контур, що має передаточну функцію

$$K(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}, \quad \text{корені характеристичного рівняння якого дорівнюють } p_1 = -\alpha,$$

$p_2 = -\beta + j\omega_0$ ,  $p_3 = -\beta - j\omega_0$ . Такий контур в теорії коливачів отримав назву електричного кола з півтора ступенями вільності. Але для отримання оптимальних параметрів імпульсів струму в буферному каскаді необхідний доволі кропіткий підбір параметрів контура, що містить два регульованих реактивних елементи.

Якщо напругу на вході буферного каскаду помножувальної комірки (рис.4) формувати за допомогою системи автоматичного регулювання зміщення (АРЗ), яка складається з амплітудного детектора (АД) та суматора (S), то напруга на виході суматора буде дорівнювати  $U_{cm}(t) = D_1 e^{-\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t + U_{II}$ , що дозволяє отримати оптимальні за формою імпульси

струму в буферному каскаді, резонансний контур якого необхідно налаштувати на частоту першої гармоніки.

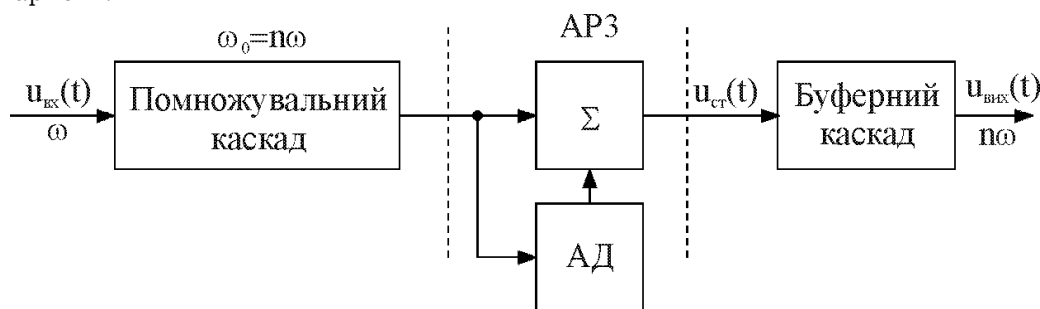


Рис.4. Помножувальна комірка для багатокаскадного помножувача частоти з АРЗ в буферному каскаді

Якщо багатокаскадний помножувач частоти містить каскади з коефіцієнтами множення, що кратні двом, то помножувальні комірки раціонально будувати з помножувального каскаду, подвоювача частоти в квадратичному режимі та буферного каскаду (рис.5). Якщо в цьому випадку перший каскад працює в звичайному режимі множення в  $n$  разів, то його вихідна напруга викликає в активному елементі подвоювача частоти струм  $i_2(t) = 0.5SD_1^2 e^{-2\alpha t} + 0.5SD_2^2 e^{-2\alpha t} \cos 2n\omega t + SU_{II}$ . Реалізувавши в буферному каскаді режим з кутом відтину  $\theta_k = 90^\circ$ , можна отримати вихідну напругу без фазової та з мінімальною амплітудною модуляцією.

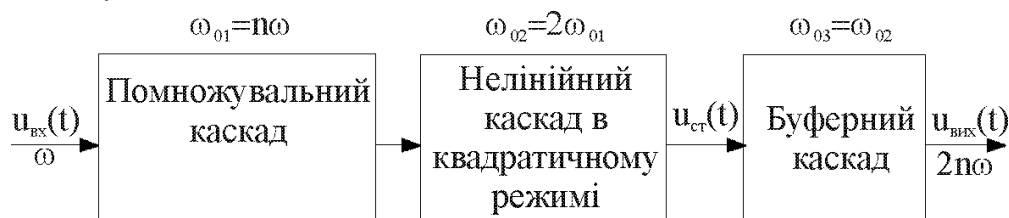


Рис.5. Помножувальна комірка для багатокаскадного помножувача частоти з подвоювачем частоти

### Висновки

1. Розглянуто фазові співвідношення в першому каскаді помножувача частоти з великим коефіцієнтом множення та знайдено умови, при яких відсутні паразитні амплітудна та фазова модуляції.
2. Розглянуто фазові співвідношення в  $N$ -ому каскаді помножувача частоти та доведено, що навіть в другому каскаді багатокаскадного помножувача імпульси струму не задовольняють отриманим умовам, тобто не є оптимальними з точки зору відсутності фазової модуляції. Умовою відсутності амплітудної модуляції є  $\alpha = 0$ .
3. Запропоновано декілька варіантів побудови помножувальної комірки для багатокаскадного помножувача частоти, у вихідній напрузі якої відсутні паразитні амплітудна та фазова модуляції.

### Література

1. Рудик А. В., Суп'ян Я. В. Методика аналізу похибок відтворення сигналу фільтром синтезу цифроаналогового перетворювача // Вісник ВПІ. –1997. –№2. –С. 70-76.
2. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы.–М.: Радио и связь, 1986. –512 с.
3. Суп'ян В. Я. Умножитель частоты //Рационализаторские предложения по радиоэлектронике. –1963. –№21. –С. 28-30.