

УДК 519.63.4.001.57+517.54

**Бомба А. Я., д.т.н., професор, Гаврилюк В. І., ст. викладач, Теребус А. В., аспірант** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне), **Хлапук М. М., д.т.н, професор** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **КОМПЛЕКСНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНО-СУФОЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У ҐРУНТОВИХ ГРЕБЛЯХ**

Розроблено комплексний підхід до моделювання нелінійної фільтраційно-суфозійної взаємодії в ґрунтових греблях за наявності проміжку типу «височування», поверхні депресії, води в нижньому б'єфі та поздовжнього дренажу.

**Ключові слова:** фільтрація, суфозія, гребля, моделювання, просторова задача.

Разработан комплексный подход к моделированию нелинейного фильтрационно-суфозийного взаимодействия в грунтовых плотинах при наличии промежутка типа "просачивание", поверхности депрессии, воды в нижнем бьефе и продольного дренажа.

**Ключевые слова:** фильтрация, плотина, моделирование, суффозия, пространственная задача.

**A complex approach to nonlinear filtration-boil interaction in soil dams in existence of gap with sop, surface of depression, tail-water and longitudinal drainage was developed.**

**Keywords:** filtration, internal erosion, dam, modeling, spatial problem.

**Вступ.** Інженерний клас задач фільтрації в неоднорідних пористих середовищах достатньо широкий і різноманітний. Він, зокрема, стосується встановлення параметрів фільтраційного потоку (напорів, швидкостей і витрат) в основі гідротехнічних споруд (бетонних та земляних гребель, водозливів); вивчення притоку ґрунтових вод до різноманітних дренажних систем. Важливе місце при моделюванні відповідних процесів в плоских областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, та числовому розв'язуванні відповідних нелінійних крайових задач займає метод конформних і квазіконформних відображень (див. [1, 2]). При моделюванні ж реальних фізичних фільтраційних процесів методів побудови плоских динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів часто буває недостатньо, адже течію в природних просторових областях не завжди можна розглядати,

як рух вздовж заданих плоско паралельних прошарків. Це, зокрема, стосується математичного моделювання фільтраційних процесів в деяких видах гребель: аркових, греблях із водоймами з негоризонтальним дном тощо. Вивчення просторового потоку ґрунтових вод, доцільне, також, в розрахунках при будівництві перервних (несуцільних) дренажів в дамбах та гребелях, які в порівнянні з суцільними дренажами дозволяють значно заощадити ресурси. В таких умовах узагальнення на простір методів конформних та квазіконформних відображень є надзвичайно актуальним.

У роботах [3-6] для побудови динамічних сіток потенціальних і квазіпотенціальних полів, розрахунку різного роду профілів з одночасним знаходженням інших характеристик (витрат, величин перетоків, тощо) розроблено метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень), де під терміном “обернення” розуміється, по-перше, перехід від конформного відображення фізичної області  $G_z$  на відповідну область комплексного потенціалу  $G_\omega$  до більш вигідного оберненого відображення  $G_\omega \rightarrow G_z$ ; по друге те, що задача на конформне відображення  $G_z \rightarrow G_\omega$  ( $G_\omega \rightarrow G_z$ ) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про її розв’язок, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови). Розроблену методику застосовано до розв’язування важливих та актуальних задач фільтрації в ґрунтових греблях, зокрема у роботах [3, 4] за умов урахування зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища, а в [5] розглядається випадок її поєднання разом з методом фіктивних областей для випадку наявності проміжку типу «височування». У даній роботі йдеться про модифікацію методу числового розв’язання просторових модельних нелінійних крайових задач фільтрації на просторові квазіконформні відображення [7] для випадку, коли однією з ділянок границі області є невідома (вільна) поверхня, а саме, для випадку ґрунтової греблі на непроникній основі за умови наявності проміжку типу «височування» та води в нижньому б’єфі з урахуванням зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища.

**Постановка задачі.** Розглянемо процес фільтрації в ґрунтовій греблі на непроникній основі. Відповідну фізичну область фільтрації  $G_z$   $\tau = (x, y, z)$  зображено на рис. 1, де  $AA^*A_1^* = \{\tau: z=0\}$   $BA_1A_1^*B^* = \{\tau: z=F_*(x, y)\}$ ,  $SDD^*S^* = \{\tau: z=F^*(x, y)\}$ ,  $ABCD = \{\tau: G_*(x, y, z) = 0\}$ ,  $A^*B^*C^*D^* = \{\tau: G^*(x, y, z) = 0\}$ ,  $C_1CC^*C_1^* = \{\tau: z=h_*$ ,  $DAA^*D^* = \{\tau: z=H_*(x, y)\}$ ,  $FC_1F^*C_1^* = \{\tau: F_1(x, y) = 0\}$ ,  $BC_0CC^*C_0^*B^*$  – вільна (невідома) поверхня (поверхня депресії),  $C_0C_1C_1^*C_0^*$  – проміжок височування,  $ADD^*A^*$  – непроникна

основа греблі,  $H_T$  та  $H$ ,  $h_*$  – відповідно висота греблі та напори на ній,  $C_0 C_1 C C^* C_1^* C_0^*$  – фіктивна ділянка розглядуваної області фільтрації. При цьому очевидно, що координати  $(x_{CC^*}, y_{CC^*})$  точок  $CC^*$  – невідомі.

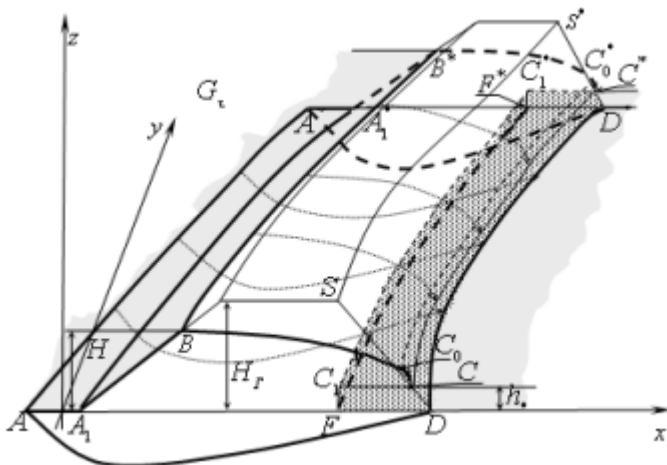


Рис. 1. Схема просторової греблі з суцільним дренажем

Процес фільтрації рідини описуватимемо рівнянням руху  $\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } h$  (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$  [1-5], де  $\vec{v} = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$  – швидкість фільтрації,  $\kappa = \kappa(\text{grad } h)$  – обмежена неперервно-диференційована в області  $G_T$  функція, що характеризує провідність середовища та схильність його до деформацій,  $h = h(x, y, z)$  – напір в точці  $(x, y, z)$ ,  $h|_{BC_0 C C^* C_0^* B^*} = h|_{BC_0 C_1 C_1^* C_0^* B^*} = z$ ,  $\varphi = 1 - \frac{h - h_*}{H - h_*}$  – такий

потенціал поля, що  $\varphi|_{AA_1 B A^* A_1^* B^*} = 0$ ,  $\varphi|_{DF C_1 C C^* C_1^* F^* D^*} = 1$ ,  $\frac{d\varphi}{dn}|_{B C C^* B^*} = \frac{d\varphi}{dn}|_{D A A^* D^*} = \frac{d\varphi}{dn}|_{A B C D} = \frac{d\varphi}{dn}|_{A^* B^* C^* D^*} = 0$ ,  $n$  – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області.

Задача на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(\tau) = (\varphi(x, y, z), \psi(x, y, z), \chi(x, y, z))$  розглядуваної області  $G_T$  на відповідну область квазікомплексного потенціалу (див. рис. 2)  $G_\omega = \{\omega: 0 < \varphi < 1, 0 < \psi < Q_0, 0 < \chi < Q^0\}$  ( $\psi = \psi(x, y, z)$ ,  $\chi = \chi(x, y, z)$  – фу-

нкції течії просторово квазікомплексно спряжені до  $\varphi = \varphi(x, y, z)$ ) з невідомим параметром – повною питомою витратою  $Q = Q^0 Q_0 = \iint_{(S)} \kappa(\text{grad}\varphi) \text{grad}\varphi \cdot \vec{n} \, dS$  матиме вигляд [7]:

$$\begin{cases} \kappa(\text{grad}\varphi) \text{grad}\varphi = \text{grad}\psi \times \text{grad}\chi, \\ \text{grad}\psi \cdot \text{grad}\chi = 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \varphi|_{ABB_*A_*} = 0, & \varphi|_{DCC_1C_1^*C_*D_*} = 1, & \psi|_{ADD_*A_*} = 0, \\ \psi|_{BCC_*B_*} = Q_0, & \chi|_{ADCB} = 0, & \chi|_{A_*D_*C_*B_*} = Q^0. \end{cases} \quad (2)$$

Зауважимо, що хоч параметри  $Q_0$  та  $Q^0$  є невідомими, і знаходження їхніх значень в процесі розв'язку є непринциповим, тому визначатимемо лише потік через довільний переріз течії  $Q$ , а його перерозподіл вздовж горизонтального  $Q_0$  та вертикального  $Q^0$  одиничних прошарків здійснюватимемо умовно.

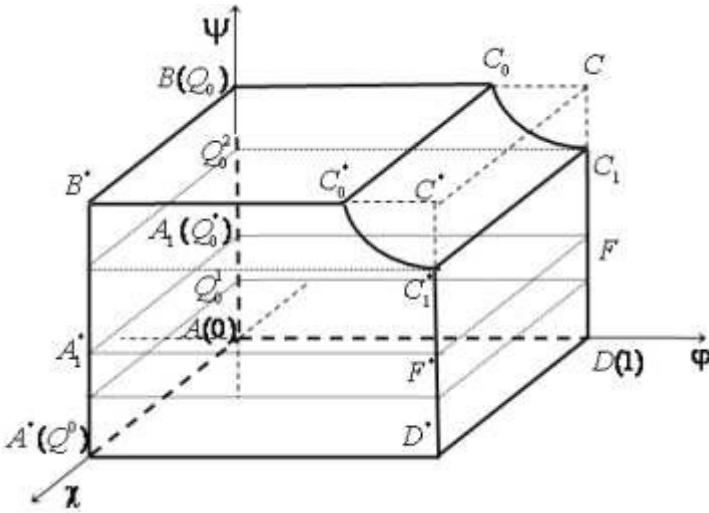


Рис. 2. Область квазікомплексного потенціалу  $G_\omega$

Відповідну (1)-(2) обернену задачу [4, 7] на відшукування просторового квазіконформного відображення  $G_\omega \rightarrow G_\tau$  сформулюємо у вигляді:

$$\begin{cases} x_\varphi = \kappa(y_\psi z_\chi - z_\psi y_\chi), & \kappa x_\psi \cdot X^{-2} = y_\chi z_\varphi - z_\chi y_\varphi, & \kappa x_\chi \cdot \Psi^{-2} = y_\varphi z_\psi - z_\varphi y_\psi, \\ y_\varphi = \kappa(z_\psi x_\chi - x_\psi z_\chi), & \kappa y_\psi \cdot X^{-2} = z_\chi x_\varphi - x_\chi z_\varphi, & \kappa y_\chi \cdot \Psi^{-2} = z_\varphi x_\psi - x_\varphi z_\psi, \\ z_\varphi = \kappa(x_\psi y_\chi - y_\psi x_\chi); & \kappa z_\psi \cdot X^{-2} = x_\chi y_\varphi - y_\chi x_\varphi; & \kappa z_\chi \cdot \Psi^{-2} = x_\varphi y_\psi - y_\varphi x_\psi; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} z(0, \psi, \chi) &= 0, & 0 \leq \psi \leq Q_0^*, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(0, \varphi, \chi) &= F_*^*(x(0, \psi, \chi), y(0, \psi, \chi)), & Q_0^* \leq \psi \leq Q_0, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(1, \psi, \chi) &= 0, & 0 \leq \psi \leq Q_0^1, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(1, \varphi, \chi) &= F_*^*(x(1, \psi, \chi), y(1, \psi, \chi)), & Q_0^1 \leq \psi \leq Q_0^2, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(1, \psi, \chi) &= h_*, & Q_0^2 \leq \psi \leq Q_0, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(\varphi, Q_0, \chi) &= h_* + (1 - \varphi) \cdot (H - h_*), & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ z(\varphi, 0, \chi) &= H_* (x(\varphi, 0, \chi), y(\varphi, 0, \chi)) & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \chi \leq Q^0, \\ G_*(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0)) &= 0 & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \psi \leq Q_0, \\ G^*(x(\varphi, \psi, Q^0), y(\varphi, \psi, Q^0), z(\varphi, \psi, Q^0)) &= 0 & 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \psi \leq Q_0. \end{aligned} \quad (4)$$

Тоді, відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi, \chi)$ ,  $y = y(\varphi, \psi, \chi)$ ,  $z = z(\varphi, \psi, \chi)$  у дивергентній формі мають вигляд:

$$\begin{cases} \left( \kappa^{-1} x_\varphi \right)_\varphi + \left( \kappa X^{-2} x_\psi \right)_\psi + \left( \kappa \Psi^{-2} x_\chi \right)_\chi = 0, \\ \left( \kappa^{-1} y_\varphi \right)_\varphi + \left( \kappa X^{-2} y_\psi \right)_\psi + \left( \kappa \Psi^{-2} y_\chi \right)_\chi = 0, \\ \left( \kappa^{-1} z_\varphi \right)_\varphi + \left( \kappa X^{-2} z_\psi \right)_\psi + \left( \kappa \Psi^{-2} z_\chi \right)_\chi = 0, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{де } \kappa &= \kappa \left( J^{-1} \sqrt{\left( y_\psi z_\chi - y_\chi z_\psi \right)^2 + \left( x_\chi z_\psi - x_\psi z_\chi \right)^2 + \left( x_\psi y_\chi - x_\chi y_\psi \right)^2} \right), & X &= \\ &= X(\varphi, \psi, \chi) = J^{-1} \sqrt{\left( y_\varphi z_\psi - z_\varphi y_\psi \right)^2 + \left( z_\varphi x_\psi - x_\varphi z_\psi \right)^2 + \left( x_\varphi y_\psi - y_\varphi x_\psi \right)^2}, & \Psi &= \\ &= \Psi(\varphi, \psi, \chi) = J^{-1} \sqrt{\left( y_\chi z_\varphi - z_\chi y_\varphi \right)^2 + \left( z_\chi x_\varphi - x_\chi z_\varphi \right)^2 + \left( x_\chi y_\varphi - y_\chi x_\varphi \right)^2}, & J &= \\ &= \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, \chi)} - \text{якобіан переходу.} \end{aligned}$$

**Алгоритм наближення розв'язку** оберненої нелінійної диференціальної задачі (4)-(5) будується аналогічно до [4, 7] шляхом поетапної параметризації величини квазіконформного інваріанту, граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації. При цьому проводиться повна дискре-

тизація задачі, де диференціальні рівняння у частинних похідних другого порядку (5) апроксимуються дев'ятиточковою різницевою схемою, умови ортогональності ліній течії та еквіпотенціальних ліній до відповідних ділянок границі фізичної області (4) – спеціальними числово-аналітичними різнице-вими рівняннями, а конформний інваріант – рівнянням, що забезпечує вико-нання умови “квазіконформної подібності у малому” відповідних чотирикут-ників областей  $G_\omega$  та  $G_\tau$ . В результаті числового розв’язування задачі знай-дено шуканий параметр  $Q$ , координати граничних та внутрішніх вузлів по-будованої в області фільтрації динамічної сітки  $(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ , де  $x_{i,j,k} = x(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$ ,  $y_{i,j,k} = y(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$ ,  $z_{i,j,k} = z(\varphi_i, \psi_j, \chi_k)$ ,  $\varphi_i = \Delta\varphi \cdot i$ ,  $i=0, m+1$ ;  $\psi_j = \Delta\psi \cdot j$ ,  $j=0, n+1$ ;  $\chi_k = \Delta\psi \cdot k$ ,  $k=0, l+1$ ;  $\Delta\varphi = 1/(m+1)$ ,  $\Delta\psi = Q_0/(n+1)$ ,  $\Delta\chi = Q^0/(l+1)$ ,  $\gamma = \Delta\varphi / (\Delta\psi\Delta\chi)$ ,  $m, n, l \in \mathbb{N}$ , положення вільної кривої  $BC_0CC^*C_0^*B^*$ , координати проміжку височування  $C_0C_1C_1^*C_0^*$  та зони збурення. При цьому  $\varphi_i$ , що відповідає „фік-тивній області”, на кожному ітераційному кроці  $p$  визначається з умови  $\varphi_i^{p+1} = \varphi_i(x_{i,j,k}^{p+1}, y_{i,j,k}^{p+1}, z_{i,j,k}^{p+1}) \Big|_{z=F^*(x,y)}$ , тобто значення квазіпотенціалу на віль-ній кривій корегується таким чином, щоб виконувалася умова на проміжку височування.

**Результати числового розрахунку.** В якості прикладу проведено розра-хунки на побудову гідродинамічної сітки, знаходження повної витрати, по-ложення кривої депресії та інших характеристик ґрунтової греблі на непро-никній основі (рис. 1), а саме для випадку, коли  $A_1AA^*A_1^* = \{\tau: z=0\}$   
 $BA_1A_1^*B^* = \{\tau: x = \left(18 + \frac{25}{12}h\right)\cos\varphi, y = \left(18 + \frac{25}{12}h\right)\sin\varphi, z = h, 0 \leq h \leq H_\Gamma,$   
 $0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}\}$ ,  $SDD^*S^* = \{\tau: x = \left(55 - \frac{8}{12}h\right)\cos\varphi, y = \left(55 - \frac{8}{12}h\right)\sin\varphi, z = h,$   
 $0 \leq h \leq H_\Gamma, 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}\}$ ,  $ABCD = \{\tau: y = 0\}$ ,  $A^*B^*C^*D^* = \{\tau: y = tg\frac{2\pi}{9}x\}$ ,  
 $C_1CC^*C_1^* = \{\tau: z = h_*\}$ ,  $DAA^*D^* = \{\tau: x = \left(12 + \frac{7}{2}h\right)\cos\varphi, y = \left(12 + \frac{7}{2}h\right)\sin\varphi,$   
 $z = -h, 0 \leq h \leq 4, 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9}\} \cup \{\tau: x = \left(55 - \frac{23}{4}h\right)\cos\varphi, y = \left(55 - \frac{23}{4}h\right)\sin\varphi,$

$$z = -h, \quad 0 \leq h \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9} \Big\}, \quad FC_1 C_1^* F^* = \{ \tau: \quad x = (55 - l_0) \cos \varphi, \\ y = (55 - l_0) \sin \varphi, \quad z = h, \quad 0 \leq h \leq H_T, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{9} \Big\}, \quad (k = k_0 + \mu(I - I_{kp}), \text{ при} \\ I > I_{kp}, \quad k = k_0, \text{ при } I \leq I_{kp}) \quad m \times n \times l = 40 \times 20 \times 4, \quad \varepsilon = 10^{-5}, \quad I_{kp} = 0.018, \\ \kappa_0 = 2.5 \text{ м/добу}, \quad \mu = 200, \quad H_T = 12 \text{ м}, \quad l_0 = 1.48, \quad h_* = 0.5 \text{ м}, \quad \sigma = 0.1666.$$

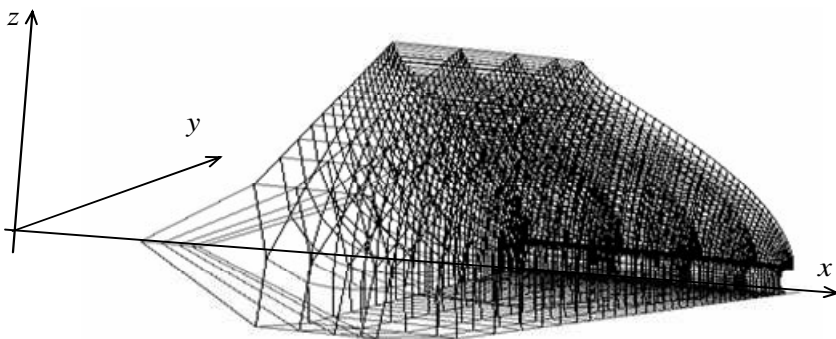


Рис. 3. Гідродинамічна сітка руху

В результаті числових розрахунків побудовано просторову гідродинамічну сітку (див. рис. 3), знайдено повну фільтраційну витрату  $Q = 3.93266 \text{ м}^3/\text{добу}$  за максимальної нев'язки  $\varepsilon_* = 0.004$ , встановлено положення вільної поверхні та зони збурення.

**Висновки.** Таким чином, у даній роботі метод розв'язування відповідних крайових задач фільтрації з післядією у схильних до деформацій обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями пористих середовищах з вільними ділянками меж модифіковано для випадку, коли відповідний процес розглядається в просторовій ґрунтовій греблі на непроникній основі за умови наявності проміжку типу «височування» води в нижньому б'єфі та повздовжнього дренажу з урахування зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища.

На основі проведених числових розрахунків бачимо, що врахування зміни коефіцієнта фільтрації за вказаними вище законами призводить до значної зміни фільтраційної витрати, при цьому встановлення динаміки зміни положення кривої депресії дозволяє більш точно визначити ступінь деформаційних процесів в масиві низової призми та прогнозувати їх наслідки для роботи греблі.

При обґрунтуванні (а також побудові) відповідного алгоритму, що ґрунтується на почерговому „замороженні” шуканих параметра конформності, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області використовувались ідеї методу блочної ітерації [4, 7].

Розроблений алгоритм розв'язання відповідного класу задач можна застосувати до розв'язання певного типу оптимізаційних задач, а саме на встановлення мінімальної довжини закладання дренажу, щоб забезпечити відсутність проміжку типу височування.

**1.** Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М. : Наука, 1977. – 408 с. **2.** Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664 с. **3.** Бомба А. Я. Моделирование нелинейных фильтрационно-суффозийных процессов в грунтовых греблях / А. Я. Бомба, Ж. С. Гутіна, С. С. Каштан, М. М. Хлапук // Вісник НУВГП: збірн. наук. праць. – Рівне: НУВГП. – 2004. – Вип. 23(27). – С. 105-112. **4.** Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с. **5.** Бомба А. Я. Новая методика решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, В. В. Скопецький // Компьютерная математика. – 2007. – № 1. – С. 31- 39. **6.** Гаврилюк В. І. Метод фіктивних областей та оптимізація параметрів фільтраційних процесів у криволінійних областях з невизначеними ділянками меж / В. І. Гаврилюк // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2010. – Вип. 1. – С. 204-209. **7.** Теребус А. В. Просторові модельні аналоги крайових задач на квазіконформні відображення / А. В. Теребус // Волинський математичний вісник. Серія “Прикладна математика”. – 2011. – № 8 (17). – С. 192-206.

Рецензент: д.т.н., професор Стефанишин Д. В. (НУВГП)