

УДК 539.3

Кундрат М. М., д.т.н., проф., Мельник Ю. В., аспірант (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **ЛОКАЛЬНЕ РУЙНУВАННЯ ТА ГРАНИЧНА РІВНОВАГА В ПІДКРІПЛЕНІЙ ПЛАСТИНІ З УРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ ЯВИЩ**

**Подано розв'язок двовимірної модельної задачі для півбезмежної пластини з пружною гнучкою накладкою за умов одночасного розтягу пластини на безмежності розподіленими напруженнями та зосередженими силами, прикладеними безпосередньо до кінців накладки. Виконано числовий аналіз.**

**Подано решение двумерной модельной задачи для полубесконечной пластины с упругой гибкой накладкой при условии одновременного растяжения пластины на бесконечности распределенными напряжениями и сосредоточенными силами, приложенными непосредственно к концам накладки. Выполнен численный анализ.**

**Solution of two-dimensional model problem for semi-infinite plate with elastic flexible reinforcement plate is given under conditions of simultaneous plate tension on infinite with distributed strains and concentrated forces which are applied to the ends of reinforcement plate. The numerical analysis has been performed.**

Прогнозування міцності підкріплених тонкостінних конструкцій залишається і на сьогодні актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла. Для теоретичного з'ясування граничного експлуатаційного навантаження таких композицій під статичним чи змінним навантаженням необхідні поглиблений аналіз полів напружень та деформацій біля підкріплюючих елементів та пов'язана з цим побудова відповідних математичних моделей для процесів, що передують безпосередньо руйнуванню. Урахування явищ розпуснення матеріалів, нелінійного та пластичного їх деформування дає можливість більш точно прогнозувати і раціонально використати несучу здатність елементів конструкцій.

Задача для півбезмежної пластини з прикріпленням на всій довжині нескінченно довгим ребром, навантаженою на початку координат поздовжньою силою, вперше розглядалася в праці Е. Мелана (Melan) [1] і в подальшому отримала назву від його імені. Огляд досліджень контактної задачі Мелана для пружного тіла виконано в монографіях Н. Мухелішвілі [2], А. Каландії [3], Е. Григолюка, В. Толкачова [4], Г. Попова [5], В. Саркісяна [6], В. Александрова, С. Мхітаряна [7], Г. Сулима [8] та широкому колі праць. Розрахункова модель для аналізу напружено-деформованого стану півплощини з накладками запропонована в працях М. Кундрата [9, 10]. Постановка задачі да-

ла можливість уникнути сингулярності напружень в околах кінців накладки та отримати механічно коректні обмежені напруження у всіх точках композиції. Нижче ця модель застосована до аналізу рівноваги у системі “півбезмежна пластина – пружна накладка” за умови навантаження як пластини так і пружної накладки.

**Пружна однорідна** ізотропна півбезмежна пластина одниничної товщини підкріплена на ділянці  $|x| \leq a \approx L_0 \cup L_1$  пружною накладкою завдовжки  $2a$ . Пластина розтягуються на безмежності напруженнями інтенсивності

$$\sigma_{xx}^{\infty} = q, \tag{1}$$

а накладка (підкріплення) прикладеними до її кінців зосередженими силами величини  $Q$ , згідно з рис. 1.

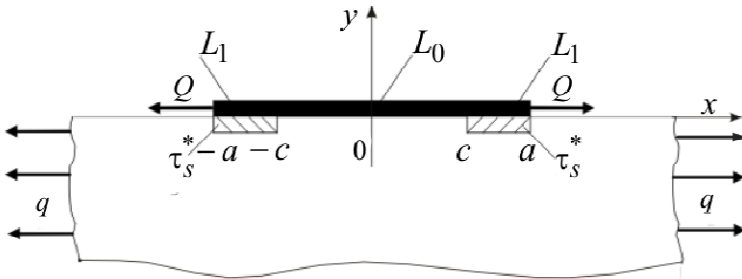


Рис. 1. Півбезмежна пластина підкріплена накладкою

З аналізу пружних розв’язків відповідної задачі слідує, що найбільша концентрація напружень виникає в околах кінців накладки, де насамперед слід чекати виникнення-зародження і розвитку локалізованих зон передруйнування. Вважаємо, що саме під кінцями накладки зароджуються зони передруйнування, просуваючись від кожного краю до центральної частини вздовж межі з’єднання пластина-накладка. На цих ділянках нелінійного зв’язку між напруженнями і деформаціями дотичні напруження приймаємо сталими і рівними своєму граничному значенню  $\tau_s^*$  –

$$\sigma_{xy}(x) = \tau_s^* \text{sign}(x) \quad (x \in L_1). \tag{2}$$

Параметр  $\tau_s^*$  трактуємо як теоретичну або як технічну адгезійну зсувну міцність контактної межі пластина-накладка, а при пластичному деформуванні – як її зсувний поріг пластичності. При досягненні взаємними переміщеннями матеріалів накладки і пластини в таких зонах певної межі, зв’язок між матеріалами може порушуватися, тобто накладка в її кінцевих областях відшарується.

Приймаємо ще наступні допущення.

Накладка абсолютно гнучка, тобто працює лише на розтяг.

$E_f > E$ , тобто модуль пружності накладки більший від такого ж для пластини.

За умов задачі накладка і пластина взаємодіють через контактні дотичні напруження. Розв'яжемо окремо задачі для накладки та пластини і за їх результатами запишемо відповідні значення деформацій на межі з'єднання та побудуємо інтегральне рівняння.

**Деформація накладки.** Для довільного перерізу накладки з координатою  $x$  (рис. 2) рівняння рівноваги має вигляд [3]

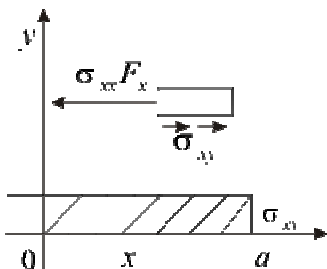


Рис. 2. Схема перерізу накладки

$$\sigma_{xx} h = Q + \int_x^a \sigma_{xy}(t) dt, \quad (3)$$

де  $\sigma_{xx}$  – нормальні напруження по поперечному перерізу накладки,  $h$  – її висота, ширина дорівнює одиниці.

Згідно закону Гука

$$\sigma_{xx} = E_f \epsilon_{xx}$$

та формул (1), (2) і (3) отримуємо вираз

для деформацій накладки:

$$\frac{\partial u^f(x)}{\partial x} = \epsilon_{xx}^f = \frac{1}{hE_f} \left[ \int_x^c \sigma_{xy}(t) dt + Q + \tau_s^*(a-c) \right]. \quad (4)$$

**Крайова задача для півплощини.** Загальний розв'язок основних задач теорії пружності для півплощини відомий і поданий, зокрема, у монографії М. Мусхелішвілі [2]. Згідно цієї праці, напруження і деформації в півплощині можна подати через одну функцію  $\Phi(z)$  комплексної змінної  $z = x + iy$ :

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (5)$$

$$\sigma_{yy} - i\tau_{xy} = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)},$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (6)$$

де  $G = E/(2(1+\nu))$ ,  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ ,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $u'(z) = (\partial u(z))/\partial z$ .

Враховуємо той факт, що накладка є абсолютно гнучкою, тобто нормальні напруження по всій її довжині рівні нулю

$$\sigma_{yy}(x) = \sigma_{yy}^+(x) = 0 \quad (y = 0). \quad (7)$$

Якщо така умова виконується на всій довжині вільного краю, то згідно подання (5) та теореми Ліувілля [2] функція є сталою у всій півплощині

$$\Phi(z) - \overline{\Phi}(z) = \text{const}.$$

Сталу *const* знаходимо із поведінки функції  $\Phi(z) - \overline{\Phi}(z)$  на нескінченності. У нашому випадку вона дорівнює нулю, тому у всій півплощині

$$\Phi(z) = \overline{\Phi}(z). \quad (8)$$

З урахуванням виразів (1), (7), (8) з формули (6) отримуємо деформацію вільного краю пластини:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x} = \frac{\kappa + 1}{4G} \left[ -\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\sigma_{xy}(t)}{t-x} dt + \frac{q}{2} \right]. \quad (9)$$

**Побудова інтегрального рівняння.** Умова рівності деформацій між накладкою і пластиною на ділянці їх ідеального механічного контакту  $-c \leq x \leq c$  (формули (4) і (9)) породжує сингулярне інтегральне рівняння стосовно невідомих контактних напружень  $\sigma_{xy}(x)$ .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\sigma_{xy}(t) dt}{t-x} + \frac{1}{2h\lambda_0} \int_x^c \sigma_{xy}(t) dt + \\ & + \tau_s^* \left[ \frac{a-c}{2h\lambda_0} - \frac{1}{\pi} g_1(x) \right] + \frac{Q}{2h\lambda_0} - \frac{q}{2} = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $g_1(x) = \ln \frac{c^2 - x^2}{a^2 - x^2}$ ,  $\lambda_0 = E_f / E$ .

Окрім того, мають виконуватися:

– умова загальної рівноваги накладки

$$\int_{-a}^a \sigma_{xy}(t) dt = 0; \quad (11)$$

– контактні напруження  $\sigma_{xy}(x)$  є обмеженими в колі вершини зони передруйнування  $x = \pm c$  (що одночасно є і умовою на довжину самої зони)

$$\sigma_{xy}(\pm c) = \tau_s^*. \quad (12)$$

Для дальшого дослідження безрозмірно рівняння (10), увівши нові змінні  $y, \tau$  способом

$$x = cy; \quad t = c\tau,$$

та подамо рівняння (10) у вигляді:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sigma_{xy}(\tau) d\tau}{\tau - y} + \frac{1}{2h\lambda_0} \int_y^1 \sigma_{xy}(\tau) d\tau + \tau_s^* \left[ \frac{a-c}{2h\lambda_0} - \frac{1}{\pi} g_1(y) \right] + \frac{Q}{2h\lambda_0} - \frac{q}{2} = 0. \quad (13)$$

Вираз для напружень  $\sigma_{xy}(y)$ , як розв'язку системи рівнянь (11)-(13), подаємо у вигляді ряду за многочленами Чебишева першого роду:

$$T_n(y) = \cos(n \arccos(y))$$

з виділеною кореневою особливістю та невідомими коефіцієнтами  $b_n$

$$\sigma_{xy}(y) = \frac{q}{\sqrt{1-y^2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(y), \quad |y| \leq 1. \quad (14)$$

Разом з умовами (11), (12) отримуємо безмежну систему нелінійних рівнянь стосовно невідомих довжини зони передруйнування  $a - c$  та коефіцієнтів  $b_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n U_{n-1}(y) \left[ 1 + \frac{c}{2h\lambda_0} \frac{\sqrt{1-y^2}}{n} \right] + \frac{\tau_s^*(a-c)}{h\lambda_0} \left[ \frac{1}{q} - \frac{a}{Q} \right] = \frac{\tau_s^*}{\pi} g_1(y) \left[ \frac{1}{q} - \frac{a}{Q} \right] - \frac{a}{2h\lambda_0} + \frac{1}{2}, \quad -1 \leq y \leq 1, \quad (15)$$

де  $U_{n-1}(y) = \sin(ny)/\sin y$  – поліноми Чебишева другого роду.

Отриману систему розв'язували методом редукції. За результатами обчислень розглянемо окремо навантаження пластини та накладки.

**Розтягування накладки зосередженими силами.** Нехай сили розтягу пластини відсутні ( $q = 0$ ). Введемо безрозмірний параметр навантаження  $Q_s = Q/(2\tau_s^* a)$ , і обчислення виконуватимемо для  $0 \leq Q_s \leq 1$ . За результатами розв'язування системи рівнянь (11), (12), (15) на рис. 3 подано залежності відносної довжини зони передруйнування  $\varepsilon = (a-c)/a$  від параметра навантаження  $Q_s$ : для лінії 1 параметр  $\lambda = 50$ ; для 2–  $\lambda = 20$ ; 3–  $\lambda = 10/3$ . Зі зростанням жорсткості накладки довжина зони передруйнування також збільшується.

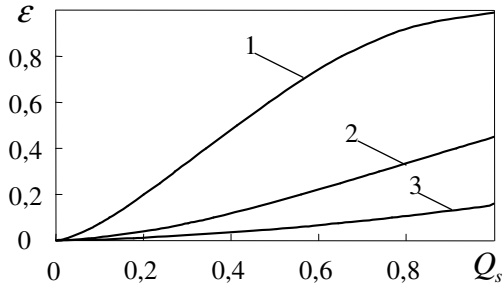


Рис. 3. Довжина зони передруйнування

На рис. 4 подано розподіл контактних дотичних напружень  $\tilde{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy}/(\tau_s^*)$  уздовж правої половини накладки (на лівій – картина симетрична) при фіксованому навантаженні  $Q_s = Q/(2\tau_s^*a) = 0,15$ , обчислених за формулою (14): для лінії 1 параметр жорсткості накладки  $\lambda = 50$ , ( $\varepsilon = 0,008$ ); для 2–  $\lambda = 20$ , ( $\varepsilon = 0,024$ ); 3–  $\lambda = 10/3$ , ( $\varepsilon = 0,133$ ). Основна частина навантаження від накладки на пластину передається в околі кінців накладки. В середній частині контактні напруження порівняно незначні і при  $x = 0$  (середина накладки) дорівнюють нулю та міняють знак.

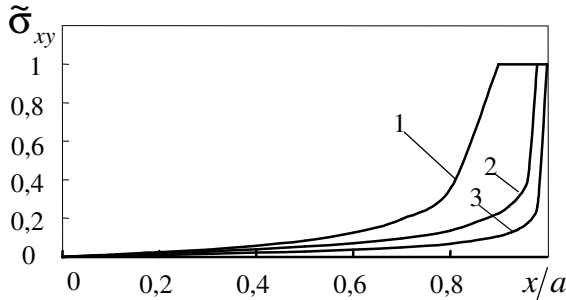


Рис. 4. Розподіл напружень під накладкою

Осьові розривні зусилля у накладці обчислюємо за формулою

$$P(x) = \frac{1}{2h} \int_x^a \sigma_{xy}(t) dt = \frac{1}{2h} \sigma_{xy}(a-x).$$

Їхні знерозмірені значення

$$\tilde{P}(t) = \frac{1}{2h_f} \sigma_{xy}(1-t),$$

при  $h_f = h/a$ ,  $t = x/a$  за фіксованого навантаження  $Q_s = Q/(2\tau_s^* a) = 0,15$  подано для правої половини накладки на рис. 5: для лінії 1–  $\lambda = 50$ , ( $\varepsilon = 0,008$ ); для 2–  $\lambda = 20$ , ( $\varepsilon = 0,024$ ); 3–  $\lambda = 10/3$ , ( $\varepsilon = 0,133$ ). Помітне існування області у центральній частині накладки, де розривні зусилля змінюються незначно, що свідчить про можливість за відносно швидкої зміни навантаження одночасного множинного розриву підкріплюючого елемента у даній зоні.

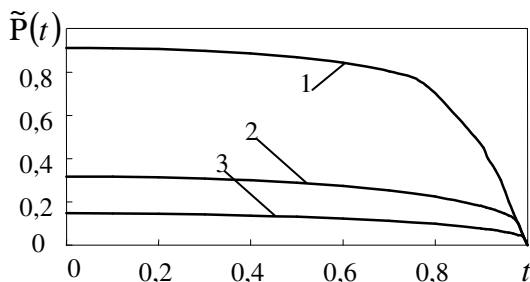


Рис. 5. Осьові розривні зусилля у накладці

**Розтягування пластини заданими напруженнями.** Нехай сили розтягу накладки відсутні ( $Q = 0$ ), а пластина розтягується напруженнями  $\sigma_{xx}^\infty = q$ . Обчислення проводимо аналогічно попередньому, але з безрозмірним параметром навантаження  $q_s = q/(2\tau_s a)$ . Відносні довжини зон перед руйнування, залежно від навантаження, подано на рис. 6: для лінії 1–  $\lambda = 10^9$  (накладка практично абсолютно жорстка); 2–  $\lambda = 20$ ; 3–  $\lambda = 10/3$ .

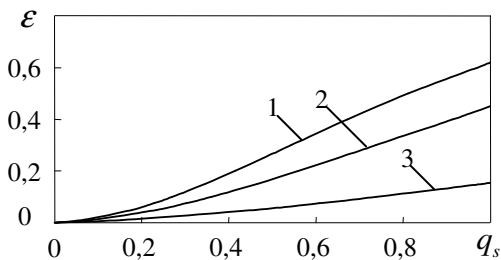


Рис. 6. Довжина зони передруйнування за розтягу пластини

На рис. 7 подано розподіл дотичних напружень  $\sigma_{xy}/(\tau_s^*)$  під накладкою при фіксованому параметрі навантаження  $q_s = q/(2\tau_s a) = 0,25$ , для ліній 1-  $\lambda = 10^0$ , ( $\varepsilon = 0,0881$ ); 2-  $\lambda = 20$ , ( $\varepsilon = 0,055$ ); 3-  $\lambda = 10/3$ , ( $\varepsilon = 0,02$ ). На середині накладки ( $x=0$ ) вони дорівнюють нулю (відсутні) і максимального граничного значення  $\tau_s^*$  досягають в околах її кінців.

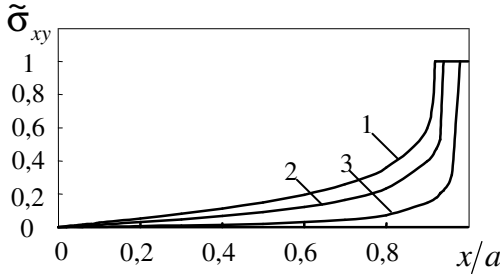


Рис. 7. Розподіл напружень під накладкою

На рис. 8 подано знерозмірені значення

$$\tilde{P}(t) = \frac{1}{2h_f} \sigma_{xy} (1-t),$$

осьових розривних зусиль у накладці при фіксованому  $q_s = q/(2\tau_s a) = 0,25$ ;  $h_f = h/a$ ,  $t = x/a$ ; для ліній 1-  $\lambda = 10^0$ , ( $\varepsilon = 0,0881$ ); 2-  $\lambda = 20$ , ( $\varepsilon = 0,055$ ); 3-  $\lambda = 10/3$ , ( $\varepsilon = 0,02$ ). Максимального значення ці зусилля досягають на середині накладки.

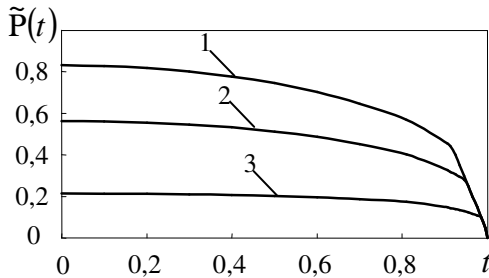


Рис. 8. Осьові розривні зусилля у накладці

При одночасному розтягу пластини та накладки інтегральне рівняння задачі приймає вигляд (13). Звідси слідує, що за комбінованого навантаження, яке задовольняє умові

$$Q = qh\lambda_0,$$

в умовах поставленої задачі розвиток зон передруйнування не відбуватиметься.

**Висновки.** Побудовано розв'язок та виконано дослідження задачі про розвиток зон передруйнування для півбезмежної пластини з підкріпленням, що відповідає локалізованому в тонких областях нелінійному деформуванню матеріалу та явищу розшарування на межі контакту. Обчислено розміри зон передруйнування, розподіли напружень та деформацій, значення контактних напружень залежно від виду та рівня навантаження і фізико-механічних характеристик композиції з підкріпленням.

Виявлено, що квазістатичний розвиток зон передруйнування зі збільшенням навантаження є стійким, причому повного відшарування підкріплення не відбувається. Дотичні напруження максимальні в околах кінців накладки і рівні нулю на середині накладки. Довжина зон передруйнування із збільшенням жорсткості накладки зростає. Отримано умови навантаження, за яких розвитку зон передруйнування не відбуватиметься.

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen // Ingenieur – Archiv. – 1932. Bd. 3. – Heft 2. – S. 123-129. 2. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М. : Наука, 1966. – 707 с. 3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – М. : Наука, 1973. – 303 с. 4. Григлюк Э. И., Толкачев В. М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. – М. : Машиностроение, 1980. – 411 с. 5. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М. : Наука, 1982. – 344 с. 6. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей с упругими накладками. – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. – 260 с. 7. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – М. : Наука, 1983. – 488 с. 8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с. 9. Кундрат М. М. Гранична рівновага та локальне руйнування пластини з накладкою // Вісник РДТУ. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Спецвипуск. – Рівне, 1999. – С. 200-204. 10. Кундрат М. М. Термопружна рівновага півбезмежної пластини з жорсткою гнучкою накладкою // Тези доп. П'ятого українсько-польського наукового симпозиуму “Актуальні задачі механіки неоднорідних структур” (Львів – Луцьк, 18-23 вересня 2003 р.). – Львів : ЛДУ, 2003. – С. 54-55.

Рецензент: д.т.н., професор Бабич Є. М. (НУВГП)