С. ТИМОШЕНКО.

ОБЪ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ.

Отдѣльный оттискъ
изъ «Извѣстій С.-Петербургскаго Политехническаго Института»
за 1905 и 1906 г.г. Томы IV и V.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1906.

1801

С. ТИМОШЕНКО.

ОБЪ УСТОЙЧИВОСТИ

ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ИЗГИБА

ДВУТАВРОВОЙ БАЛКИ.

Отдѣльный оттискъ
изъ «Извѣстій С.-Петербургскаго Политехническаго Института»
за 1905 и 1906 г.г. Томы IV и V.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
1906.

Типо-Литографія
ШРЕДЕРА
С.-Петербургъ
49 Гороховая 49

Печатано по постановленію Совѣта СПБ. Политехническаго Института.

Объ устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки подъ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ въ плоскости ея наибольшей жесткости.

С. Тимошенко.

Введеніе.

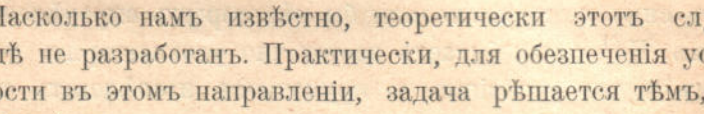
§ 1. При проэктированіи инженерныхъ сооруженій три условія должны быть выполнены: 1) условіе прочности, 2) условіе жесткости, 3) условіе устойчивости. Назначая размѣры инженерныхъ сооруженій такимъ образомъ, чтобы напряженія матеріала нигдѣ не превосходили нѣкоторыхъ опредѣленныхъ значеній, мы всегда можемъ удовлетворить условію первому. Второе условіе требуетъ такихъ соотношеній между размѣрами проэктируемыхъ частей, при которыхъ измѣненія формы конструкцій подъ дѣйствіемъ внѣшнихъ силъ не превосходили бы нѣкоторыхъ опредѣленныхъ нормъ. Не всегда бываетъ достаточно удовлетворить только этимъ двумъ условіямъ и приходится изслѣдовать также вопросъ объ устойчивости тѣхъ формъ равновѣсія проэктируемыхъ частей, которыя положены въ основаніе расчетовъ.

Возьмемъ, напримѣръ, случай сжатія цилиндрическаго стержня силами, дѣйствующими по оси его. Не всегда является достаточнымъ произвести повѣрку на сжатіе. Какъ извѣстно, при значительной длинѣ прямолинейная форма деформированнаго стержня можетъ оказаться неустойчивой, стержень можетъ изогнуться. Въ силу этого размѣры сжимаемыхъ по оси стержней приходится назначать не по величинѣ допускаемыхъ на сжатіе напряженій, а по величинѣ тѣхъ критическихъ нагрузокъ, при которыхъ прямолинейная форма равновѣсія перестаетъ быть устойчивой.

Тотъ же вопросъ объ устойчивости деформаціи, приходится задавать себѣ и въ случаѣ тонкихъ пластинокъ, подверженныхъ дѣйствію системы внѣшнихъ силъ, лежащихъ въ срединной плоскости пластинки. За нѣкоторыми предѣлами плоская форма перестаетъ быть устойчивой, и пластинка можетъ выпучиться.

Настоящая работа посвящена изслѣдованію вопроса объ устойчивости плоской формы изгиба двутавровыхъ балокъ. Что друтавровыя высокія балки съ тонкой вертикальной стѣнкой подъ вліяніемъ силъ, дѣйствующихъ въ плоскости наибольшей жесткости, могутъ оказаться неустойчивыми—это фактъ общеизвѣстный. Мы будемъ различать два рода искривленныхъ формъ равновѣсія.

Въ первомъ случаѣ выпучивается вертикальная стѣнка балки, и первоначально двутавровое сѣченіе получаетъ видъ, представленный на черт. 1.

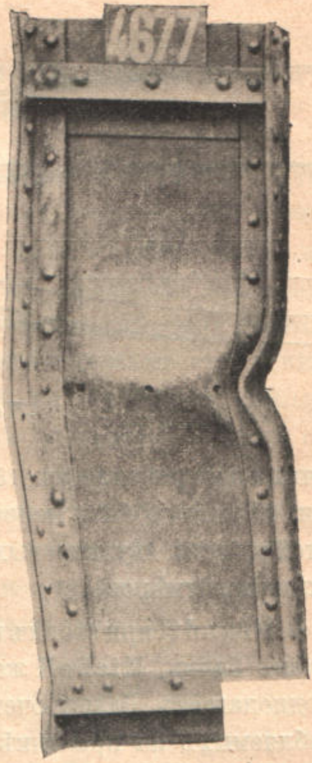


Черт. 1.

Насколько намъ извѣстно, теоретически этотъ случай нигдѣ не разработанъ. Практически, для обезпеченія устойчивости въ этомъ направленіи, задача рѣшается тѣмъ, что къ балкѣ приклепываютъ рядъ такъ называемыхъ уголковъ жесткости. Размѣры этихъ уголковъ и разстоянія между ними опредѣляются на основаніи совершенно произвольныхъ допущеній. Обыкновенно этихъ уголковъ вполнѣ достаточно, чтобы устранить возможность выпучиванія вертикальной стѣнки, но они не обезпечиваютъ устойчивости плоской формы изгиба, такъ какъ вполнѣ возможны искривленныя формы равновѣсія, при которыхъ не происходитъ выпучиванія вертикальной стѣнки, и изгибъ балки сопровождается скручиваньемъ ея, какъ это показано на фиг. 3.

Возможность подобной формы равновѣсія можетъ иногда наступить раньше, нежели формы (фиг. 1), и уголки жесткости нисколько не мѣняютъ сущности этого явленія.

До сихъ поръ нѣтъ экспериментальныхъ изслѣдованій, которыя могли бы дать эмпирическія формулы для опредѣленія величины тѣхъ критическихъ нагрузокъ, при которыхъ подобныя формы равновѣсія становятся возможными. Единственные [1]) извѣстные намъ опыты, произведенные надъ изгибомъ высокихъ двутавровыхъ балокъ, принадлежатъ Тетмайеру. Способъ приложенія внѣшней силы при производствѣ этихъ опытовъ устранялъ возможность свободнаго вращенія поперечныхъ сѣченій балки относительно ея оси [2]), вслѣдствіе чего получался видъ разрушенія показанный на черт. 2 Если бы крученіе балокъ при этихъ опытахъ не было затруднено, то для нѣкоторыхъ изъ нихъ (самыхъ высокихъ) плоская форма изгиба была бы неустойчива при напряженіяхъ ниже предѣла упругости желѣза.

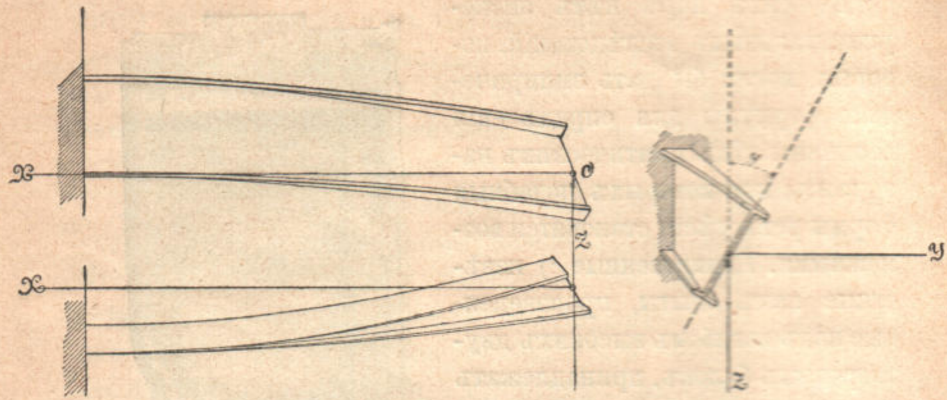


Черт. 2.

[1]) Уже по окончаніи настоящей работы я познакомился съ изслѣдованіемъ A. E. Guy: „The flexure of beams". Къ сожалѣнію авторъ не даетъ вовсе никакого теоретическаго освѣщенія изслѣдуемому явленію. Для опытовъ онъ пользовался деревянными балками и нерѣдко загружалъ ихъ далеко за предѣлы упругости, такъ что полученными имъ результатами никакъ нельзя воспользоваться для провѣрки теоретическихъ выводовъ.

[2]) Опыты производились на машинѣ Werder'а, подробности можно найти въ Communications d. laborat. d'essais de l'Ecole Polytechnique fédérale.

Что касается теоретическаго изслѣдованія интересующаго насъ вопроса, то здѣсь намъ извѣстны двѣ работы, принадлежащія L. Prandtl'ю [1]) и A. G. Michell'ю [2]) и появившіяся



Черт. 3 (a и b).

почти одновременно въ 1899 году. Результаты, полученные ими, не могутъ быть непосредственно приложены къ повѣркѣ устойчивости двутавровыхъ балокъ употребительныхъ въ техникѣ размѣровъ.

L. Prandtl при своихъ выводахъ пренебрегаетъ жесткостью полокъ балки, Michell же, чтобы устранить вліяніе полокъ, предполагаетъ балки очень длинными. Такъ какъ въ употребляемыхъ на практикѣ балкахъ нельзя считать длину ихъ очень большой по сравненію съ высотой, то пренебрегать вліяніемъ жесткости полокъ никакъ нельзя.

Въ настоящей работѣ мы поставили себѣ задачу ввести при опредѣленіи величины критическихъ нагрузокъ вліяніе жесткости полокъ и такимъ образомъ получить формулы, по которымъ можно было бы производить провѣрку устойчивости балокъ въ конкретныхъ случаяхъ, напримѣръ при расчетѣ продольныхъ и поперечныхъ балокъ мостовъ или длинныхъ двутавровыхъ балокъ мостовыхъ катучихъ крановъ.

---

[1]) Ludwig Prandtl, „Kipp-Erscheinungen", November, 1899 г.

[2]) A. G. Michell, „Elastic Stability of long Beams under Transverse Forces", Philosophical Mag. II 1899.

Такъ какъ въ разсматриваемыхъ формахъ равновѣсія существенную роль играетъ крученіе, то нашу работу придется начать съ задачи о крученіи двутавровыхъ балокъ.

Скручиваніе двутавровой балки, одинъ конецъ которой задѣланъ неподвижно.

§ 2. Подъ скручиваніемъ стержней подразумѣваютъ такой видъ деформаціи, при которомъ въ поперечныхъ сѣченіяхъ стержня будутъ имѣть мѣсто только сдвигающія напряженія. При этомъ только въ случаѣ кругового и кольцевого поперечнаго сѣченія, сѣченія эти и послѣ скручиванья остаются плоскими; во всѣхъ другихъ случаяхъ отдѣльныя частицы, лежащія въ одномъ и томъ же сѣченіи, перемѣщаются при скручиваніи не только въ плоскости сѣченія, но и по направленію оси стержня, при чемъ это послѣднее перемѣщеніе различно для различныхъ точекъ поперечнаго сѣченія.

Если мы скручиваемый стержень подчинимъ тому условію, чтобы одно или нѣсколько поперечныхъ сѣченій оставались плоскими и послѣ деформаціи, то ясно, что это повлечетъ за собой перераспредѣленіе напряженій по поперечнымъ сѣченіямъ. Кромѣ напряженій сдвигающихъ должны будутъ появиться также и нормальныя. Въ такихъ случаяхъ уже нельзя будетъ, вообще говоря, пользоваться для опредѣленія угла закручиванья обыкновенными формулами сопротивленія матеріаловъ, не оцѣнивъ предварительно, насколько сильно вліяніе закрѣпленій отдѣльныхъ поперечныхъ сѣченій.

Если мы назовемъ черезъ M — скручивающій моментъ,

φ — уголъ закручиванія,

C — жесткость при крученіи (Torsional rigidity) [1]),

то для опредѣленія угла закручиванія стержней со свободными концами или стержней, поперечные размѣры которыхъ малы по

[1]) Love, т. II, стр. 66.

сравненію съ длиной, мы можемъ пользоваться извѣстной формулой строительной механики

$$M = C \cdot \varphi' \tag{1}$$

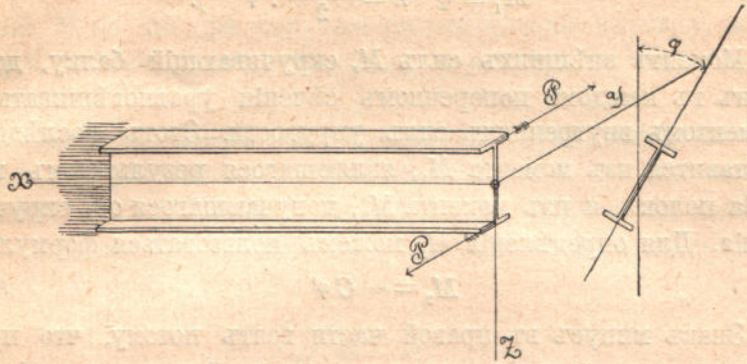
Въ случаѣ балки двутавроваго пеперечнаго сѣченія вліяніе закрѣпленія значительно; оно сильно возрастаетъ съ увеличеніемъ ширины полокъ. Непосредственно пользоваться формулой (1) въ этомъ случаѣ нельзя, и мы постараемся ввести еще добавочный членъ съ такимъ разсчетомъ, чтобы хотя приблизительно было учтено вліяніе жесткости полокъ.

Для опредѣленія этого добавочнаго члена мы займемся наиболѣе простымъ случаемъ: балка однимъ концомъ закрѣплена неподвижно, а къ другому концу приложенъ скручивающій моментъ.

Введемъ обозначенія, которыми мы будемъ пользоваться въ дальнѣйшемъ нашемъ изложеніи. Обозначимъ черезъ B_1 и B_2 величины EJ_1 и EJ_2 (principal flexural rigidities), гдѣ E модуль упругости матеріала, а J_1 и J_2 наибольшій и наименьшій моменты инерціи поперечнаго сѣченія балки, черезъ D величину EJ_3, гдѣ J_3 наибольшій моментъ инерціи поперечнаго сѣченія одной полки.

Начало координатъ помѣстимъ въ центрѣ тяжести поперечнаго сѣченія, соотвѣтствующаго свободному концу балки, ось X-овъ направимъ по оси балки, расположенной горизонтально, ось Z-овъ вертикально внизъ, а ось Y-овъ перпендикулярно къ плоскости XZ въ направленіи указанномъ на чертежѣ 4. Въ такомъ случаѣ система координатныхъ осей XYZ будетъ составлять правовинтовую систему.

Пусть скручиванье осуществляется парой силъ, направленіе которой узазано на чертежѣ. Подъ дѣйствіемъ этой пары отдѣльныя поперечныя сѣченія балки поворотятся на нѣкоторый перемѣнный уголъ φ. Такъ какъ другой конецъ балки предполагается задѣланнымъ, то скручиванье сопровождается изгибомъ полокъ. При малыхъ углахъ закручиванія φ (на практикѣ это всегда имѣетъ мѣсто) изгибъ полокъ въ плоскости XZ малъ по сравненію съ изгибомъ ихъ въ плоскости XY и потому въ дальнѣйшемъ будемъ принимать въ расчетъ только этотъ послѣднiй.



Черт. 4.

Прогибы срединной линiи каждой полки очень просто выражаются черезъ уголъ закручиванiя и высоту балки. Изъ чертежа 4 видно, что

$$y = \frac{h}{2} \cdot \sin \varphi$$

или при малыхъ углахъ φ можемъ sin замѣнить дугой, тогда будемъ имѣть

$$y = \frac{h}{2} \cdot \varphi.$$

Изгибу полокъ соотвѣтствуетъ появленiе сдвигающихъ напряженiй въ плоскостяхъ поперечныхъ сѣченiй полокъ. Для опредѣленiя равнодѣйствующей Q всѣхъ сдвигающихъ напряженiй въ какомъ либо поперечномъ сѣченiи полки будемъ имѣть на основанiи теоремы Шведлера

$$Q = \frac{dM}{dx} = D \frac{d^3y}{dx^3}$$

или, подставляя вмѣсто y его выраженiе черезъ φ, получимъ

$$Q = \frac{hD}{2} \cdot \varphi'''.$$

Перерѣзывающія силы Q дадутъ пару, моментъ которой очевидно будетъ

$$M_1 = Q \cdot h = \frac{h^2 \cdot D}{2} \cdot \varphi''' \text{ [1]}). \tag{2}$$

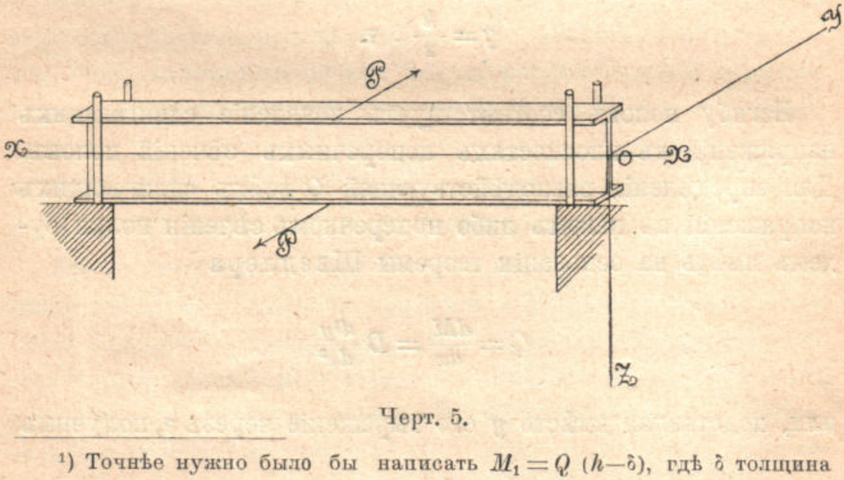
Моментъ внѣшнихъ силъ M, скручивающій балку, долженъ въ каждомъ поперечномъ сѣченіи уравновѣшиваться моментомъ внутреннихъ силъ упругости. Этотъ послѣдній составится изъ момента M_1, являющагося результатомъ изгиба полокъ, и изъ момента M_2, получающагося отъ скручиванія. Для опредѣленія M_2 можемъ пользоваться формулой

$$M_2 = - C \varphi' \tag{1'}$$

Знакъ минусъ въ правой части взятъ потому, что при нашемъ расположеніи координатныхъ осей съ возрастаніемъ x убываетъ уголъ φ. На основаніи формулъ (1)' и (2) для момента внѣшнихъ силъ M будемъ имѣть

$$M = -[C \cdot \varphi' + \frac{D \cdot h^2}{2} \cdot \varphi''' \tag{3}$$

Полученная формула (3) будетъ положена въ основаніе дальнѣйшихъ выводовъ. Насколько точно она учитываетъ вліяніе жесткости полокъ можно будетъ сказать только на основаніи опытовъ. Для осуществленія задѣлки поперечнаго сѣченія балки я при производствѣ опытовъ пользуюсь располо-



Черт. 5.

[1]) Точнѣе нужно было бы написать $M_1 = Q\,(h - \delta)$, гдѣ δ толщина полки, но такъ какъ практически δ мало по сравненію съ h, то мы можемъ имъ пренебречь.

женіемъ указаннымъ на чертежѣ 5. Концы балки A и B не имѣютъ возможности вращаться вокругъ горизонт. оси, пара силъ прикладывается къ срединному поперечному сѣченію. Ясно что при скручиваніи это сѣченіе въ силу симметріи должно остаться плоскимъ и его можно считать задѣланнымъ.

Перейдемъ теперь къ опредѣленію угла закручиванія балки при расположеніи указанномъ на черт. 4. Для этого придется интегрировать ур-іе (3). Мы для упрощенія выкладокъ введемъ одно обозначеніе, которымъ будемъ и дальше пользоваться, именно положимъ

$$\frac{2\,C}{D\,.\,h^2} = \frac{1}{a^2}\,.$$

Не трудно видѣть, что a имѣетъ измѣреніе длины.

Уравненіе (3) перепишется такъ

$$\varphi''' - \frac{1}{a^2}\,.\,\varphi' - \frac{2\,M}{D\,.\,h^2} = 0. \qquad (3)'$$

Рѣшеніе соотвѣтствующаго уравненія безъ послѣдняго члена очевидно будетъ

$$\varphi = Q\,.\,\sin h\,.\,\frac{x}{a} + N\cos h\,.\,\frac{x}{a} + P,$$

гдѣ Q, N, P — произвольныя постоянныя.

Частное рѣшеніе уравненія (3)′ будетъ

$$\varphi = -\frac{M}{C}\,.\,x.$$

На основаніи этого получимъ полный интегралъ ур-ія (3)′

$$\varphi = Q\,.\,\sin h\,.\,\frac{x}{a} + N\cos h\,.\,\frac{x}{a} - \frac{M}{C}\,.\,x + P \qquad (4)$$

Произвольныя постоянныя могутъ быть опредѣлены на основаніи слѣдующихъ условій закрѣпленія концовъ:

1) При $x = l$; $\varphi = 0$, такъ какъ сѣченіе, соотвѣтствующее плоскости задѣлки, не можетъ повернуться.

2) При $x = l$; $\varphi' = 0$. Такъ какъ полки изгибаются такъ, что касательныя къ ихъ срединнымъ линіямъ въ плоскости задѣлки параллельны оси X-овъ, то слѣдовательно

$$y' = \frac{h}{2}\,.\,\varphi' = 0.$$

3) При $x=0$; $\varphi''=0$. Это можно написать на основанiи того, что на свободномъ концѣ балки приложены силы, лежащiя въ плоскости поперечнаго сѣченiя и нѣтъ силъ нормальныхъ къ этому сѣченiю, слѣдовательно

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{h}{2}\cdot\varphi''=0.$$

Изъ общаго интеграла (4) дифференцированiемъ находимъ

$$\varphi'=\frac{Q}{a}\cdot\cos h\cdot\frac{x}{a}+\frac{N}{a}\cdot\sin h\cdot\frac{a}{x}-\frac{M}{C} \tag{5}$$

$$\varphi''=\frac{Q}{a^2}\cdot\sin h\cdot\frac{x}{a}+\frac{N}{a^2}\cdot\cos h\cdot\frac{x}{a} \tag{6}$$

$$\varphi'''=\frac{Q}{a^3}\cdot\cos h\cdot\frac{x}{a}+\frac{N}{a^3}\cdot\sin h\cdot\frac{x}{a} \tag{7}$$

Изъ выраженiя (6) на основанiи третьяго условiя заключаемъ, что

$$N=0.$$

Постоянную Q опредѣлимъ изъ выраженiя (5) на основанiи условiя (2)

$$Q=\frac{a\cdot M}{C}\ \frac{1}{\cos h\frac{l}{a}}.$$

Подставляя найденныя для Q и N значенiя въ выраженiе (4), мы, на основанiи перваго условiя, будемъ имѣть для величины P значенiе

$$P=\frac{M}{C}\cdot l-\frac{aM}{C}\cdot\operatorname{tg}h\left(\frac{l}{a}\right)$$

Опредѣливъ такимъ образомъ значенiя всѣхъ произвольныхъ постоянныхъ, мы для вычисленiя угла закручиванiя въ любомъ сѣченiи будемъ имѣть формулу

$$\varphi=\frac{M}{C}\left[l-x+\frac{a}{\cos h\left(\frac{l}{a}\right)}\cdot\sin h\left(\frac{x}{a}\right)-a\operatorname{tg}h.\left(\frac{l}{a}\right)\right] \tag{8}$$

Выписываемъ здѣсь же значенiя производныхъ отъ φ

$$\left.\begin{aligned}\varphi'&=\frac{M}{C}\left(\frac{\cos h\left(\frac{x}{a}\right)}{\cos h\left(\frac{l}{a}\right)}-1\right)\\ \varphi'''&=\frac{M}{C\cdot a^2}\cdot\frac{\cos h\left(\frac{x}{a}\right)}{\cos h\left(\frac{l}{a}\right)}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

При $x=0$, т. е. для сѣченія, соотвѣтствующаго свободному концу балки, уголъ закручиванья φ будетъ имѣть значеніе

$$\varphi_0=\frac{M}{C}\left[l-a\operatorname{tg}h\left(\frac{l}{a}\right)\right] \tag{10}$$

Если бы мы не приняли во вниманіе жесткости полокъ, то на основаніи формулы (1) имѣли бы для угла закручиванія значеніе

$$\varphi_0=\frac{M\,.\,l}{C}\,.$$

Добавочный членъ въ правой части формулы (10) даетъ намъ величину уменьшенія угла закручиванія и эта величина тѣмъ больше, чѣмъ больше D—жесткость при изгибѣ каждой полки.

Всякое увеличеніе ширины полокъ увеличиваетъ D и слѣдовательно уменьшаетъ уголъ закручиванія, что и нужно было ожидать заранѣе. Въ тѣхъ случаяхъ, когда отношеніе $\frac{l}{a}$ въ нѣсколько разъ больше единицы, $tg.h\left(\frac{l}{a}\right)$ можно съ достаточной точностью положить равнымъ единицѣ и тогда формула (10) перепишется такъ

$$\varphi_0=\frac{M}{C}\,(l-a) \tag{10'}$$

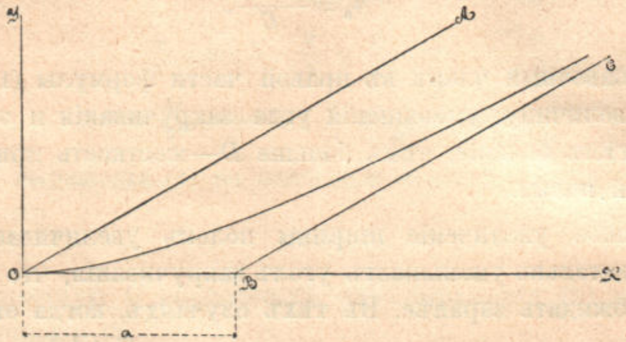
т. е. уголъ закручиванія балки съ однимъ задѣланнымъ концомъ равняется углу закручиванія балки со свободными концами, но меньшей длины. Это уменьшеніе длины a мѣняется съ измѣненіемъ жесткости полокъ.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда l мало по сравненію съ a, т. е. когда разсматриваются сѣченія близкія къ задѣланному концу, мы можемъ $tg.h$ разложить въ рядъ по возрастающимъ степенямъ $\frac{l}{a}$ и для вычисленія угла φ будемъ имѣть

$$\varphi=\frac{M\,.\,l}{C}\left[1-\frac{\frac{l}{a}-\frac{1}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^3+\frac{2}{15}\left(\frac{l}{a}\right)^5-\ldots}{\frac{l}{a}}\right]=$$

$$=\frac{M\,.\,l}{C}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{l}{a}\right)^2-\frac{2}{15}\left(\frac{l}{a}\right)^4+\ldots\right].$$

Чтобы наглядно представить, какъ при заданномъ поперечномъ сѣченіи балки и заданномъ скручивающемъ моментѣ, мѣняется уголъ закручиванія въ зависимости отъ длины, можно воспользоваться графическимъ построеніемъ. Для этого по оси X-овъ будемъ откладывать длины l, а по оси ординатъ соотвѣтствующіе углы закручиванія φ. Пока оба конца балки свободны, діаграмма представится въ видѣ наклонной прямой OA, проходящей черезъ начало координатъ; см. черт. 6.



Черт. 6.

Въ случаѣ одного задѣланнаго конца мы вмѣсто прямой получимъ нѣкоторую кривую линію, касательную къ оси X-овъ въ началѣ координатъ и асимптотически приближающуюся къ прямой BC. Относительно построенія этой прямой замѣтимъ, что она параллельна OA и пересѣкаетъ ось X-овъ въ точкѣ B такъ, что

$$OB = a.$$

Уравненіе прямой слѣдовательно будетъ:

$$y = \frac{M}{C}(x - a),$$

что соотвѣтствуетъ полученной нами выше формулѣ (10').

При производствѣ опытовъ, а также и въ дальнѣйшемъ нашемъ изложеніи понадобятся нѣкоторыя численныя значенія множителя $\left(1 - \frac{a}{l}\, tg.h\, \frac{l}{a}\right)$ при различныхъ значеніяхъ $\frac{l}{a}$ и потому мы приводимъ ихъ здѣсь въ отдѣльной таблицѣ.

$\frac{l^2}{a^2}$	$1-\frac{a}{l}\,tg.h\,\frac{l}{a}$	$\frac{l^2}{a^2}$	$1-\frac{a}{l}\,tg\,h\,\frac{l}{a}$
1	0,238	12	0,711
2	0,372	16	0,750
4	0,518	24	0,796
8	0,648	32	0,823
		40	0,842

Разсмотримъ теперь, какъ мѣняется крученіе φ' по длинѣ балки. Пока оба конца свободны, φ' — величина постоянная, равная $-\frac{M}{C}$. Въ случаѣ закрѣпленнаго конца φ' перемѣнное, какъ это видно изъ выше полученной нами формулы (9). Наибольшее значеніе φ' получаетъ у свободнаго конца, гдѣ на основаніи (9)

$$\varphi' = \frac{M}{C}\left(\frac{1}{\cos h\left(\frac{l}{a}\right)} - 1\right)$$

Гиперболическій косинусъ очень быстро растетъ съ величиной $\frac{l}{a}$, и потому при значительныхъ длинахъ и при маломъ a, φ' очень близко къ величинѣ $-\frac{M}{C}$; т. е. задѣлка мало вліяетъ на величину крученія и свободнаго конца. Если мы будемъ брать сѣченія близкія къ задѣланному концу, то φ' на основаніи той же формулы (9) приближается къ нулю и слѣдовательно силы упругости, дѣйствующія въ этихъ сѣченіяхъ и уравновѣшивающія моментъ внѣшнихъ силъ, являются слѣдствіемъ изгиба полокъ, а не крученія.

Этимъ мы закончимъ общее разсмотрѣніе вопроса о крученіи двутавровыхъ балокъ и перейдемъ къ численному опредѣленію величинъ C и a по заданнымъ поперечнымъ размѣрамъ балки.

Вычисленіе величины C.

§ 3. Въ предыдущія формулы, а также и въ выраженія для критическихъ нагрузокъ, которыя нами будутъ ниже получены, входитъ величина C (Torsional rigidity) жесткость балки при крученіи. Опытнымъ путемъ опредѣлить эту величину съ достаточной точностью не трудно; но при проэктированіи, когда имѣются только геометрическіе размѣры конструкцій, необходимо имѣть способы опредѣлять величину C аналитически. Теорія упругости въ настоящее время даетъ возможность рѣшить точно эту задачу только для нѣсколькихъ наиболѣе простыхъ видовъ поперечнаго сѣченія, какъ напримѣръ прямоугольникъ, эллипсъ и др. Для двутавроваго сѣченія точнаго рѣшенія пока нѣтъ и придется для вычисленія интересующей нась величины употребить какой-либо приближенный пріемъ.

Мы для этого воспользуемся извѣстной гидродинамической аналогіей и дальнѣйшимъ ея развитіемъ, недавно опубликованнымъ профессоромъ Гёттингенскаго университета L. Prandtl'емъ [1]).

Если черезъ t_{xy} и t_{xz} назовемъ составляющія сдвигающихъ напряженій при крученіи и положимъ

$$t_{xy} = -\frac{d\psi}{dz}\,,\ t_{xz} = \frac{d\psi}{dy}\,,$$

то задача о крученіи приведется къ рѣшенію уравненія.

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} = 2\,.\,G\,.\,\varphi' \qquad (1)$$

гдѣ G модуль упругости при сдвигѣ, а φ' имѣетъ прежнее значеніе. Prandtl замѣтилъ полную аналогію между этимъ уравненіемъ и уравненіемъ поверхности, по которой прогибается мембрана, натянутая съ нѣкоторымъ постояннымъ напряженіемъ S и нагруженная постоянной нагрузкой p на единицу площади.

---

[1]) „Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Stäben von beliebigem Querschnitt". Jahresbericht d. deut. math. Vereinigung. 13 Bd. 1 Heft.

Если черезъ u назовемъ ординаты этой поверхности, то уравненіе ея напишется такъ

$$\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{p}{S} \qquad (2)$$

Для полнаго совпаденія необходимо положить

$$\psi=k\ \ u,$$

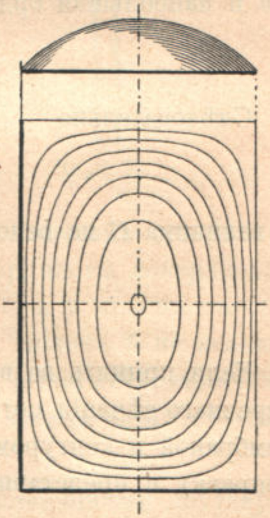
гдѣ

$$k=\frac{2\,.\,G\,.\,\varphi'\,.\,S}{p}\,.$$

На основаніи этой аналогіи Prandtl вывелъ слѣдующаго рода зависимость между распредѣленіемъ напряженій по поперечному сѣченію и поверхностью образуемой мембраной.

I. Если мембрана, натянутая на контуръ, соотвѣтствующій поперечному сѣченію скручиваемаго стержня, выпучится, благодаря равномѣрно распредѣленному по ней давленію, то линіи сѣченія полученной такимъ образомъ кривой поверхности плоскостями, параллельными плоскости контура, будутъ представлять собой линіи напряженій, т. е. такія линіи, касательныя къ которымъ въ любой точкѣ даютъ направленіе напряженія въ соотвѣтствующей точкѣ поперечнаго сѣченія.

Вычертивъ систему такихъ линій можно получить наглядную картину распредѣленія напряженій по сѣченію. На чертежѣ 7 представленъ видъ этихъ линій въ случаѣ прямоугольнаго поперечнаго сѣченія.



Черт. 7.

II. Величина напряженія въ любой точкѣ пропорціональна углу, составляемому линіей наибольшаго ската съ плоскостью контура въ соотвѣтствующей точкѣ кривой поверхности, или, что тоже, пропорціональна густотѣ линій напряженій.

III. Объемъ V, заключающійся между плоскостью контура и поверхностью мембраны, пропорціоналенъ жесткости стержня C.

Именно

$$C = \frac{4 \, . \, G \, . \, S}{p} \, . \, V \tag{3}$$

Эти три положенія даютъ возможность экспериментальнымъ путемъ установить законъ распредѣленія напряженій при самыхъ разнообразныхъ контурахъ поперечнаго сѣченія. Въ случаѣ тонкостѣнныхъ балокъ этими положеніями можно воспользоваться для приближеннаго вычисленія жесткости C. Начнемъ съ простѣйшаго случая, когда поперечное сѣченіе представляетъ собой прямоугольникъ, ширина котораго b мала по сравненію съ длиной h. Объемъ V въ данномъ случаѣ съ достаточной точностью можно замѣнить объемомъ параболическаго цилиндра, площадь основанія котораго будетъ $b.h$ и наибольшая ордината

$$u = \frac{pb^2}{8S}$$

Слѣдовательно

$$V = \frac{2}{3} \cdot \frac{pb^2}{8S} . h . b,$$

и величина C на основаніи положенія III будетъ

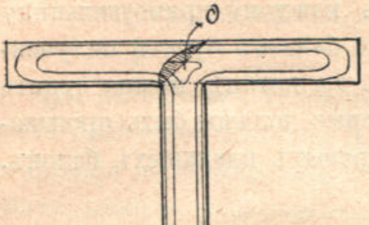
$$C = \frac{1}{3} . h . b^3 . G \tag{4}$$

Если принять во вниманіе вліяніе короткихъ сторонъ поперечнаго сѣченія, которыя слегка уменьшаютъ объемъ между мембраной и контуромъ, то придется въ формулу (4) внести поправку и представить ее въ такомъ видѣ

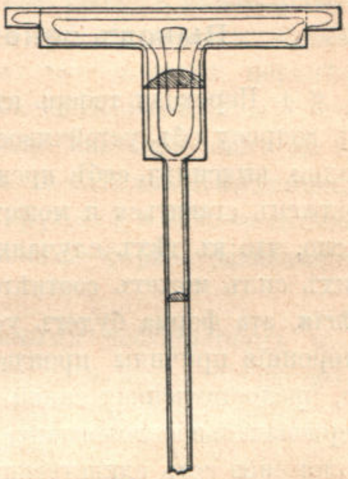
$$C = \frac{1}{3} . b^3 (h - \alpha b) G \tag{5}$$

коэфиціентъ α по сравненію съ точной формулой оказывается равнымъ 0,63. Формула (5) показываетъ, что въ тѣхъ случаяхъ, когда b мало по сравненію съ h, поправкой можно пренебречь и пользоваться формулой (4).

Переходя къ двутавровому поперечному сѣченію, представленному на черт. 8, замѣтимъ, что и въ этомъ случаѣ кривую поверхность мембраны въ мѣстахъ, удаленныхъ отъ краевъ полки и отъ точекъ O,O, можно считать за поверхность параболическаго цилиндра.



Черт. 8.



Черт. 9.

Въ точкахъ O,O, соотвѣтствующихъ мѣстамъ соединенія полокъ со стѣнкой двутавровой балки, ординаты поверхности мембраны имѣютъ наибольшее значеніе, а у краевъ полокъ наименьшее. Пока толщина стѣнки и полокъ b не велика, мы съ достаточной точностью можемъ вычислить величину C, примѣняя формулу (4) отдѣльно къ поперечному сѣченію стѣнки и полокъ.

Когда приходится имѣть дѣло съ клепанными двутавровыми балками, то тогда вычисленіе C возможно съ значительно меньшей точностью. Мы будемъ считать, что треніе между составными частями балки, обусловленное заклепочными соединеніями настолько значительно, что составное сѣченіе можно считать сплошнымъ, какъ то показано на чертежѣ 9.

Тогда для приблизительной оцѣнки величины C можно сѣченіе разбить на рядъ прямоугольниковъ, какъ то пунктиромъ показано на черт. 9, и къ каждому прямоугольнику примѣнить формулу (4). Насколько близокъ будетъ полученный такимъ образомъ результатъ къ истинѣ, можно судить только на основаніи опытовъ, которые должны быть произведены надъ скручиваньемъ двутавровыхъ клепаныхъ балокъ.

Выводъ основныхъ уравненій.

§ 4. Переходя теперь къ главной нашей задачѣ, именно къ вопросу объ устойчивости плоскаго изгиба двутавровой балки, выяснимъ себѣ прежде всего, когда этотъ вопросъ долженъ ставиться и можетъ имѣть практическое значеніе. Ясно, что въ тѣхъ случаяхъ, когда заданной системѣ внѣшнихъ силъ можетъ соотвѣтствовать только одна форма равновѣсія, эта форма будетъ устойчивой. Если какія либо постороннія причины произведутъ малыя измѣненія формы, то, предоставленная самой себѣ, система вернется въ свое первоначальное положеніе, такъ какъ это положеніе по предположенію есть единственная возможная форма равновѣсія. Иное дѣло, когда одной и той же системѣ внѣшнихъ силъ могутъ соотвѣтствовать нѣсколько формъ равновѣсія. Въ такомъ случаѣ система даже при незначительномъ отклоненіи отъ положенія равновѣсія можетъ къ нему не вернуться, а принять другую возможную форму равновѣсія. Для опредѣленія, какая изъ возможныхъ формъ равновѣсія будетъ устойчивой, нужно только выяснить, которой изъ нихъ соотвѣтствуетъ минимумъ потенціальной энергіи. Этимъ совершенно общимъ принципомъ бываетъ иногда трудно воспользоваться; въ такихъ случаяхъ, при рѣшеніи вопроса объ устойчивости, можно руководствоваться слѣдующимъ признакомъ—если имѣются двѣ возможныя формы равновѣсія тѣла, то та изъ нихъ, которая мало отличается отъ формы, соотвѣтствующей ненапряженному состоянію, будетъ неустойчивой [1]).

[1]) Love, т. II, стр. 291.

Такимъ образомъ неустойчивыми будутъ прямолинейная форма сжимаемаго цилиндрическаго стержня, плоская форма пластинки, сжимаемой силами, дѣйствующими въ ея плоскости и др.

При какихъ же условіяхъ можетъ возникнуть возможность появленія нѣсколькихъ формъ равновѣсія? Пока всѣ измѣренія деформируемаго тѣла суть величины одного порядка, малымъ деформаціямъ, которыя только и разсматриваются въ теоріи упругости, будутъ соотвѣтствовать малыя измѣненія формы тѣла, а слѣдовательно и малыя перемѣщенія точекъ приложенія внѣшнихъ силъ. Вслѣдствіе этого можно пренебречь разностью между системой силъ до и послѣ деформаціи и доказать, какъ то сдѣлалъ Кирхгофъ, однозначность рѣшенія уравненій упругости, а слѣдовательно и невозможность появленія нѣсколькихъ формъ равновѣсія въ подобныхъ случаяхъ.

Дѣло обстоитъ иначе, когда малымъ деформаціямъ можетъ соотвѣтствовать весьма значительное измѣненіе формы, какъ то имѣетъ мѣсто въ случаѣ тонкихъ пластинокъ и стержней. Уравненія равновѣсія напишутся различно въ зависимости отъ того, беремъ ли мы систему внѣшнихъ силъ, соотвѣтствующую недеформированному или деформированному состоянію тѣла.

Все то, что сказано относительно тонкихъ пластинокъ, при нѣкоторыхъ условіяхъ можетъ быть отнесено и къ двутавровымъ балкамъ самыхъ употребительныхъ въ техникѣ поперечныхъ сѣченій. Дѣло въ томъ, что стремленіе получить экономію въ вѣсѣ балки заставляетъ главную массу матеріала относить возможно дальше отъ оси балки. Получаются балки съ большой высотой вертикальной стѣнки; ширина же полокъ балки по конструктивнымъ соображеніямъ не можетъ быть значительно измѣнена. Вслѣдствіе этого одинъ изъ главныхъ моментовъ инерціи поперечнаго сѣченія во много разъ превосходитъ по величинѣ другой. Если мы сохранимъ прежнія наши обозначенія B_1 и B_2 для главныхъ жесткостей балки при изгибѣ и C для жесткости при крученіи, то въ случаѣ мостовыхъ балокъ нерѣдко, напримѣръ, бываетъ что

$$\frac{B_2}{B_1} < \frac{1}{100} \text{ и } \frac{C}{B_1} < \frac{1}{3000}.$$

При такихъ условіяхъ прогибъ балки въ направленіи перпендикулярномъ къ плоскости вертикальной стѣнки при однихъ и тѣхъ же напряженіяхъ можетъ во много разъ превосходить прогибъ въ плоскости стѣнки, и слѣдовательно имѣются на лицо тѣ условія, при которыхъ становится возможнымъ появленіе нѣсколькихъ формъ равновѣсія. Замѣчу здѣсь, что даже въ томъ случаѣ, когда B_1 и B_2 величины одного порядка, возможна неустойчивость плоской формы изгиба, если только C мало по сравненію съ B_1 и B_2 (Это возможно было бы осуществить, придавъ полкамъ балки значительную ширину при малой толщинѣ какъ полокъ, такъ и вертикальной стѣнки).

Переходя теперь къ опредѣленію возможныхъ формъ равновѣсія двутавровой балки, изгибаемой силами дѣйствующими въ плоскости вертикальной стѣнки, замѣтимъ, что одна изъ этихъ формъ для насъ извѣстна вполнѣ — это форма плоскаго изгиба. Такъ какъ длина балки не очень велика по сравненію съ высотой (на практикѣ $\frac{h}{l} = \frac{1}{5} - \frac{1}{12}$), то эта извѣстная намъ форма равновѣсія будетъ при малыхъ деформаціяхъ весьма мало отличаться отъ первоначальной формы балки въ ея ненапряженномъ состояніи и, слѣдовательно, на основаніи вышеприведеннаго признака, будетъ формой неустойчивой. Каковы возможныя искривленныя формы изгиба намъ пока неизвѣстно, но во всякомъ случаѣ онѣ могутъ весьма значительно отличаться отъ первоначальной ненапряженной формы балки. Опредѣлить ихъ мы постараемся, исходя изъ того общаго положенія, что возможность появленія нѣсколькихъ формъ равновѣсія наступаетъ только при вполнѣ опредѣленной зависимости между размѣрами балки и величинами дѣйствующихъ силъ.

Пусть α опредѣляетъ эту зависимость, и пока α меньше неизвѣстнаго намъ еще предѣла α_0, плоская форма изгиба есть единственная и потому устойчивая форма равновѣсія. Въ тѣхъ же случаяхъ когда $\alpha > \alpha_0$, возможны по крайней мѣрѣ двѣ формы равновѣсія, плоскій изгибъ и искривленная форма изгиба, сопровождаемая крученіемъ. Первая изъ нихъ неустойчива, а вторая устойчива. Величину α_0 мы найдемъ изъ слѣдующихъ соображеній. При $\alpha > \alpha_0$ возможно существованіе искривленной формы изгиба, и въ уравненія, опредѣляющія эту форму, величина α войдетъ, какъ параметръ. Непрерывно мѣняя эту величину, мы будемъ непрерывно измѣнять и видъ искривленной формы изгиба балки. Чѣмъ ближе будетъ α къ α_0, тѣмъ меньше отличается искривленная форма отъ плоской и въ предѣлѣ эти двѣ формы сливаются въ одну критическую форму. Если наше предположеніе относительно возможности появленія искривленной формы изгиба вѣрно, то для величины α_0 мы должны изъ уравненій, опредѣляющихъ искривленную форму, получить вполнѣ опредѣленное рѣшеніе.

При выводѣ основныхъ уравненій мы будемъ предполагать ось балки горизонтальной и стѣнку балки расположенной въ вертикальной плоскости. За начало координатъ примемъ центръ тяжести лѣваго концевого поперечнаго сѣченія. Оси X, Y, Z направимъ, какъ показано на черт. 10.

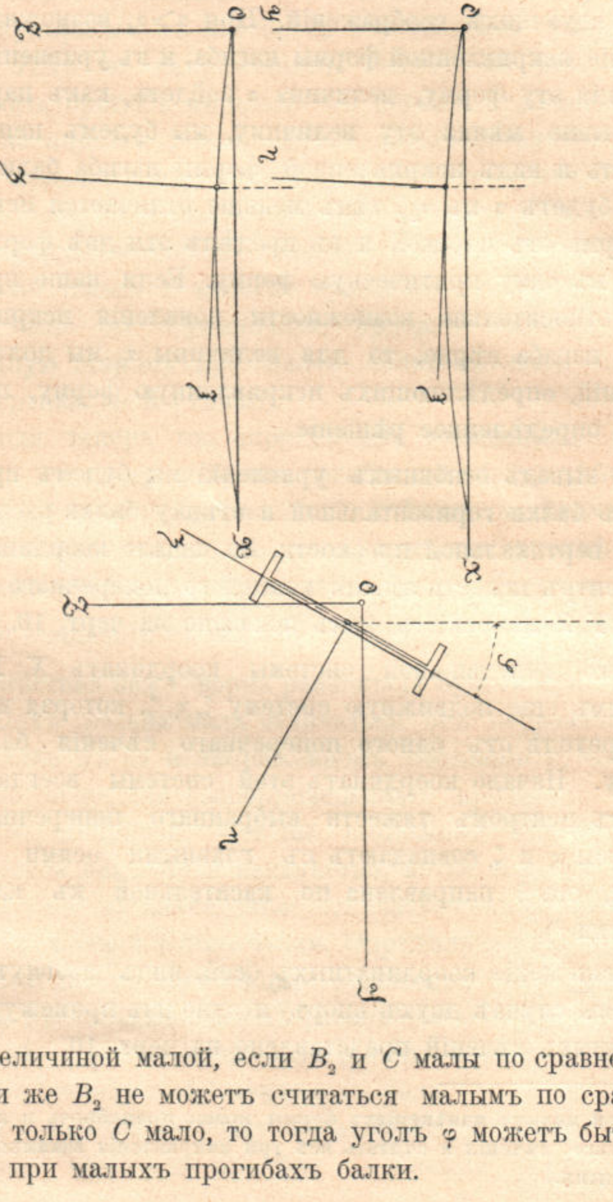
Кромѣ неподвижной системы координатъ X, Y, Z мы построимъ еще подвижную систему ξ, η, ζ, которая мѣняется при переходѣ отъ одного поперечнаго сѣченія балки къ другому. Начало координатъ этой системы всегда совпадаетъ съ центромъ тяжести выбраннаго поперечнаго сѣченія, оси η и ζ совпадаютъ съ главными осями инерціи сѣченія, ось ξ направлена по касательной къ изогнутой оси балки [1]).

Расположеніе координатныхъ осей, видъ изогнутой оси балки (въ случаѣ двухъ опоръ) и одно изъ промежуточныхъ поперечныхъ сѣченій представлено на черт. 10.

---

[1]) При малыхъ измѣненіяхъ формы можно пренебречь искаженіемъ поперечнаго сѣченія и считать всѣ три направленія взаимно перпендикулярными.

Величина внѣшнихъ силъ всегда можетъ быть подобрана такимъ образомъ, чтобы прогибы балки въ плоскостяхъ XY и XZ были малыми величинами одного порядка. Что касается угла поворота поперечныхъ сѣченій φ, то онъ будетъ



Черт. 10.

также величиной малой, если B_2 и C малы по сравненію съ B_1. Если же B_2 не можетъ считаться малымъ по сравненію съ B_1 и только C мало, то тогда уголъ φ можетъ быть и не малымъ при малыхъ прогибахъ балки.

Въ обоихъ этихъ случаяхъ для кривизны изогнутой оси балки въ плоскостяхъ $\xi\eta$ и $\xi\zeta$ можно пользоваться приближенными формулами.

$$k=\frac{d^2\eta}{d^2\xi};\quad \lambda=\frac{d^2\zeta}{d^2\xi}.$$

Кривизну кривой можно себѣ представить въ видѣ вектора [1]), отложеннаго по бинормали. Тогда кривизна проэкціи кривой на любую плоскость, проходящую черезъ касательную къ кривой, получится какъ проэкція вектора кривизны на нормаль къ этой плоскости.

Если воспользоваться этимъ представленіемъ и пренебречь малымъ угломъ наклоненія между касательной къ изогнутой оси балки и осью X-овъ, то на основаніи черт. 10 легко можно получить такія соотношенія:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}&=\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\varphi\\ \frac{d^2z}{d\xi^2}&=\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\varphi\end{aligned}\qquad (1)\ ^{2})$$

Если мы черезъ M_ξ, M_η, M_ζ назовемъ моменты внѣшнихъ силъ, дѣйствующихъ на лѣвую отсѣченную часть балки, относительно осей ξ, η, ζ, то на основаніи извѣстныхъ формулъ сопротивленія матеріаловъ можемъ написать

$$\begin{aligned}M_\zeta&=B_2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=B_2\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\varphi\right)\\ M_\eta&=B_1\frac{d^2z}{d^2\zeta}=B_1\left(\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\varphi\right)\end{aligned}\quad \dots\dots (2)$$

Выраженіе для момента M_ξ получимъ на основаніи формулы (3) § 2.

$$M_\xi=C\varphi'-\frac{Dh^2}{2}\cdot\varphi'''\quad \dots\dots\dots (3)$$

Уравненіями (2) и (3) мы будемъ пользоваться при разсмотрѣніи частныхъ случаевъ изгиба.

При составленіи моментовъ M_ξ, M_η, M_ζ нужно знать углы, составляемые осями ξ, η, ζ съ неподвижными осями X, Y, Z.

[1]) См. Love, т. II, стр. 60.

[2]) Въ этихъ выраженіяхъ вмѣсто $\cos\varphi$ взято 1 и φ вмѣсто $\sin\varphi$, что будетъ точно до $^1/_2\%$ при углахъ, не превосходящихъ $\frac{1}{10}$.

Пока уголъ φ малъ, а мы дальше и будемъ разсматривать только такіе случаи, можно пользоваться слѣдующей таблицей девяти косинусовъ

	ξ	η	ζ
X	1	$-\frac{dy}{dx}$	$-\frac{dz}{dx}$
Y	$\frac{dy}{dx}$	1	$-\varphi$
Z	$\frac{dz}{dx}$	φ	1

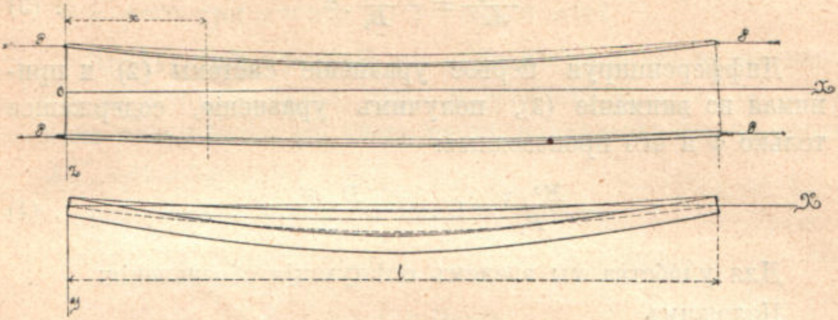
. . . (4)

Случай изгиба балки парами силъ.

§ 5. Въ томъ случаѣ, когда двутавровая балка изгибается парами силъ, приложенными по концамъ и дѣйствующими въ срединной плоскости вертикальной стѣнки балки, наша задача приводится къ рѣшенію обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, линейныхъ и съ постоянными коэфиціентами; вслѣдствіе чего на этомъ частномъ примѣрѣ, можетъ быть не имѣющемъ большого практическаго значенія, легче всего познакомиться съ сущностью интересующаго насъ явленія и сдѣлать нѣкоторыя заключенія, которыя въ дальнѣйшемъ помогутъ намъ при разсмотрѣніи случаевъ болѣе сложныхъ и трудно разрѣшимыхъ.

Общее расположеніе представлено на черт. 11. Концы балки предполагаются закрѣпленными такимъ образомъ, что концевыя поперечныя сѣченія не могутъ вращаться вокругъ оси X-овъ. Направленія, въ которыхъ дѣйствуютъ изгибающія пары, показаны на чертежѣ стрѣлками. Подъ дѣйствіемъ означенныхъ паръ балка изгибается въ плоскости ZX. Постепенно увеличивая моментъ M изгибающихъ паръ, мы можемъ достичь такой величины его M_k, при которой кромѣ плоской формы изгиба является возможной и другая не плоская форма равновѣсія. Для опредѣленія величины M_k

придется разсмотрѣть условія равновѣсія искривленной формы изгиба.



Черт. 11.

Возьмемъ произвольное поперечное сѣченіе балки въ разстояніи X отъ начала координатъ (черт. 11). Моменты M_ξ, M_η, M_ζ получимъ проэктированіемъ линейнаго момента M пары силъ на оси ξ, η, ζ. Если воспользоваться таблицей (4) предыдущаго параграфа, то не трудно получить для этихъ моментовъ слѣдующія значенія

$$
\begin{aligned}
M &= M\frac{dy}{dx} \\
M_\eta &= M \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\
M_\zeta &= -M\varphi
\end{aligned}
$$

На основаніи общихъ ур-ій (2) и (3) предыдущаго параграфа мы получимъ, выбравъ надлежащимъ образомъ знаки, систему уравненій, опредѣляющихъ искривленную форму изгиба

$$
\begin{aligned}
My' &= C\varphi' - \frac{Dh^2}{2}\cdot\varphi''' \\
M\varphi &= -B_2\left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\varphi\right) \qquad \ldots\ldots (2) \\
M &= -B_1\left(\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\varphi\right)
\end{aligned}
$$

Въ эти три уравненія входятъ три неизвѣстныхъ Y, Z и φ. Лѣвыя части нашихъ уравненій написаны въ томъ предположеніи, что φ мало и слѣдовательно въ правой части члены съ φ могутъ быть отброшены [1]). Тогда второе изъ уравненій (2) даетъ намъ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{B_2}\cdot\varphi \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

Дифференцируя первое уравненіе системы (2) и принимая во вниманіе (3), получимъ уравненіе, содержащее только φ и его производныя:

$$-\frac{M^2\cdot\varphi}{B_2} = C\cdot\varphi'' - \frac{D\cdot h^2}{2}\cdot\varphi^{IV}\ldots\ldots (4)$$

Для удобства мы введемъ слѣдующія обозначенія:

Положимъ

$$\frac{2C}{Dh^2} = \frac{1}{a^2};\quad \frac{2M^2}{B_2.D.h^2} = \frac{1}{d^4}\cdot\ \ldots\ldots (5)$$

Тогда уравненіе (4) перепишется такимъ образомъ:

$$\varphi^{IV} - \frac{1}{a^2}\cdot\varphi^{II} - \frac{1}{d^4}\cdot\varphi = 0 \quad \ldots\ldots (4')$$

Характеристическое уравненіе соотвѣтствующее (4)′ даетъ намъ два дѣйствительныхъ и два мнимыхъ корня. Корни эти будутъ.

$$\alpha i = \pm i\sqrt{-\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}};$$

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{2a^2} + \sqrt{\frac{1}{4a^4} + \frac{1}{d^4}}}.$$

На основаніи этого общій интегралъ уравненія (4)′ напишется такъ:

$$\varphi = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Ce^{\beta x} + De^{-\beta x}\ \ldots\ldots (6)$$

Значенія произвольныхъ постоянныхъ могутъ быть опредѣлены на основаніи условій на концахъ балки. Такъ какъ

---

[1]) Michell въ своей работѣ (см. § 1) не отбрасываетъ этихъ членовъ и при рѣшеніи ур-ій (2) пренебрегаетъ только членами содержащими φ^2. Такимъ образомъ для φ онъ получаетъ ур-іе:

$$-\frac{M^2\varphi}{B_2}\left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right) = C\cdot\varphi'' - \frac{Dh^2}{2}\cdot\varphi^{IV}.$$

Такъ какъ практическій интересъ имѣютъ только тѣ случаи, гдѣ $\frac{B_2}{B_1}$ мало, то, пренебрегая этой величиной получимъ, наше ур-іе (4).

концевыя сѣченія не могутъ поворачиваться вокругъ оси x-овъ то

I) $\varphi=0$ при $x=0$ и II) $\varphi=0$ при $x=l$.

Другую пару условій мы найдемъ, принявъ во вниманіе, что на концахъ балки нѣтъ моментовъ, которые бы изгибали полки балки въ плоскостяхъ параллельныхъ плоскости XY, слѣдовательно

III) $\varphi''=0$ при $x=0$ и IV) $\varphi''=0$ при $x=l$.

На основаніи условій I) и III) будемъ имѣть

$$\begin{gathered} B+C+D=0 \\ B\alpha^2+C\beta^2+D.\beta^2=0 \end{gathered} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Чтобы удовлетворить этимъ уравненіямъ, необходимо положить

$$B=0;\ C=-D.$$

На основаніи этого мы можемъ рѣшеніе (6) представить въ такомъ видѣ

$$\varphi=A\sin\alpha x+C_1\sin h(\beta x)$$

Для опредѣленія A и C_1 мы воспользуемся условіями II) и IV), которыя намъ дадутъ

$$\begin{gathered} A.\sin\alpha l+C_1\sin h(\beta l)=0 \\ -A.\alpha^2\sin\alpha l+C_1\beta^2\sin h(\beta l)=0 \end{gathered} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Условіямъ (8) можно удовлетворить положивши

$$A=0 \text{ и } C_1=0.$$

Но тогда всѣ произвольныя постоянныя интеграла (6) будутъ нулями и слѣдовательно

$$\varphi \text{ и } \frac{d^2y}{dx^2}$$

будутъ равны нулю по всей длинѣ балки, т. е. мы будемъ имѣть случай плоскаго изгиба. Чтобы была возможна другая не плоская форма изгиба необходимо, чтобы уравненія (8) допускали для A и C_1 рѣшенія отличныя отъ нуля. Для этого необходимо опредѣлитель уравненій (8) приравнять нулю т. е. положить

$$(\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

На основаніи нашихъ обозначеній мы имѣемъ

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{a^2} = \frac{2C}{D \,.\, h^2}$$

и потому первый множитель (9) не можетъ быть нулемъ, слѣдовательно для возможности появленія искривленной формы изгиба необходимо положить

$$\sin \alpha l = 0.$$

Такимъ образомъ можно найти безконечное множество значеній α, а слѣдовательно и M_k, при которыхъ становится возможной не плоская форма изгиба. Для этого нужно только положить

$$\alpha l = n \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

гдѣ n цѣлое число.

Чтобы представить себѣ, какой видъ имѣютъ различныя формы не плоскаго изгиба, замѣтимъ, что на основаніи (8) и (10) условій $C_1 = 0$, слѣдовательно

$$\varphi = A \sin \alpha x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

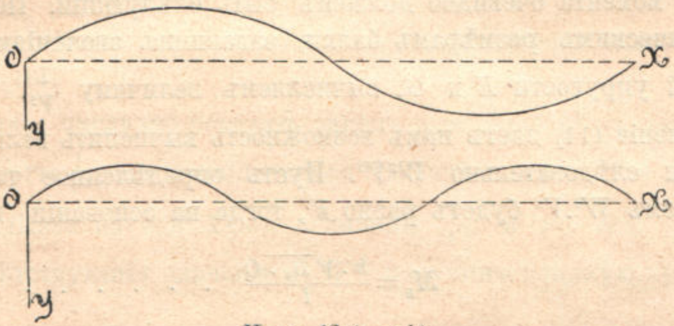
Положивши въ условіи (10) n равнымъ единицѣ получимъ наименьшее значеніе для α, а слѣдовательно и для M, при которомъ плоская форма изгиба будетъ неустойчива. Появляющаяся искривленная форма изгиба характеризуется тѣмъ, что уголъ φ по всей длинѣ будетъ одного знака. Максимальнаго значенія онъ достигаетъ при $x = \frac{l}{2}$

Когда

$$\sin \alpha x = 1.$$

Проэкція изогнутой оси балки на плоскость XY будетъ кривая безъ точекъ перегиба, такъ какъ $\frac{d^2y}{dx^2}$ сохраняетъ свой знакъ по всей длинѣ балки, что видно изъ уравненія (3). Въ общемъ эта форма изгиба будетъ соотвѣтствовать черт. 11, взятому нами при выводѣ уравненій.

Если въ условіи (10) положить $n=2$, то тогда φ перемѣнитъ свой знакъ при $x=\frac{l}{2}$ и ось балки изогнется, какъ показано на черт. 12 фиг. *a*. Фиг. *b* даетъ видъ изгиба при $n=3$ и т. д. Чѣмъ больше n, тѣмъ больше α и тѣмъ большій нуженъ моментъ, чтобы осуществить соотвѣтствующую форму изгиба



Черт. 12 (a и b).

Для практическихъ цѣлей особенно важно значеніе M_k, при которомъ становится возможной первая искривленная форма изгиба. Для этого случая должна быть составлена таблица, которой можно было бы пользоваться такъ, какъ, напримѣръ, таблицей проф. Ясинскаго въ случаѣ продольнаго изгиба.

Для сравненія получаемыхъ нами здѣсь результатовъ съ результатами другихъ случаевъ нагрузки, мы введемъ такія обозначенія:

$$\begin{aligned} \frac{l^2}{a^2} &= \frac{2 \cdot C}{D} \cdot \frac{l^2}{h^2} = \frac{1}{V^2} \\ \frac{l^4}{d^4} &= \frac{l^4 \cdot 2M^2}{B_2 \cdot D \cdot h^2} = W^2 \end{aligned} \qquad \qquad (12)$$

гдѣ W^2 и $\frac{1}{V^2}$ суть отвлеченныя числа. Замѣтимъ, что $\frac{1}{V^2}$ зависитъ только отъ размѣровъ балки, въ выраженіе же для W^2 входитъ также и изгибающій моментъ M.

На основаніи (12) очевидно

$$W^2 \; V^2 = \frac{l^2 \cdot M^2}{B_2 \cdot C} \qquad \qquad (13)$$

Величина W^2, соотвѣтствующая заданнымъ размѣрамъ балки, опредѣлится изъ условія (10), которое на основаніи новыхъ обозначеній перепишется при $n=1$ такъ

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2\,V^2}\right)^2+W^2}-\frac{1}{2\,V^2}=\pi^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (14)$$

Ходъ расчета при опредѣленіи критическаго изгибающаго момента очевидно долженъ быть слѣдующій. По геометрическимъ размѣрамъ балки, задавшись значеніями модулей упругости E и G, вычисляемъ величину $\frac{1}{V^2}$. Тогда уравненіе (14) даетъ намъ возможность вычислить величину W^2 и слѣдовательно W^2V^2. Пусть опредѣленное такимъ образомъ $W^2.V^2$ будетъ равно k^2, тогда на основаніи (13)

$$M_k=\frac{k\,.\sqrt{B_2\,.\,C}}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (15)$$

Полученная нами формула имѣетъ сходство съ формулой Эйлера въ случаѣ продольнаго изгиба. Величина множителя k мѣняется въ зависимости отъ размѣровъ балки и опредѣляетъ собой вліяніе жесткости полокъ. Чѣмъ меньше D и больше длина балки l, тѣмъ менѣе сказывается вліяніе изгиба полокъ, тѣмъ меньше величина k. Въ предѣлѣ, когда $D=0$ и двутавровая балка состоитъ изъ одной вертикальной стѣнки, мы будемъ имѣть $V^2=0$, а на основаніи уравненія (14).

$$W^2V^2=\pi^2.$$

Слѣдовательно наименьшее значеніе для перемѣннаго множителя будетъ $k=\pi$ и на этотъ случай формула (15) перепишется такъ:

$$M_k=\frac{\pi\sqrt{B_2C}}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Замѣтимъ, что къ тому же самому результату мы могли бы придти, положивши въ основномъ нашемъ уравненіи (4) $D=0$.

Тогда задача приведется къ рѣшенію уравненія второго порядка

$$\varphi''+\frac{M^2}{B_2C}\,.\,\varphi=0.$$

Общій интегралъ этого уравненія будетъ

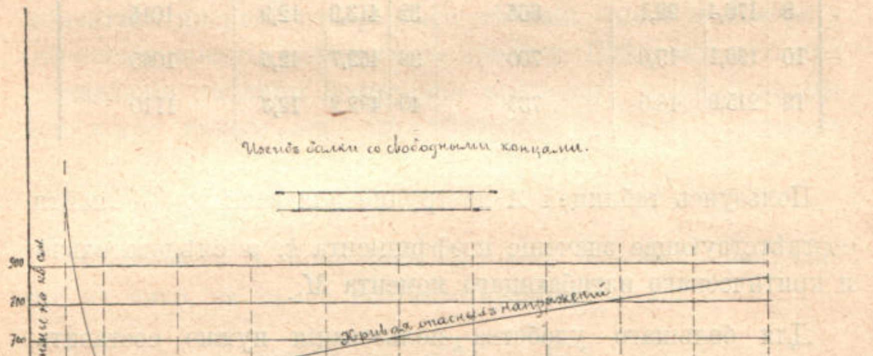
$$\varphi = A \sin \frac{M}{\sqrt{B_2 C}} . x + B \cos \frac{M}{\sqrt{B_2 C}} \cdot x$$

Чтобы удовлетворить условіямъ на концахъ придется положить

$$B = 0 \text{ и } \frac{Ml}{\sqrt{B_2 C}} = n\pi$$

откуда сейчасъ же получается вышеприведенная нами формула (16).

Чтобы наглядно показать законъ измѣненія k^2 въ зависимости отъ $\frac{1}{V^2}$, мы воспользуемся графическимъ построеніемъ Откладывая по оси X-овъ величины $\frac{1}{V^2}$, и по оси Y-овъ соотвѣтствующія значенія $W^2 V^2$, получимъ искомую кривую



Черт. 13.

На основаніи уравненія (14) не трудно видѣть, что эта кривая будетъ гипербола; ассимптотами ея будутъ ось $У$-овъ и прямая параллельная оси X-овъ, проведенная въ разстояніи π^2 отъ нея, какъ это показана на черт. (13).

Въ приведенной ниже таблицѣ A мы даемъ рядъ численныхъ значеній k^2

Таблица A.

$\frac{1}{V^2}$	W^2	$W^2V^2=k^2$	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ $E=2\,.\,10^6$	$\frac{1}{V^2}$	W^2	$W^2V^2=k^2$	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ $E=2\,.\,10^6$
0,1	98,4	984	495	16	255,3	16,0	800
2	117,2	58,6	540	20	294,8	14,7	860
4	136,9	34,2	585	24	334,3	13,9	915
6	156,6	26,1	625	28	373,8	13,4	965
8	176,4	22,1	665	32	413,3	12,9	1015
10	196,1	19,6	700	36	452,7	12,6	1065
12	215,9	18,0	735	40	492,2	12,3	1110

Пользуясь таблицей A не трудно для всякаго $\frac{1}{V^2}$ найти соотвѣтствующее значеніе коэффиціента k, а слѣдовательно и критическаго изгибающаго момента M_k.

Для большаго удобства пользованія нужно составить таблицы напряженій, соотвѣтствующихъ критическимъ значеніямъ изгибающаго момента. Обыкновенная формула сопротивленія матеріаловъ для опредѣленія наибольшихъ нормальныхъ напряженій R даетъ намъ

$$R=\frac{M.h}{2I_1}=\frac{M.h.E}{2B_1}.$$

Если вмѣсто M подставимъ значеніе критическаго момента изъ формулы (15), то для величины опаснаго напряженія будемъ имѣть

$$R=\frac{k\sqrt{B_2C}\,.\,E}{2\,.\,B_1}\cdot\frac{h}{l}\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (17)$$

Въ формулѣ этой возможны дальнѣйшія упрощенія. Для этого замѣтимъ, что при малой толщинѣ вертикальной стѣнки съ достаточной точностью можно положить

$$D = \frac{B_2}{2}.$$

Тогда на основаніи нашихъ обозначеній (12)

$$C = \frac{B_2}{4} \cdot \frac{1}{V^2} \cdot \frac{h^2}{l^2}.$$

Подставляя это въ формулу (17), окончательно будемъ имѣть

$$R = \frac{1}{4} W.E.\frac{B_2}{B_1} \cdot \left(\frac{h}{l}\right)^2 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

Какъ видно опасныя напряженія при одномъ и томъ же W будутъ пропорціональны отношенію между главными моментами инерціи поперечнаго сѣченія балки и квадрату отношенія высоты балки къ ея пролету. Слѣдовательно при составленіи таблицы достаточно вычислить опасныя напряженія для какого либо опредѣленнаго значенія отношенія

$$\frac{B_2}{B_1} \text{ и } \frac{h}{l}.$$

Въ таблицѣ A приведены значенія опасныхъ напряженій въ клгр. на кв. ст. соотвѣтствующія

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{100} \quad \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{100}$$

Модуль упругости взятъ $E = 2 \,.\, 10^6$.клгр. кв. см.

Если бы при заданныхъ размѣрахъ балки отношенія эти были равны:

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{m}\,; \quad \left(\frac{h}{l}\right)^2 = \frac{1}{n},$$

то для полученія опасныхъ напряженій пришлось бы число, поставленное въ таблицѣ, умножить на $\frac{10^4}{m.n}$.

При вычисленіяхъ $\frac{1}{V^2}$ никакихъ затрудненій встрѣтиться не можетъ, такъ какъ отношеніе $\frac{h}{l}$ всегда извѣстно съ большой точностью. D можетъ быть вычислено на основанiи поперечныхъ размѣровъ балки, если только извѣстенъ модуль упругости матерiала. Что касается C, то оно можетъ быть вычислено, на основанiи прiемовъ, приведенныхъ въ § 3. Вычисленiя эти, конечно, будутъ очень неточныя, но какъ видно изъ разсмотрѣнiя таблицы А, даже большiя ошибки въ опредѣленiи $\frac{1}{V^2}$ не сильно повлiяютъ на опредѣляемую величину опасныхъ напряженiй.

Формулы, полученныя нами для балокъ со свободными концами, легко распространить на случай балокъ однимъ концомъ задѣланныхъ неподвижно. Въ случаѣ первой искривленной формы изгиба среднее поперечное сѣченiе балки въ силу симметрiи остается плоскимъ и слѣдовательно въ задачѣ нашей ничто не измѣнится, если мы предположимъ его неподвижно задѣланнымъ. Пара, приложенная къ свободному концу, должна быть подчинена тому условiю, что плоскость ея во время деформацiи заключаетъ въ себѣ главную ось инерцiи концевого поперечнаго сѣченiя и ось X-овъ. Величина критическаго момента очевидно должна остаться прежняя; длина же балки будетъ $l_1 = \frac{l}{2}$.

Слѣдовательно

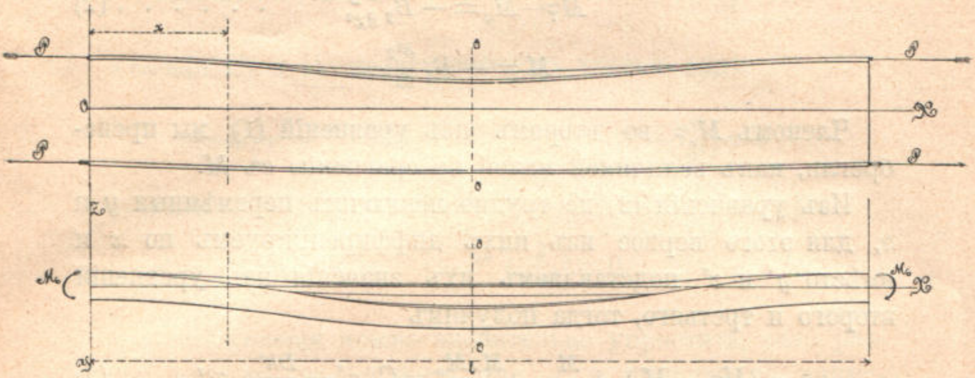
$$M_k = \frac{k\sqrt{B_2 C}}{2\,l_1}.$$

Когда балка состоитъ изъ одной вертикальной стѣнки, мы будемъ имѣть

$$M_k = \frac{\pi\sqrt{B_2 C}}{2\,l_1}.$$

Изгибъ балки съ задѣланными концами.

§ 6. Положимъ, что концевыя сѣченiя балки закрѣплены такимъ образомъ, что устранена возможность вращенiя не только вокругъ оси X-овъ, но и вокругъ вертикальной оси Z-овъ. Вращенiе концевыхъ сѣченiй вокругъ оси Y-овъ мы предполагаемъ возможными, такъ какъ при значительной жесткости балки въ плоскости ея стѣнки невозможно обезпечить неподвижность въ этомъ направленіи. Положимъ, что черт. (14) представляетъ одну изъ возможныхъ въ этомъ случаѣ искривленныхъ формъ изгиба.



Черт. 14.

Ясно, что для устраненія вращенія вокругъ оси Z-овъ къ концевымъ поперечнымъ сѣченіямъ необходимо приложить нѣкоторые моменты M_0, дѣйствующіе въ плоскости $\xi\eta$ и вращающіе въ сторону, указанную на чертежѣ стрѣлками.

Величина момента пока остается неопредѣленной и впослѣдствіи можетъ быть вычислена на основаніи того, что касательная къ изогнутой оси балки на концахъ должна лежать въ плоскости ZX, т. е. при

$$x=0 \quad \text{и} \quad \text{при } x=l \qquad \frac{dy}{dx}=0.$$

Чтобы составить основныя уравненія въ этомъ случаѣ, возьмемъ опять произвольное сѣченіе въ разстояніи x отъ начала координатъ и составимъ выраженія для моментовъ внѣшнихъ силъ относительно осей ξ, η, z взятаго сѣченія. Пользуясь таблицей (4) § 4, получимъ

$$\begin{aligned} M_\xi &= M\frac{dy}{dx}+M_0\frac{dz}{dx} \\ M_\eta &= M+M_0\,.\,\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ M_z &= M\varphi+M_0 \end{aligned}$$

Пользуясь основными уравненіями § 4 и считая φ малымъ, будемъ имѣть

$$My' + M_0 z' = C\varphi' - \frac{Dh^2}{2} \cdot \varphi'''$$

$$M\varphi - M_0 = - B_2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \ldots\ldots (2)$$

$$M = - B_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Членомъ $M_0\varphi$ во второмъ изъ уравненій (1) мы пренебрегли, какъ величиной малой по сравненію съ M.

Изъ уравненій (2) не трудно исключить перемѣнныя y и z, для этого первое изъ нихъ диффиренцируемъ по x и вмѣсто y'' и z'' подставляемъ ихъ значенія изъ уравненій второго и третьяго, тогда получимъ

$$-(M\varphi - M_0) \cdot \frac{M}{B_2} - \frac{M . M_0}{B_1} = C . \varphi'' - \frac{Dh^2}{2} \cdot \varphi^{IV} \ldots (3)$$

Раздѣляя на коэфиціентъ при φ^{IV} и пользуясь обозначеніями предыдущаго параграфа будемъ имѣть:

$$\varphi^{IV} - \frac{1}{a^2} \cdot \varphi^{II} - \frac{1}{d^4} \cdot \varphi = - \frac{1}{d^4} \cdot \frac{M_0}{M} \cdot \left(1 - \frac{B_2}{B_1}\right) \ldots (4)$$

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ пренебрегать величиной $\frac{B_2}{B_1}$ по сравненію съ единицей. Полный интегралъ уравненія (4) мы получимъ, если къ разсмотрѣнному въ предыдущемъ параграфѣ интегралу уравненія безъ послѣдняго члена прибавимъ частное рѣшеніе уравненія (4), тогда

$$\varphi = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + C . e^{\beta x} + D . e^{-\beta x} + \frac{M_0}{M} \ldots (5)$$

Произвольныя постоянныя A, B, C, D и неизвѣстная пока величина M_0 опредѣлятся изъ условій на концахъ балки:

Условія эти будутъ слѣдующія

I) при $x = 0$, $\varphi = 0$, II) при $x = l$, $\varphi = 0$.

Кромѣ того моментъ внѣшнихъ силъ относительно оси ξ, построенной для концевыхъ поперечныхъ сѣченій, будетъ нулемъ, слѣдовательно

III) $\varphi''' - \frac{1}{a^2} . \varphi' = 0$ при $x = 0$ и IV) $\varphi''' - \frac{1}{a^2} \cdot \varphi' = 0$ при $x = l$.

Условія I и II даютъ намъ

$$B+C+D=-\frac{M_0}{M} \qquad (a)$$

$$A\,.\sin\alpha l+B\cos\alpha l+C\,.\,e^{\beta l}+D\,.\,e^{-\beta l}=-\frac{M_0}{M} \qquad (b)$$

Условія III и IV представятся въ такомъ видѣ

$$-A\left(\alpha^3+\frac{\alpha}{a^2}\right)+C\left(\beta^3-\frac{\beta}{a^2}\right)+D\left(-\beta^3+\frac{\beta}{a^2}\right)=0$$

$$-A\cos\alpha l\left(\alpha^3+\frac{\alpha}{a^2}\right)+B\sin\alpha l\left(\alpha^3+\frac{\alpha}{a^2}\right)+Ce^{\beta l}\left(\beta^3-\frac{\beta}{a^2}\right)+$$

$$+De^{-\beta l}\left(-\beta^3+\frac{\beta}{a^2}\right)=0.$$

Эти два условія можно значительно упростить, если раздѣлить ихъ на коэфиціентъ при A и принять во вниманіе, что

$$\frac{\beta^3-\frac{\beta}{a^2}}{\alpha^3+\frac{\alpha}{a^2}}=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta^2-\frac{1}{a^2}}{\alpha^2+\frac{1}{a^2}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

тогда получимъ

$$-A+\frac{\alpha}{\beta}.C-\frac{\alpha}{\beta}.D=0 \qquad (c)$$

$$-A\cos\alpha l+B\sin\alpha l+\frac{\alpha}{\beta}.C.e^{\beta l}-\frac{\alpha}{\beta}.D.e^{-\beta l}=0 \quad (d)$$

Изъ условій (a) и (c) можемъ выразить произвольныя постоянныя C и D черезъ A и B

$$\left.\begin{aligned}C&=\frac{A\frac{\beta}{\alpha}-B}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{M_0}{M}\\ D&=-\frac{A\frac{\beta}{\alpha}+B}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{M_0}{M}\end{aligned}\right\} \quad .\ .\ .\ .\ .\ . \ (6)$$

Тѣже постоянныя изъ условій (b) и (d) выразятся такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}C&=\frac{A}{2}\left(\frac{-\sin\alpha l+\frac{\beta}{\alpha}\cos\alpha l}{e^{\beta l}}\right)-\frac{B}{2}\left(\frac{\cos\alpha l+\frac{\beta}{\alpha}\sin\alpha l}{e^{\beta l}}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{M_0}{M.e^{\beta l}}\\ D&=-\frac{A}{2}\left[\frac{\sin\alpha l+\frac{\beta}{\alpha}\cos\alpha l}{e^{-\beta l}}\right]-\frac{B}{2}\left[\frac{-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sin\alpha l+\cos\alpha l}{e^{-\beta l}}\right]-\frac{1}{2}\,\frac{M_0}{M.e^{-\beta l}}\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Изъ сравненія (6) и (7) получимъ

$$\frac{A}{2}\left[\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\frac{\beta}{\alpha}\cos\alpha l-\sin\alpha l}{e^{\beta l}}\right]-\frac{B}{2}\left[1-\frac{\cos\alpha l+\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sin\alpha l}{e^{\beta l}}\right]-$$
$$-\frac{M_0}{2\,M}\left(1-\frac{1}{e^{\beta l}}\right)=0$$
$$-\frac{A}{2}\left[\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\frac{\beta}{\alpha}\cos\alpha l+\sin\alpha l}{e^{-\beta l}}\right]-\frac{B}{2}\left[1-\frac{\cos\alpha l-\frac{\beta}{\alpha}\cdot\sin\alpha l}{e^{-\beta l}}\right]-$$
$$-\frac{M_0}{2\,M}\left(1-\frac{1}{e^{-\beta l}}\right)=0. \qquad (8)$$

Условіямъ (8) конечно можно было бы удовлетворить положивши

$$A=B=M_0=0,$$

но тогда C и D также будутъ нулями и рѣшеніе будетъ соотвѣтствовать случаю плоскаго изгиба. Чтобы искривленная форма изгиба была возможна, необходимо чтобы условія (8) давали для произвольныхъ постоянныхъ рѣшенія отличныя отъ нуля. Не трудно видѣть, что мы удовлетворимъ условіямъ (8) положивши

$$A=0,\quad \cos\alpha l+\frac{\beta}{\alpha}.\sin\alpha l=1,\quad \cos\alpha l-\frac{\beta}{\alpha}.\sin\alpha l=1 \qquad (9)$$

Тогда будемъ имѣть

$$M_0=-B\,.\,M,$$

а изъ условій (6)

$$C=0;\quad D=0.$$

Для опредѣленія угла поворота φ будемъ имѣть

$$\varphi=B\,(\cos\alpha x-1)\quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Чтобы судить о томъ, каковъ видъ искривленной формы равновѣсія, обратимся къ условіямъ (9). Для того, чтобы они были удовлетворены, необходимо положить

$$\cos\alpha l=1,\quad \sin\alpha l=0.$$

Слѣдовательно

$$\alpha l=2\,m\pi,$$

Гдѣ m произвольное цѣлое число.

Первая возможная форма, соотвѣтствующая наименьшему значенію α, а слѣдовательно и наименьшему изгибающему моменту M_k очевидно получится, если мы положимъ

$$\alpha l = 2\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Въ этомъ случаѣ уголъ φ все время будетъ одного знака и наибольшей своей величины достигаетъ при

$$x = \frac{l}{2}.$$

Проэкція изогнутой оси балки на плоскость XY будетъ кривая съ двумя точками перегиба, которыя будутъ соотвѣтствовать тѣмъ сѣченіямъ балки, гдѣ

$$M\varphi - M_0 = 0,$$

что не трудно видѣть изъ второго уравненія системы (2).

То же уравненіе даетъ намъ выраженіе для y'

$$y' = -\frac{M.B}{B_2} \cdot \left(\frac{\sin\alpha x}{\alpha} - x\right) + \frac{M_0 x}{B_2}$$

Нетрудно видѣть, что y' обращается въ нуль при

$$x = 0 \quad \text{и при} \quad x = l.$$

Въ общемъ искривленная форма изгиба будетъ имѣть видъ представленный на черт. (14).

Для вычисленія критическаго значенія изгибающаго момента M_k воспользуемся обозначеніями (12) предыдущаго параграфа. Тогда на основаніи условія (11) будемъ имѣть

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2V^2}\right)^2 + W^2} - \frac{1}{2V^2} = 4\pi^2 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

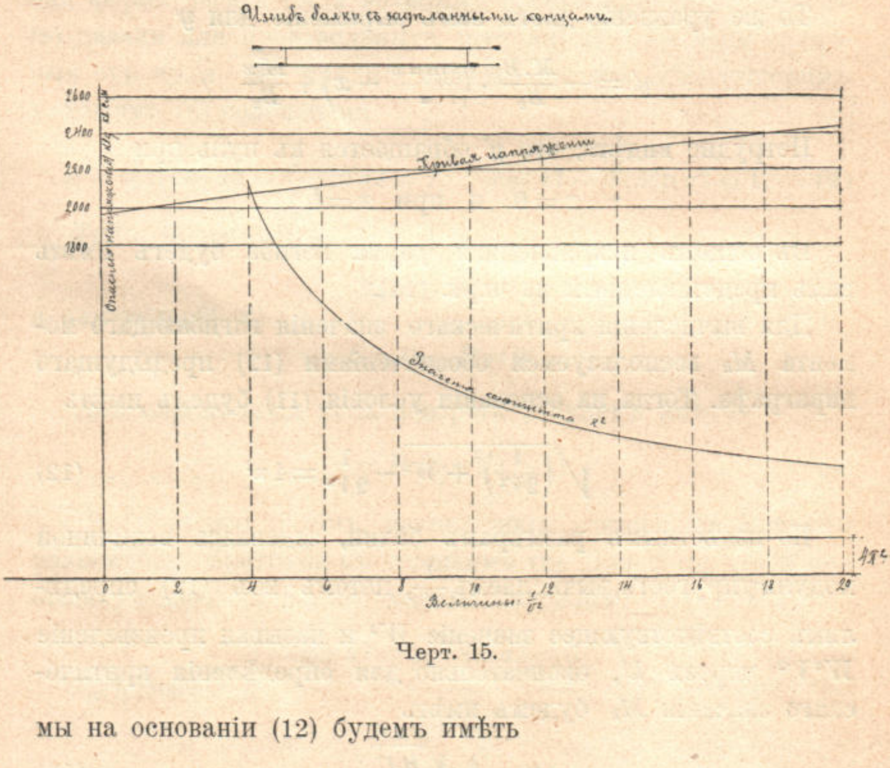
По извѣстнымъ размѣрамъ балки, задаваясь величиной модуля упругости, вычисляемъ $\frac{1}{V^2}$, потомъ изъ (12) опредѣлимъ соотвѣтствующее значеніе W^2 и называя произведеніе W^2V^2 черезъ k^2, окончательно для опредѣленія критическаго значенія M_k будемъ имѣть

$$M_k = \frac{k.\sqrt{B_2C}}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Формула эта совершенно совпадаетъ съ тѣмъ, что мы получили для балки со свободными концами, только, конечно, коэфиціентъ k будетъ имѣть другое значеніе. Если мы графически представимъ зависимость между $\frac{1}{V^2}$ и k^2, то поступая также какъ и въ предыдущемъ параграфѣ, получимъ гиперболу, ассимптомами которой будутъ ось Y-овъ и прямая параллельная оси X-овъ и проведенная въ разстояніи $4\pi^2$ отъ нея.

Величина k будетъ мѣняться въ зависимости отъ жесткости полокъ балки. Если уменьшать жесткость D, то вмѣстѣ съ тѣмъ уменьшается и k. Когда полокъ совсѣмъ нѣтъ, т. е.

$$D = 0 \quad \text{и} \quad V^2 = 0.$$



Черт. 15.

мы на основаніи (12) будемъ имѣть

$$k^2 = W^2 V^2 = 4\pi^2$$

и слѣдовательно формула для вычисленія M_k перепишется въ этомъ случаѣ такимъ образомъ

$$M_k = \frac{2\pi\sqrt{B_2 C}}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

т. е. критическій изгибающій моментъ какъ разъ вдвое больше нежели въ случаѣ балки со свободными концами. Замѣтимъ, что задѣланной балку можно считать только въ томъ случаѣ, если конструкція закрѣпленія концовъ такова, что дѣйствительно обезпечена полная неподвижность въ извѣстномъ направленіи.

Возьмемъ для примѣра продольную балку моста. Ясное дѣло, что ее придется считать, какъ балку со свободными концами, такъ какъ обыкновенно употребляемая конструкція сопряженія продольной балки съ поперечными мало затрудняетъ возможность вращенія концевыхъ поперечныхъ сѣченій вокругъ вертикальныхъ осей.

Укажемъ теперь, что формулу (14) для балки, состоящей изъ одной стѣнки, можно получить и изъ основного нашего уравненія (3) положивши въ немъ $D = O$. Тогда будемъ имѣть

$$\varphi'' + \frac{M^2}{B_2 C} \cdot \varphi = \frac{M_2}{B_2 C} \cdot \frac{M_0}{M} \,.$$

Общій интегралъ этого уравненія будетъ

$$\varphi = A \sin . \frac{M}{\sqrt{B_2 C}} . x + B . \cos . \frac{M}{\sqrt{B_2 C}} . x + \frac{M_0}{M}$$

Условія на концахъ очевидно будутъ

$$\begin{array}{llll} \text{I, II)} & \text{при } x = 0; & \varphi_0 = 0; & \varphi'_0 = 0 \\ \text{III, IV)} & \text{при } x = l; & \varphi_l = 0; & \varphi'_l = 0 \end{array}$$

на основаніи условій I, II будемъ имѣть

$$A = 0 \quad \text{и} \quad B = -\frac{M_0}{M}$$

Слѣдовательно

$$\varphi = \frac{M_0}{M}\left(1 - \cos . \frac{M}{\sqrt{B_2 C}} . x\right)$$

На основанiи условiй III и IV будемъ имѣть

$$\frac{M_0}{M}\left(1-\cos\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\,.\,l\right)=0$$

$$\frac{M_0}{M}\cdot\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\,.\sin\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\,.\,l=0$$

Чтобы удовлетворить этимъ условiямъ придется положить

$$\cos\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\,.\,l=1;\qquad \sin\frac{Ml}{\sqrt{B_2C}}\,l.=0,$$

Слѣдовательно

$$\frac{M}{\sqrt{B_2C}}\,l=2\,m\,\pi.$$

Первая искривленная форма возможна, если

$$M_k=\frac{2\pi\,.\sqrt{B_2C}}{l}.$$

Ниже мы приводимъ таблицу B, въ которой для различныхъ значенiй $\frac{1}{V^2}$ вычислены соотвѣтствующiя значенiя коэфицiента k^2, а также значенiя опасныхъ напряженiй въ предположенiи, что

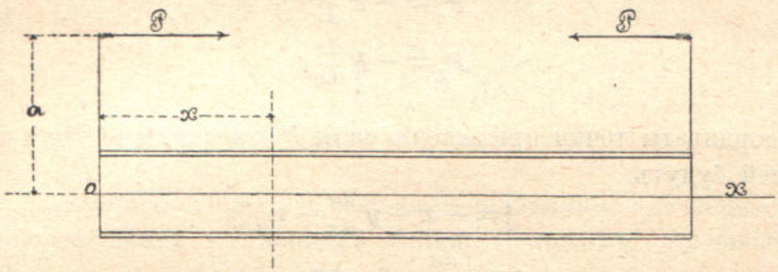
$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}\quad\text{и}\quad\frac{h}{l}=\frac{1}{10}.$$

Таблица B.

$\frac{1}{V^2}$	W^2	$W^2V^2=k^2$	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ $E=2.10^6\ \frac{\text{klg.}}{\text{кв. см.}}$	$\frac{1}{V^2}$	W^2	$W^2V^2=k^2$	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ $E=2.10^6\ \frac{\text{klg.}}{\text{кв. см.}}$
0,1	1563	15630	1980	14	2112	151	2300
1	1598	1598	2000	16	2191	138	2345
2	1638	819	2025	20	2349	117	2425
4	1717	429	2070	24	2507	104	2505
6	1795	299	2120	28	2664	95,2	2580
8	1874	234	2165	32	2822	88,2	
10	1954	195	2210	36	2980	82,8	2730
12	2033	169	2255	40	3138	78,5	2800

Случай изгиба балки эксцентрично приложенными сжимающими силами.

§ 7. Разсмотримъ теперь случай балки, сжимаемой двумя взаимно противоположными силами, линія дѣйствія которыхъ параллельна оси балки и лежитъ въ срединной плоскости вертикальной стѣнки балки. Общее расположеніе видно изъ чертежа (16).



Черт. 16.

Прикладывая къ центрамъ тяжести концевыхъ поперечныхъ сѣченій по двѣ взаимно противоположныя силы, равныя и параллельныя силамъ P, мы приведемъ систему внѣшнихъ силъ къ двумъ парамъ силъ съ моментами

$$M = Pa$$

и къ двумъ силамъ P, дѣйствующимъ по оси балки и отжимающимъ ее.

При опредѣленіи величины критическаго момента будемъ идти прежнимъ путемъ и начнемъ съ вычисленія M_ξ, M_η, M_ζ, соотвѣтствующихъ взятому нами поперечному сѣченію съ абсциссой x.

Составляющія этихъ моментовъ, получающіяся отъ пары силъ съ моментомъ M, мы можемъ взять изъ перваго разсмотрѣннаго нами случая (см. (1). § 5).

Что касается моментовъ, получающихся отъ продольной силы, дѣйствующей по оси $X^{ов}$, то предварительно составимъ ихъ въ общемъ видѣ и потомъ уже отбросимъ малые члены

$$M_\xi = P_\eta \zeta - P_\zeta \eta$$
$$M_\eta = P_\zeta \xi - P_\xi \zeta \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$M_\zeta = P_\xi \eta - P_\eta \xi$$

Проэкціи дѣйствующей силы P на оси ξ, η, ζ при маломъ φ очевидно будутъ

$$P_\xi = P$$
$$P_\eta = -P\frac{dy}{dx} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$P_\zeta = -P\frac{dz}{dx}$$

Координаты точки приложенія силы P относительно тѣхъ же осей будутъ

$$\xi = -x - y\frac{dy}{dx} - z\frac{dz}{dx}$$
$$\eta = x\frac{dy}{dx} - y - z\varphi \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$\zeta = x\frac{dz}{dx} + y\varphi - z$$

Подставляя (2) и (3) въ выраженія (1) для моментовъ и отбрасывая малыя величины второго порядка, мы получимъ

$$M_\xi = 0$$
$$M_\eta = Pz \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$
$$M_\zeta = Py$$

Присоединяя сюда моменты отъ пары силъ, получимъ систему уравненій

$$M\frac{dy}{dx} = C\varphi' - \frac{Dh^2}{2}\varphi'''$$
$$M + Pz = -B_1\frac{d^2z}{dx^2} \qquad \ldots\ldots (5)$$
$$M\varphi + Py = -B_2\frac{d^2y}{dx^2}$$

Для большей ясности начнемъ съ разсмотрѣнія того частнаго случая, когда балка состоитъ изъ одной вертикальной стѣнки и слѣдовательно $D = O$.

Уравненія первое и третье системы (5) перепишутся такимъ образомъ.

$$My' = C\varphi'$$

$$M\varphi + Py = -B_2 y''$$

исключая изъ нихъ y, будемъ имѣть

$$\varphi''' + \left(\frac{M^2}{B_2 C} + \frac{P}{B_2}\right)\varphi' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Для φ' можно сразу написать рѣшеніе

$$\varphi' = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

гдѣ

$$\alpha = +\sqrt{\frac{M^2}{B_2 C} + \frac{P}{B_2}}$$

$$\varphi = -\frac{A}{\alpha} \cos \alpha x + \frac{B}{\alpha} \sin \alpha x + C.$$

Для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ воспользуемся условіями на концахъ балки. Положимъ, что опоры устроены такимъ образомъ, что не допускаютъ вращенія вокругъ оси X-овъ. Вокругъ осей Y и Z вращеніе можетъ происходить свободно. Тогда будемъ имѣть

I) $\varphi = 0$ при $x = 0$ и II) $\varphi = 0$ при $x = l$

откуда получаемъ

$$C = \frac{A}{\alpha} \text{ и } \frac{A}{\alpha}(1 - \cos \alpha l) + \frac{B}{\alpha} \sin \alpha l = 0 \qquad \text{(a)}$$

Изъ условія симметріи слѣдуетъ, что

$$\varphi'_0 = \pm \varphi'_l$$

слѣдовательно

$$B = \pm (A \sin \alpha l + B \cos \alpha l) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(b)}$$

Изъ условій (a) и (b) заключаемъ, что

$$A = 0 \quad \text{и} \quad \cos \alpha l = \pm 1$$

откуда

$$\alpha l = m\pi.$$

Уголъ поворота любого поперечнаго сѣченія будетъ

$$\varphi = \frac{B}{\alpha} \sin \alpha x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Наименьшее значеніе α, а слѣдовательно и изгибающаго момента, при которомъ становится возможной искривленная форма изгиба получится, если положимъ

$$\alpha l = \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Измѣненія угла поворота φ по длинѣ балки и видъ изогнутой оси будутъ соотвѣтствовать чертежу (11) перваго разобраннаго нами случая изгиба.

Величина силы P, при которой плоская форма изгиба перестаетъ быть устойчивой, опредѣлится изъ условія

$$\frac{M^2}{B_2 C} + \frac{P}{B_2} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Формула (9) представляетъ интересъ, такъ какъ изъ нея видна связь между изучаемыми нами вопросами устойчивости плоской формы изгиба съ одной стороны и другимъ, уже подробно изслѣдованнымъ видомъ неустойчиваго равновѣсія, именно продольнымъ изгибомъ—съ другой. Въ самомъ дѣлѣ, если мы, не измѣняя величины силы, будемъ уменьшать плечо a, то первый членъ въ лѣвой части формулы (9) все уменьшается, и когда a станетъ равнымъ нулю, мы будемъ имѣть

$$P = \frac{B_2 \pi^2}{l^2}$$

хорошо извѣстную формулу продольнаго изгиба для случая стержня со свободными концами

Изъ формулы (9) слѣдуетъ, что при дѣйствіи продольныхъ сжимающихъ силъ, всякій эксцентриситетъ въ направленіи наибольшаго радіуса инерціи поперечнаго сѣченія будетъ уменьшать величину критической нагрузки. Не трудно показать, что это вліяніе мало; для этого представимъ формулу (9) въ такомъ видѣ

$$\frac{P}{B_2}\left(1 + \frac{P a^2}{C}\right) = \frac{\pi^2}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Мы предполагали, что поперечное сѣченіе балки есть прямоугольникъ, одна сторона котораго b велика по сравненію съ другой δ. Въ такомъ случаѣ на основаніи § 3 мы можемъ написать

$$C = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \delta^3 \cdot G$$

гдѣ G модуль упругости при сдвигѣ

Если положимъ эксцентриситетъ a равнымъ $m\delta$, то формула (10) перепишется такимъ образомъ

$$\frac{P}{B_2}\left(1 + \frac{m^2}{3} \cdot \frac{R}{G}\right) = \frac{\pi^2}{l^2}$$

гдѣ R напряженіе матеріала отъ сжатія. Такъ какъ R обыкновенно очень мало по сравненію съ G, то вліяніе малыхъ эксцетнриситетовъ на величину критической нагрузки ничтожно.

Разсмотримъ теперь другой крайній случай, именно будемъ увеличивать плечо силы a до безконечности, величину же силы безпредѣльно уменьшать такимъ образомъ, чтобы моментъ сохранялъ конечную величину, тогда формула (9) намъ дастъ

$$M = \frac{\pi \sqrt{B_2 C}}{l}$$

т. е. какъ разъ то же самое, что мы имѣли въ первомъ разобранномъ нами случаѣ [см. § 5 (16)].

Познакомившись на этомъ частномъ примѣрѣ съ сущностью явленія, перейдемъ къ случаю двутавровой балки, т. е. къ случаю когда D въ уравн. (5) отлично отъ нуля.

Исключая изъ перваго и третьяго уравненій системы (5) y, получимъ для опредѣленія φ слѣдующее уравненіе.

$$\varphi^{\mathrm{v}} - \left(\frac{2C}{Dh^2} - \frac{P}{B_2}\right)\varphi^{\mathrm{III}} - \left(\frac{2M^2}{B_2 Dh^2} + \frac{2PC}{B_2 Dh^2}\right)\varphi^{\mathrm{I}} = 0 \quad . \quad . \quad . (11)$$

или, введя обозначенія

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{2C}{Dh^2} - \frac{P}{B_2}; \quad \frac{1}{d_1^4} = \frac{2M^2}{B_2 Dh^2} + \frac{2PC}{B_2 Dh^2}$$

будемъ имѣть

$$\varphi^{\mathrm{v}} - \frac{1}{a_1^2}\varphi^{\mathrm{III}} - \frac{1}{d_1^4}\varphi^{\mathrm{I}} = 0.$$

Для φ' можно написать сразу рѣшеніе

$$\varphi' = A_1 \sin \alpha x + B_1 \cos \alpha x + C_1 e^{\beta x} + D_1 e^{-\beta x}$$

гдѣ

$$\alpha = \left[\sqrt{-\frac{1}{2a_1^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2a_1^2}\right)^2 + \frac{1}{d_1^4}}}\right];$$

$$\beta = \left[\sqrt{\frac{1}{2a_1^2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2a_1^2}\right)^2 + \frac{1}{d_1^4}}}\right].$$

Интегрированіемъ получаемъ

$$\varphi = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} + E\ .\ \ .\ \ .\ (12)$$

Условія на концахъ балки будутъ слѣдующія

I, II) $\varphi = 0$ при $x = 0$ и при $x = l$

III, IV) $\varphi'' = 0$ при $x = 0$ и при $x = l$.

На основаніи условій I) и III) будемъ имѣть

$$\left.\begin{aligned} B + C + D + E &= 0 \\ -B\alpha^2 + C\beta^2 + D\beta^2 &= 0 \end{aligned}\right\}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (a)$$

Условія II) и IV) дадутъ намъ

$$\left.\begin{aligned} A \sin \alpha l + B \cos \alpha l + Ce^{\beta l} + De^{-\beta l} + E &= 0 \\ -A\frac{\alpha^2}{\beta^2} \sin \alpha l - B\frac{\alpha^2}{\beta^2} \cos \alpha l + Ce^{\beta l} + De^{-\beta l} &= 0 \end{aligned}\right\}\ .\ (b)$$

Вычитая второе изъ перваго, будемъ имѣть

$$A\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \sin \alpha l + B\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \cos \alpha l + E = 0.$$

Мы удовлетворимъ написаннымъ условіямъ и условію симметріи, если положимъ

$$B = C = D = E = 0 \text{ и } \sin \alpha l = 0.$$

тогда для угла поворота будемъ имѣть

$$\varphi = A \sin \alpha x.$$

Первая искривленная форма изгиба становится возможной при

$$\alpha l = \pi.$$

Разсмотримъ два предѣльныхъ случая.

I случай. Сжимающая сила безконечно мала, но плечо силы велико и изгибающій моментъ M есть величина конечная. Въ основномъ уравненіи (11) придется P положить равнымъ нулю и тогда уравненіе будетъ тождественно съ разобраннымъ нами уравненіемъ (4) § 5.

II случай. Плечо силы уменьшается и въ предѣлѣ точка приложенія силы совпадаетъ съ центромъ концевого поперечнаго сѣченія. Въ уравненіи (11) въ такомъ случаѣ нужно положить $M=0$ и оно перепишется тогда въ такомъ видѣ.

$$\varphi^{v}-\left(\frac{2C}{Dh^2}-\frac{P}{B_2}\right)\varphi^{'''}-\frac{2PC}{B_2Dh^2}\varphi^{'}=0.$$

Въ данномъ случаѣ

$$\alpha^2=\sqrt{\left(\frac{1}{2a_1^2}\right)^2+\frac{1}{d_1^4}}-\frac{1}{2a_1^2}=\frac{P}{B_2}$$

Слѣдовательно первая искривленная форма изгиба наступитъ, когда

$$\alpha^2=\frac{P}{B_2}=\frac{\pi^2}{l^2}$$

т. е. когда

$$P=\frac{\pi^2 B_2}{l^2}$$

Такимъ образомъ мы опять пришли къ извѣстной формулѣ продольнаго изгиба.

Случай изгиба балки эксцентрично приложенными растягивающими силами.

§ 8. Въ этомъ случаѣ въ уравненіяхъ предыдущаго параграфа вмѣсто P вездѣ придется подставить $-P$. Уравненіе (6) § 7 выведенное нами для случая балки, состоящей изъ одной вертикальной стѣнки, перепишется такъ

$$\varphi^{'''}+\left(\frac{M^2}{B_2C}-\frac{P}{B_2}\right)\varphi^{'}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Здѣсь придется разсмотрѣть два различныхъ случая.

1) Случай

$$\frac{M^2}{B_2C} > \frac{P}{B_2}$$

коэффиціентъ при φ' будетъ величиной положительной, а слѣдовательно φ' и φ выразятся черезъ тригонометрическія ф—іи

Полагая

$$\alpha = +\sqrt{\frac{M^2}{B_2C} - \frac{P}{B_2}}$$

будемъ имѣть

$$\varphi = A \sin \alpha x.$$

Величина момента M_k, при которой становится возможной первая искривленная форма изгиба, опредѣлится изъ уравненія:

$$\frac{M^2}{B_2C} - \frac{P}{B_2} = \frac{\pi^2}{l^2} \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

Изъ этого уравненія видно, что всякая растягивающая сила увеличиваетъ величину критическаго изгибающаго момента, тогда какъ сжимающія силы уменьшаютъ его. Увеличивая плечо силы безпредѣльно, мы придемъ къ формулѣ (16) изгиба балки парами силъ.

2) Случай

$$\frac{P}{B_2} > \frac{M^2}{B_2C}$$

полагая

$$\sqrt{\frac{P}{B_2} - \frac{M^2}{B_2C}} = \beta$$

будемъ имѣть

$$\varphi = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x} + C.$$

Чтобы удовлетворить условіямъ на концахъ необходимо положить

$$A = B = C = 0.$$

Слѣдовательно въ данномъ случаѣ возможна только форма плоскаго изгиба.

Дѣлая $M = 0$, получимъ случай простого растяженія.

При

$$\frac{P}{B_2} = \frac{M^2}{B_2 C}$$

уравненіе (1) перепишется такъ:

$$\varphi''' = 0$$

$$\varphi' = Ax + B; \quad \varphi = \frac{Ax^2}{2} + Bx + C.$$

Чтобы удовлетворить условіямъ на концахъ придется положить

$$A = B = C = 0,$$

т. е. и въ данномъ случаѣ возможна только форма плоскаго изгиба.

Уравненіе, соотвѣтствующее двутавровой балкѣ, напишется для случаѣ растягивающихъ силъ такъ:

$$\varphi^{v} - \left(\frac{2C}{Dh^2} + \frac{P}{B_2}\right)\varphi''' - \left(\frac{2M^2}{B_2 Dh^2} - \frac{2PC}{B_2 Dh^2}\right)\varphi' = 0.$$

Подробно разбирать это уравненіе не будемъ, такъ какъ оно не даетъ ничего новаго; замѣтимъ только, что пока

$$\frac{2M^2}{B_2 Dh^2} - \frac{2PC}{B_2 Dh^2} > 0$$

возможны будутъ искривленныя формы изгиба. При

$$\frac{2M^2}{B_2 Dh^2} - \frac{2PC}{B_2 Dh^2} < 0$$

плоскій изгибъ является единственной возможной формой равновѣсія.

Вліяніе первоначальной кривизны оси балки.

§ 9. До сихъ поръ мы предполагали, что ось балки совершенно прямая и что плоскость изгибающихъ моментовъ точно совпадаетъ съ срединной плоскостью стѣнки балки. Посмотримъ, какія измѣненія внесетъ въ изучаемое нами явленіе незначительная первоначальная кривизна оси балки въ плоскости XY. Для простоты положимъ, что ось въ этомъ направленіи согнута по кругу радіуса R.

Если балка изгибается парами силъ, приложенными такъ, какъ въ случаѣ § 5, то основныя уравненія напишутся такимъ образомъ

$$M_{\xi} = My' = C\varphi' - \frac{Dh^2}{2}\varphi''' \qquad \qquad \qquad \qquad (1)$$
$$M_{\zeta} = M\varphi = -B_2\left(y'' - \frac{1}{R}\right)$$

Исключая изъ нихъ неизвѣстное y, будемъ имѣть

$$-M\left(\frac{M\varphi}{B_2} + \frac{1}{R}\right) = C\varphi'' - \frac{Dh^2}{2}\varphi^{\text{IV}}$$

или, вводя прежнія наши обозначенія:

$$\varphi^{\text{IV}} - \frac{1}{a^2}\varphi^{\text{II}} - \frac{1}{d^4}\varphi = \frac{1}{d^4}\frac{B_2}{MR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Частное рѣшеніе этого уравненія будетъ

$$\varphi = -\frac{B_2}{MR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Замѣтимъ, что величина $\frac{B_2}{MR}$ будетъ малой, такъ какъ $\frac{B_2}{R}$ есть ничто иное, какъ величина момента M_1, который могъ бы первоначально прямой оси балки придать кривизну $\frac{1}{R}$. Такъ какъ мы считаемъ первоначальную кривизну малой и B_2 мало по сравненію съ B_1, то и M_1 будетъ мало по сравненію съ M и слѣдовательно величина φ, опредѣляемая изъ (3) будетъ малой.

Полный интегралъ уравненія (2) будетъ

$$\varphi = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + Ce^{\beta x} + De^{-\beta x} - \frac{M_1}{M} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Условія на концахъ дадутъ намъ слѣдующія уравненія для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ

$$\begin{gathered} B + C + D - \gamma = 0 \\ -B\alpha^2 + C\beta^2 + D\beta^2 = 0 \\ A\sin\alpha l + B\cos\alpha l + Ce^{\beta l} + De^{-\beta l} - \gamma = 0 \\ -A\alpha^2\sin\alpha l - B\alpha^2\cos\alpha l + C\beta^2 e^{\beta l} + D\beta^2 e^{-\beta l} = 0 \end{gathered} \quad . \quad . \quad (5)$$

Въ этихъ уравненіяхъ черезъ γ названа малая величина $\frac{M_1}{M}$.

Рѣшая уравненія (5) относительно произвольныхъ постоянныхъ, получимъ

$$A = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\gamma \operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}$$

$$B = \frac{\beta^2 \gamma}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$C = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\gamma \frac{1}{1+e^{\beta l}}$$

$$D = \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\gamma \frac{1}{1+e^{-\beta l}}$$

Подставляя ихъ въ общій интегралъ (4) будемъ имѣть

$$\varphi = \frac{\gamma\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\sin\alpha x + \cos\alpha x\right) + \frac{\gamma\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{e^{\beta x}}{1+e^{\beta x}} + \frac{e^{-\beta x}}{1+e^{-\beta l}}\right) - \gamma \quad (6)$$

Такъ какъ уравненія (5) допускаютъ для произвольныхъ постоянныхъ вполнѣ опредѣленныя рѣшенія при всякомъ изгибающемъ моментѣ, то слѣдовательно отдѣльныя поперечныя сѣченія начинаютъ поворачиваться и балка искривляется при самыхъ малыхъ нагрузкахъ. Мы не будемъ подробно разсматривать законъ, по которому идетъ измѣненіе φ, замѣтимъ только, что сначала возрастаніе угловъ поворота и искривленіе балки идетъ медленно, но съ приближеніемъ изгибающаго момента къ вычисленному нами для прямой балки критическому значенію M_k измѣненія формы дѣлаются сразу весьма значительными. Это можно показать на основаніи формулы (6). Когда изгибающій моментъ по величинѣ близокъ къ критическому, величина γ будетъ мала, множители

$$\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} < \frac{1}{2} \qquad \frac{e^{\beta x}}{1+e^{\beta l}} + \frac{e^{-\beta x}}{1+e^{-\beta l}} < 1$$

Слѣдовательно намъ нужно разобрать только первое слагаемое.

$$\varphi_1 = \frac{\gamma\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2}\sin\alpha x + \cos\alpha x\right).$$

Наибольшаго значенія эта величина достигаетъ при $x = \frac{l}{2}$.

Въ этомъ случаѣ φ_1 можно представить такимъ образомъ

$$\varphi_1 = \frac{\gamma\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\alpha l}{2}}$$

Такъ какъ

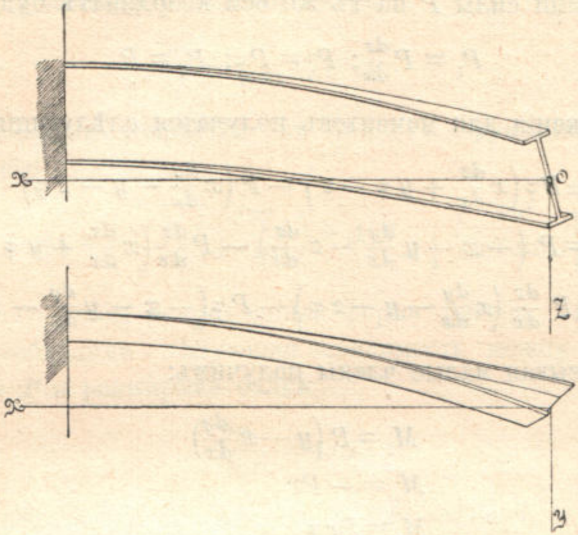
$$\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2} \text{ всегда } < 1,$$

то быстрое возрастаніе начнется тогда, когда $\cos\frac{\alpha l}{2}$ будетъ приближаться къ нулю, а значитъ αl къ величинѣ π, т. е. къ величинѣ, опредѣляющей критическій изгибающій моментъ въ случаѣ балки съ прямолинейной осью.

Случай, когда ось балки прямая, но плоскость изгибающаго момента не совпадаетъ съ срединной плоскостью вертикальной стѣнки, легко можно привести къ только что разобранному. Положимъ, что плоскость изгибающей пары M проходитъ черезъ ось балки, и составляетъ малый уголъ φ_0 съ вертикальной плоскостью. Разложимъ моментъ M на составляющіе M_1, дѣйствующій въ плоскости стѣнки балки, и M_2 въ плоскости ей перпендикулярной. Тогда отношеніе $\frac{M_2}{M_1}$ будетъ играть ту же роль, что γ въ предыдущемъ случаѣ и слѣдовательно при малыхъ углахъ наклоненія φ_0 искривленіе оси балки начнетъ быстро расти съ приближеніемъ M_1 къ величинѣ критическаго изгибающаго момента.

Изгибъ балки сосредоточенной нагрузкой, приложенной на концѣ.

§ 10. изслѣдованіе вопроса объ устойчивости плоской формы изгиба балокъ въ случаѣ дѣйствія сосредоточенныхъ поперечныхъ нагрузокъ мы начнемъ съ балки однимъ концомъ задѣланной неподвижно. Стѣнка балки лежитъ въ вертикальной плоскости и ось ея горизонтальна. Сосредоточенная нагрузка P приложена къ центру тяжести свободнаго концевого поперечнаго сѣченія и направлена вертикально внизъ. Подъ дѣйствіемъ силы P балка изогнется и при нашемъ способѣ задѣлки изгибъ будетъ происходить въ вертикальной плоскости, такъ какъ направленіе дѣйствующей силы совпадаетъ съ одной изъ главныхъ осей инерціи пепеpечнаго сѣченія балки. Теперь задача наша сводится къ тому, чтобы опредѣлить, при какомъ значенiи силы P плоская форма перестаетъ быть устойчивой. Примѣняя прежнiй методъ изслѣдованiя допустимъ, что при нѣкоторомъ значенiи изгибающей силы балка приняла искривленную форму изгиба, представленную на черт. 17.



Черт. 17.

Помѣстимъ начало координатъ въ точкѣ приложенiя силы P. Ось X-овъ направимъ параллельно первоначальному положенiю оси балки, ось Z-овъ направлена вертикально внизъ, а ось Y-овъ перпендикулярна плоскости ZX и направлена въ сторону закручиванья балки, какъ это показано на нашемъ чертежѣ.

Возьмемъ теперь какое нибудь поперечное сѣченiе балки съ абсциссой x и построимъ для него систему координатъ ξ, η, ζ совершенно такъ же, какъ мы это дѣлали въ ранѣе нами разобранныхъ случаяхъ. Моменты M_ξ, M_η, M_ζ составимъ въ общемъ видѣ и потомъ уже отбросимъ малые члены. Координаты точки приложенiя силы P относительно осей ξ, η, ζ при малыхъ углахъ поворота φ на основанiи таблицы косинусовъ (§ 4) представятся такимъ образомъ:

$$\xi = -x - y\frac{dy}{dx} - z\frac{dz}{dx}$$
$$\eta = x\frac{dy}{dx} - y - z\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\zeta = x\frac{dz}{dx} + y\varphi - z$$

Проэкціи силы P на тѣ же оси координатъ будутъ

$$P_\xi = P\frac{dz}{dx};\ P_\eta = P\varphi;\ P_\zeta = P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Выраженія для моментовъ получатся слѣдующія

$$M_\xi = P\varphi\left(x\frac{dz}{dx} + y\varphi - z\right) - P\left(x\frac{dy}{dx} - y - z\varphi\right)$$
$$M_\eta = P\left(-x - y\frac{dy}{dx} - z\frac{dz}{dx}\right) - P\frac{dz}{dx}\left(x\frac{dz}{dx} + y\varphi - z\right) \quad (3)$$
$$M_\xi = P\frac{dz}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} - y - z\varphi\right) - P\varphi\left(-x - y\frac{dy}{dx} - z\frac{dz}{dx}\right)$$

Отбрасывая малые члены получимъ:

$$M_\xi = P\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)$$
$$M_\eta = -Px \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$M_\zeta = Px\varphi$$

Пользуясь основными уравненіями равновѣсія (§ 4) и выбирая соотвѣтствующимъ образомъ знаки, можемъ написать:

$$P\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = -C\varphi' + \frac{Dh^2}{2}\varphi'''$$
$$B_2\frac{d^2y}{dx^2} = Px\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
$$B_1\frac{d^2z}{dx^2} = Px$$

Исключая изъ нихъ неизвѣстныя y и z, будемъ имѣть для опредѣленія φ слѣдующее уравненіе:

$$\frac{P^2x^2}{B_2}\varphi = -C\varphi'' + \frac{Dh^2}{2}\varphi^{\text{IV}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Проф. L. Prandtl въ своей работѣ [1]) имѣлъ въ виду изгибъ тонкихъ пластинокъ и потому могъ пренебречь изги-

[1]) См. § 1.

бомъ полокъ, который при крученіи является слѣдствіемъ неподвижнаго закрѣпленія конца балки. Чтобы изъ нашего общаго уравненія (6) получить этотъ частный случай, стоитъ только положить

$$D=0.$$

Для опредѣленія φ будемъ имѣть

$$\varphi'' + \frac{P^2}{B_2 C} x^2 \varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

Уравненіе это рѣшается въ Bessel'я функціяхъ и интегралъ его будетъ

$$\varphi = \sqrt{x} \left\{ A_1 J_{\frac{1}{4}} \left(\frac{Px^2}{2\sqrt{BC}} \right) + A_2 J_{-\frac{1}{4}} \left(\frac{Px^2}{2\sqrt{BC}} \right) \right\}$$

Для того чтобы искривленная форма изгиба была возможна, необходима слѣдующая зависимость между величиной силы P и размѣрами балки:

$$\frac{Pl^2}{\sqrt{B_2 C}} = 4{,}013 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Зависимость (7) опредѣлена L. Prandtl'емъ и соотвѣтствуетъ первой возможной искривленной формѣ изгиба. Увеличивая непрерывно P, возможно получить цѣлый рядъ искривленныхъ формъ, какъ въ случаѣ изгиба парами силъ, но эти формы не имѣютъ особаго практическаго интереса.

Переходя къ случаю двутавровой балки, можно сказать заранѣе, что благодаря большей жесткости балка будетъ устойчивѣе и потому въ выраженіи зависимости между силой P и размѣрами балки мы должны получить число большее нежели 4,013. Разность между нашими результатами и результатами L. Prandtl'я очевидно будетъ тѣмъ большая, чѣмъ значительнѣе вліяніе оказываютъ полки, т. е. чѣмъ больше D и чѣмъ меньше длина балки l.

Вычислить вліяніе полокъ очевидно можно будетъ только найдя интегралъ уравненія (6). Намъ неизвѣстно рѣшеніе этого уравненія въ замкнутой формѣ и потому мы попробуемъ найти его, пользуясь безконечными рядами.

Для упрощенія выкладокъ введемъ такія обозначенія:

$$\frac{2\,C}{Dh^2}=\frac{1}{a^2},\quad \frac{2\,P^2}{DB_1h^2}=\frac{1}{b^6}\quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

Не трудно видѣть, что введенныя нами величины a и b имѣютъ измѣреніе длины. Уравненіе (6) перепишется тогда въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi^{\text{IV}}-\frac{1}{a^2}\varphi^{\text{II}}-\frac{x^2}{b^6}\varphi=0\quad \dots\dots \quad (9)$$

Общій интегралъ его будемъ искать въ формѣ ряда

$$\varphi=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\dots\quad \dots\dots \quad (10)$$

и если этотъ рядъ будетъ сходящійся, то онъ и представитъ собой искомый интегралъ нашего уравненія (9).

Для опредѣленія коэфиціентовъ A_0, A_1, A_2, ... подставляемъ выраженіе для φ въ ур-іе (9), и изъ сравненія коэфиціентовъ получаемъ:

$$4\,.\,3\,.\,2\,.\,1\,.\,A_4-\frac{1}{a^2}\,.\,2\,.\,1\,.\,A_2=0$$

$$5\,.\,4\,.\,3\,.\,2\,.\,A_5-\frac{1}{a^2}\,.\,3\,.\,2\,.\,A_3=0$$

$$6\,.\,5\,.\,4\,.\,3\,.\,A_6-\frac{1}{a^2}\,.\,4\,.\,3\,.\,A_4-\frac{1}{b^6}\,.\,A_0=0$$

. . . .

. . . .

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,.\,A_n-\frac{1}{a^2}\,(n-2)\,(n-3)\,.\,A_{n-2}-$$

$$-\frac{1}{b^6}\,.\,A_{n-6}=0.$$

. . . .

Откуда получаемъ для опредѣленія коэфиціентовъ такую формулу:

$$A_n=\frac{A_{n-2}}{n\,(n-1)\,a^2}+\frac{A_{n-6}}{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,b^6}$$

Пользуясь ею мы выразимъ коэфиціенты ряда (10) черезъ величины A_0, A_1, A_2, A_3, которыя и будутъ произвольными постоянными полнаго интеграла нашего дифференціальнаго уравненія.

Въ результатѣ получимъ:

$$\varphi = A_0\,(M) + A_1 x\,(N) + A_2 x^2\,(Q) + A_3 x^3\,(P) \quad . \quad . \ (11)$$

Здѣсь большими буквами M, N, Q, P обозначены ряды, расположенные по возрастающимъ степенямъ x^2.

Мы здѣсь не выписываемъ этихъ рядовъ, такъ какъ въ дальнѣйшемъ пользуемся ими только въ преобразованномъ видѣ. При преобразованіяхъ для удобства вычисленія нами были выбраны аргументами величины, имѣющія измѣреніе отвлеченнаго числа. Величины эти слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \frac{x^2}{h^2}\cdot\frac{2C}{D} = \frac{1}{V_1^{\,2}} \\ \frac{x^6}{b^6} &= \frac{x^6\, 2P^2}{l^2 B_2 D} = W_1^{\,2} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \ (12)$$

Не трудно видѣть, что $V_1^{\,2}$ и $W_1^{\,2}$ суть отвлеченныя числа, вполнѣ опредѣленныя для каждаго поперечнаго сѣченія балки. Первое изъ нихъ зависитъ только отъ размѣра балки, и разъ балка задана, то оно можетъ быть вычислено. Что касается второго, то въ него входитъ также и величина дѣйствующей силы. Когда мы положимъ x равнымъ l, т. е. разсматриваемъ задѣланный конецъ балки, то значенія V_1 и W_1 совершенно совпадаютъ съ V и W, которыми мы пользовались въ случаѣ изгиба балки парами силъ. Въ дальнѣйшемъ намъ понадобятся значенія функцій (M), (N), (P) для $x=l$ и потому мы ихъ выписываемъ ниже.

$$(M)_l = 1 + \frac{W^2}{6\ldots3} + \frac{W^4}{12\ldots9.6\ldots3} + \frac{W^6}{18\ldots15.12\ldots9.6\ldots3} + \ldots \quad {}^{*})$$

$$+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{8\ldots3} + W^4\left(\frac{1}{14\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{14\ldots9.6\ldots3}\right) + \right.$$

$$\left. + W^6\left(\frac{1}{20\ldots17.14\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{20\ldots17.14\ldots9.6\ldots3} + \frac{1}{20\ldots15.12\ldots9.6\ldots3}\right)\right] + \ldots$$

$$+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{10\ldots3} + W^4\left(\frac{1}{16\ldots13.10\ldots3} + \frac{1}{16\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{16\ldots9.6\ldots3}\right) + \ldots\right] +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

[1]) Въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣется рядъ множителей идущихъ въ порядкѣ чиселъ, для сокращенія будемъ писать только крайніе множители, замѣняя промежуточные точками.

Въ общемъ видѣ рядъ можетъ быть представленъ такъ:

$$(M)_l = \sum a_{mn} W^{2m} \cdot \frac{1}{V^{2n}}$$

гдѣ

$$m = 0, 1, 2 \ldots\ldots, \quad n = 0, 1, 2 \ldots\ldots$$

При чемъ

$$a_{oo} = 1$$

$$a_{mo} = \frac{1.2.7.8.13.14\ldots(6m-5)(6m-4)}{6m!}$$

$$a_{on} = 0.$$

Далѣе, a_{mn} составляется изъ $a_{m-1;\,n}$ и изъ $a_{m,\,n-1}$ по формулѣ

$$a_{mn} = \frac{1}{(6m+2n-3)(6m+2n-2)(6m+2n-1)(6m+2n)} \cdot a_{m-1,\,n} +$$
$$+ \frac{1}{(6m+2n-1)(6m+2n)} \cdot a_{m,\,(n-1)}.$$

Подобнымъ же образомъ составляются и два другіе ряда $(N)_l$ и $(P)_l$.

$$(N)_l = 1 + \frac{W^2}{7\ldots4} + \frac{W^4}{13\ldots10.7\ldots4} + \frac{W^6}{19\ldots16.13\ldots10.7\ldots4} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{V^2}\Big[\frac{W^2}{9\ldots4} + W^4\Big(\frac{1}{15\ldots12.9\ldots4} + \frac{1}{15\ldots10.7\ldots4}\Big) +$$
$$+ W^6\Big(\frac{1}{21..18.15...12.9...4} + \frac{1}{21\ldots18.15\ldots10.7\ldots4} + \frac{1}{21...16.13\ldots10.7...4}\Big) + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{1}{V^4}\Big[\frac{W^2}{11\ldots4} + W^4\Big(\frac{1}{17...14.11...4} + \frac{1}{17\ldots12.9\ldots4} + \frac{1}{17\ldots10.7\ldots4}\Big) + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{1}{V^6}\Big[\frac{W^2}{13\ldots4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\Big] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(P)_l = 1 + \frac{W^2}{9\ldots6} + \frac{W^4}{15\ldots12.9\ldots6} + \frac{W^6}{21\ldots18.15\ldots12.9\ldots6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{v^2}\Big[\frac{1}{5.4} + W^2\Big(\frac{1}{11\ldots8.5.4} + \frac{1}{11\ldots6}\Big) +$$
$$+ W^4\Big(\frac{1}{17\ldots14.11\ldots8.5.4} + \frac{1}{17\ldots14.11.\ .6} + \frac{1}{17\ldots12.9\ldots6}\Big) + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{1}{V^4}\Big[\frac{1}{7\ldots4} + W^2\Big(\frac{1}{13\ldots10.7\ldots4} + \frac{1}{13\ \ldots8.5.4} + \frac{1}{13\ldots6}\Big) + \ldots\Big] +$$
$$+ \frac{1}{V^6}\Big[\frac{1}{9\ldots4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\Big] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

На основаніи приведеннаго не трудно себѣ выяснить законъ образованія послѣдовательныхъ членовъ каждаго ряда и показать, что ряды сходящіеся. При малыхъ значеніяхъ $\frac{1}{V^2}$ и W^2 приходится вычислять очень немного членовъ, чтобы получить достаточную точность, съ возрастаніемъ же $\frac{1}{V^2}$ и W^2 вычисленіе $(M)_l$, $(N)_l$, и $(P)_l$ дѣлается все затруднительнѣе.

Въ дальнѣйшемъ намъ понадобится также значеніе φ'. Мы его можемъ получить непосредственнымъ дифференцированіемъ выраженія (11).

$$\varphi' = \frac{1}{x} A_0 (R) + A_1 (S) + A_2 x (U) + A_3 x^2 (T).$$

Буквами $(R) \ldots (T)$ обозначены ряды расположенные по восходящимъ степенямъ x^2. Намъ въ дальнѣйшемъ понадобятся численныя значенія (R), (S), (T) при $x = l$ и потому мы ниже даемъ выраженія для нихъ, преобразованныя на основаніи обозначеній (12).

$$\begin{aligned}
(R)_l = {} & \frac{W^2}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{W^4}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 6 \ldots 3} + \frac{W^6}{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 12 \ldots 9 \cdot 6 \ldots 3} + \ldots \ldots \\
& + \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{7 \ldots 3} + W^4\left(\frac{1}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 8 \ldots 3} + \frac{1}{13 \ldots 9 \cdot 6 \ldots 3}\right) + \right. \\
& \left. + W^6\left(\frac{1}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 14 \ldots 11 \cdot 8 \ldots 3} + \frac{1}{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 14 \ldots 9 \cdot 6 \ldots 3} + \frac{1}{19 \ldots 15 \, 12 \ldots 9 \cdot 6 \ldots 3}\right) + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{9 \ldots 3} + W^4\left(\frac{1}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 10 \ldots 3} + \frac{1}{15 \ldots 11 \cdot 8 \ldots 3} + \frac{1}{15 \ldots 9 \cdot 6 \ldots 3}\right) + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{11 \ldots 3} + \ldots \ldots \ldots \ldots \right] + \\
& + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(S)_l = {} & 1 + \frac{W^2}{6 \cdot 5 \cdot 4} + \frac{W^4}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 7 \ldots 4} + \frac{W^6}{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 13 \ldots 10 \cdot 7 \ldots 4} + \ldots \\
& + \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{8 \ldots 4} + W^4\left(\frac{1}{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 9 \ldots 4} + \frac{1}{14 \ldots 10 \cdot 7 \ldots 4}\right) + \right. \\
& \left. + W^6\left(\frac{1}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 15 \ldots 12 \cdot 9 \ldots 4} + \frac{1}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 15 \ldots 10 \cdot 7 \ldots 1} + \frac{1}{20 \ldots 16 \cdot 13 \ldots 10 \cdot 7 \ldots 4}\right) + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{10 \ldots 4} + W^4\left(\frac{1}{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 11 \ldots 4} + \frac{1}{16 \ldots 12 \cdot 9 \ldots 4} + \frac{1}{16 \ldots 10 \cdot 7 \ldots 4}\right) + \ldots\right] + \\
& + \frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{12 \ldots 4} + \ldots \ldots \ldots \ldots \right] + \\
& + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(T)_l = 3 &+ \frac{W^2}{8.7.6} + \frac{W^4}{14.13.12.9\ldots6} + \frac{W^6}{20.19.18.15\ldots12.9\ldots6} + \cdots \\
&+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{1}{4} + W^2\left(\frac{1}{10.9.8.5.4} + \frac{1}{10.\ldots6}\right) + \right. \\
&\left. + W^4\left(\frac{1}{16.15.14.11\ldots8.5.4} + \frac{1}{16.15.14.11\ldots6} + \frac{1}{16\ldots12.9\ldots6}\right) + \cdots\right] + \\
&+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{1}{6.5.4} + W^2\left(\frac{1}{12.11.10.7\ldots4} + \frac{1}{12\ldots8.5.4} + \frac{1}{12\ldots6}\right) + \cdots\right] + \\
&+ \frac{1}{V^6}\left[\frac{1}{8.7.6.5.4} + \cdots\right] + \\
&+ \cdots
\end{aligned}
$$

Переходя къ общему интегралу (11) нашего уравненія постараемся опредѣлить произвольныя постоянныя въ зависимости отъ условій на концахъ балки. Назовемъ черезъ φ_0, φ'_0, φ''_0, φ'''_0 значенія угла поворота и послѣдовательныхъ производныхъ его на свободномъ концѣ балки, т. е. при $x=0$. Тогда не трудно на основаніи (11) показать, что

$$A_0 = \varphi_0;\quad A_1 = \varphi'_0;\quad A_2 = \frac{1}{2}\varphi''_0;\quad A_3 = \frac{1}{6}\varphi'''_0.$$

Такъ какъ мы полагаемъ, что къ свободному концу балки не приложено силъ, которыя сообщали бы полкамъ нѣкоторую начальную кривизну въ плоскости XY, то слѣдовательно φ''_0 должно равняться нулю, откуда

I) $$A_2 = 0$$

φ'_0 и φ'''_0 не являются совершенно произвольными величинами, они связаны между собой условіемъ

II) $$-C\varphi'_0 + \frac{D.l^2}{2}\varphi'''_0 = 0$$

выражающимъ, то обстоятельство, что скручивающій моментъ на свободномъ концѣ балки равенъ нулю.

Въ заключеніе у насъ остается двѣ произвольныхъ постоянныхъ, для опредѣленія которыхъ мы воспользуемся условіями закрѣпленія задѣланнаго конца балки.

Такъ какъ поперечное сѣченіе, соотвѣтствующее плоскости задѣлки, не можетъ повернуться, то слѣдовательно

III) $$\varphi_l = 0,$$

Касательныя къ изогнутымъ осямъ полокъ двутавровой балки у задѣланнаго конца будутъ перпендикулярны къ плоскости задѣлки и параллельны оси X-овъ. Слѣдовательно

IV) $$\varphi'_l = 0.$$

Окончательно для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ мы будемъ имѣть два уравненія.

$$\begin{aligned} \varphi_0 (M)_l + \varphi'_0 (N)_l l + \frac{1}{6} \varphi'''_0 (P)_l l^3 = 0 \\ \frac{1}{l} \varphi_0 (R)_l + \varphi'_0 (S)_l + \frac{l^2}{6} \varphi'''_0 (T)_l = 0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad (13)$$

Если мы примемъ во вниманіе условіе II) и наши обозначенія (12), то условія (13) перепишутся такимъ образомъ

$$\begin{aligned} \varphi_0 (M)_l + \varphi'_0 l \left[(N)_l + \frac{1}{6} \frac{1}{V^2} (P)_l \right] = 0 \\ \varphi_0 (R)_l + \varphi'_0 l \left[(S)_l + \frac{1}{6} \frac{1}{V^2} (T)_l \right] = 0 \end{aligned} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Здѣсь $(M)_l$ $(N)_l$, . . обозначаютъ значенія ф—ій (M), (N)... при $x = l$.

Если мы положимъ

$$\varphi_0 = 0; \quad \varphi'_0 = 0,$$

то очевидно условія (14) будутъ выполнены, но въ такомъ случаѣ

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

т. е. мы будемъ имѣть плоскую форму изгиба. Для возможности искривленной формы изгиба необходимо, чтобы уравненія (14) допускали для φ_0 и φ'_0 рѣшенія отличныя отъ нуля. Слѣдовательно опредѣлитель уравненій (14) долженъ быть нулемъ

$$(M)_l \left[(S)_l + \frac{1}{6} \frac{1}{V^2} (T)_l \right] - (R)_l \left[(N)_l + \frac{1}{6} \frac{1}{V^2} (P)_l \right] = 0 \quad . \quad (15)$$

Полученное уравненіе даетъ намъ зависимость между величинами W^2 и $\frac{1}{V^2}$, при которой становится возможной искривленная форма изгиба. Какъ мы видѣли раньше, величина

$\frac{1}{V^2}$ всегда можетъ быть вычислена, если извѣстны размѣры балки и модуль упругости матеріала, въ такомъ случаѣ уравненіе (15) дастъ намъ соотвѣтствующую величину W^2, а слѣдовательно и величину силы P, при которой возможно искривленіе балки. Называя W^2V^2 черезъ k^2, мы на основаніи обозначеній (12) будемъ имѣть

$$\frac{P^2l^4}{B_2C} = k^2$$

или

$$Pl = \frac{k\sqrt{B_2C}}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

формула аналогичная полученнымъ нами раньше въ случаѣ изгиба балки парами силъ и совпадающая съ результатами Prandtl'я (7), если положить

$$k = 4{,}013.$$

Чтобы полученная нами формула имѣла практическое значеніе, необходимо составить таблицы, пользуясь которыми можно было бы легко по заданному значенію $\frac{1}{V^2}$ опредѣлять величину W^2, а слѣдовательно и коэфиціентъ k. Въ противномъ случаѣ пришлось бы каждый разъ рѣшать уравненіе (15), что требуетъ большой работы.

Приступая къ составленію такой таблицы, необходимо себѣ прежде всего выяснить ту точность, съ которой должны быть опредѣлены числа этой таблицы. Какъ мы ниже увидимъ, наибольшія напряженія, соотвѣтствующія критическому значенію изгибающей силы, опредѣляются изъ формулы

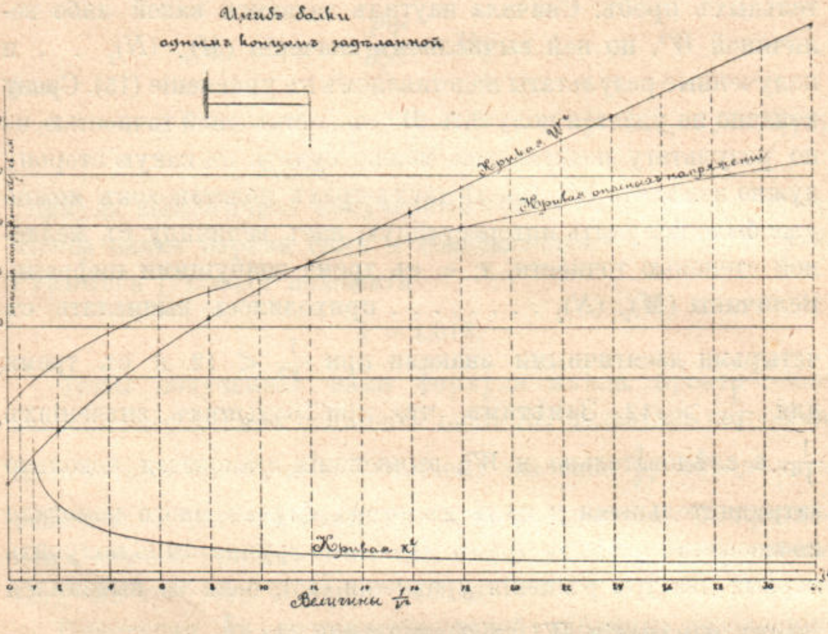
$$R = \frac{1}{4} W \frac{B_2}{B_1} \left(\frac{h}{l}\right)^2 E \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Поэтому, если мы при вычисленіи W^2 достигнемъ точности въ 1%, то допущенная нами при этомъ погрѣшность измѣнитъ не болѣе, какъ на ½% величину опасныхъ напряженій. Такъ какъ другія величины, входящія въ формулу (17), обыкновенно извѣстны намъ съ гораздо меньшей точностью, то ясно, что точность въ 1% при опредѣленіи

W^2 можно считать вполнѣ достаточной. Нами при составленіи таблицы W^2 вездѣ вычислялось съ тремя значущими цифрами, т. е. съ значительно бо́льшей точностью, чѣмъ то нужно для практики.

Опредѣлять величину W^2, соотвѣтствующую какому либо опредѣленному значенію $\frac{1}{V^2}$, приходится путемъ послѣдовательныхъ пробъ. Сначала наугадъ задаемся какой либо величиной W^2, по ней вычисляемъ значенія $(M)_p$, $(N)_l$ . . . и полученные результаты подставляемъ въ уравненіе (15). Сразу конечно не удается получить W^2 съ достаточной точностью, но по результату подстановки можно судить въ какую сторону нужно измѣнять W^2. Послѣ двухъ-трехъ подстановокъ можно уже было получить интересующую насъ величину съ желаемой степенью точности, т. е. съ тремя значущими цифрами. Величины $(M)_p$, $(N)_l$ . . . . приходилось вычислять съ четырьмя десятичными знаками при $\frac{1}{V^2} < 12$ и съ тремя для $\frac{1}{V^2} > 12$. Замѣтимъ, что при большихъ значеніяхъ $\frac{1}{V^2}$, а слѣдовательно и W^2, вычисленія становятся довольно затруднительными и намъ въ этомъ случаѣ много помогало пользованіе арифмометромъ. Особенно трудно было получить первыя два три рѣшенія уравненія (15), пока не выяснился законъ измѣненія W^2 въ зависимости отъ $\frac{1}{V^2}$.

Дальше намъ очень помогло графическое построеніе. Откладывая $\frac{1}{V^2}$ по оси абсциссъ, а соотвѣтствующія значенія W^2 по оси ординатъ, мы получили кривую, кривизна которой все убывала съ возрастаніемъ $\frac{1}{V^2}$. Въ силу этого практически оказывалось совершенно излишнимъ вычисленіе большого количества промежуточныхъ точекъ кривой; мы могли ограничиться только восемью точками, по которымъ была построена кривая, см. черт. 18, и значенія W^2 для промежуточныхъ значеній $\frac{1}{V^2}$ уже взяты прямо изъ чертежа. Это мы могли сдѣлать съ тѣмъ бо́льшимъ правомъ, что величины $\frac{1}{V^2}$ практически можно вычислять съ очень небольшой точностью. Кромѣ измѣненія величины W^2, на томъ же чертежѣ (18) представлено измѣненіе $V^2W^2 = k^2$. Эта кривая ассимптотически приближается къ оси Y при приближеніи $\frac{1}{V^2}$ къ нулю; другой ассимптотой будетъ пря-



Черт. 15.

мая параллельная оси X-овъ и проведенная въ разстояніи $(4{,}013)^2$ отъ нея. Величина $(4{,}013)^2$, какъ мы видѣли, соотвѣтствуетъ случаю, когда $\frac{1}{V^2}$ обращается въ безконечность и $D = 0$, разобранному Prandtl'емъ. Ниже мы приводимъ таблицу *C*, въ которой даны нѣкоторыя численныя значенія интересующихъ насъ величинъ.

Вычисленіе таблицы доведено до $\frac{1}{V^2} = 32$, что оказалось вполнѣ достаточно для тѣхъ численныхъ примѣровъ, которые намъ приходилось продѣлывать. Если бы пришлось

Таблица С.

$\frac{1}{V^2}$	W^2	W^2V^2	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ $E=2.10^6\frac{\text{klg.}}{\text{кв. см.}}$	$\frac{1}{V^2}$	W^2	W^2V^2	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ $E=2.10^6\frac{\text{klg.}}{\text{кв. см.}}$
0,1	196	1960	700	10	575	57,5	1200
1	247	247	785	12	623	51,9	1250
2	296	148	860	14	678	48,4	1300
3	342	114	925	16	725	45,3	1345
4	381	95,3	975	24	918	38,3	1515
6	453	75,5	1065	32	1100	34,4	1660
8	516	64,5	1140				

вычислять W^2 для значенiй $\frac{1}{V^2}$ большихъ 32, то мы полагали бы возможнымъ пользоваться такой формулой

$$W^2V^2 = k^2 = \frac{(4{,}013)^2}{(1-V)^4} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (18)$$

Получена эта формула на основанiи такихъ соображенiй: когда намъ приходилось опредѣлять уголъ закручиванiя двутавровой балки, задѣланной однимъ концомъ, то оказалось, что влiянiе жесткости полокъ можетъ быть учтенъ очень просто—нужно только въ обыкновенную формулу (не принимающую въ расчетъ жесткости полокъ) вставить вмѣсто дѣйствительной длины балки l нѣкоторую фиктивную длину (см. § 2)

$$l_1 = l\left(1 - V tgh\,\frac{1}{V}\right)$$

или въ случаѣ большихъ значенiй $\frac{1}{V^2}$

$$l_1 = l\ (1 - V).$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ нами теперь случаѣ искривленной формы изгиба жесткость полокъ влiяетъ главнымъ образомъ на крученіе, то примѣнимъ и здѣсь ранѣе выведенныя заключенія, именно положимъ, что для опредѣленія величины критической нагрузки P можно пользоваться формулой (7), въ которой не принята во вниманіе жесткость полокъ, но только вмѣсто дѣйствительной длины балки l введемъ длину l_1. Тогда будемъ имѣть

$$P = \frac{4{,}013 \sqrt{B_2 C}}{l^2 \left(1 - V tgh \frac{1}{V}\right)^2}.$$

Отсюда при большихъ значеніяхъ $\frac{1}{V^2}$ непосредственно получается приведенная нами выше формула (18) для вычисленія k^2.

Величины k^2, вычисленныя на основаніи этой формулы, тѣмъ ближе къ дѣйствительнымъ значеніямъ k^2, опредѣленнымъ на основаніи уравненія (15), чѣмъ больше величина $\frac{1}{V^2}$. При $\frac{1}{V^2}$ равномъ 32 разность меньше 2%. Съ возрастаніемъ $\frac{1}{V^2}$ до безконечности величина k^2, опредѣляемая изъ (18) приближается асимптотически къ $(4{,}013)^2$.

Относительно вычисленія опасныхъ напряженій замѣтимъ, что если въ формулу, служащую для опредѣленія наибольшихъ нормальныхъ напряженій,

$$R = \frac{M \cdot h}{2 I_1}$$

подставимъ вмѣсто M его значеніе изъ (16) и примемъ во вниманіе, что на практикѣ можно всегда съ достаточной точностью положить

$$D = \frac{B_2}{2},$$

то для вычисленія опасныхъ напряженій будемъ имѣть

$$R = \frac{1}{4} \cdot W\left(\frac{B_2}{B_1}\right)\left(\frac{h}{l}\right)^2 E.$$

Какъ и въ случаѣ изгиба балокъ парами силъ, оказывается возможнымъ составить таблицу для одного какого либо опредѣленнаго соотношенія $\frac{B_2}{B_1}$ и $\frac{h}{l}$. Величины напряженій при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{l}=\frac{1}{10}$ помѣщены въ таблицѣ C. Чтобы показать законъ ихъ измѣненія въ зависимости отъ величины $\frac{1}{V_2}$, вычерчена особая кривая напряженій на черт. 18.

Вліяніе внѣцентренно приложенной нагрузки.

§ 11. До сихъ поръ мы разсматривали идеальный случай, когда точка приложенія вертикальной силы совершенно совпадаетъ съ центромъ тяжести концевого поперечнаго сѣченія и стѣнка двутавровой балки расположена въ вертикальной плоскости. На основаніи этихъ условій нами и было получено уравненіе (15). Въ дѣйствительности, при самой точной постановкѣ опыта, возможны малыя отклоненія отъ идеальнаго случая и намъ нужно выяснить вліяніе отдѣльныхъ уклоненій.

Пусть стѣнка балки задѣлана не вертикально и малый уголъ составляемый ею съ вертикальной плоскостью пусть будетъ

$$\varphi_l=\alpha.$$

Предположимъ также, что точка приложенія силы перемѣщена отъ центра поперечнаго сѣченія по горизонтальному направленію на малую величину a. Тогда условія II) и III) (см. пред. §) очевидно перепишутся такимъ образомъ

$$\begin{gathered}-C\varphi'_0+\frac{Dh^2}{2}\varphi'''_0=Pa\\ \varphi_l=\alpha.\end{gathered}\qquad(1)$$

Уравненія для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ будутъ

$$\begin{aligned}&\varphi_0(M)_l+\varphi'_0 l\left[(N)_l+\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(P)_l\right]=\alpha-\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}l\,(P)_l\frac{Pa}{C}\\ &\varphi_0(R)_l+\varphi'_0 l\left[(S)_l+\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(T)_l\right]=-\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}l\,(T)_l\frac{Pa}{C}\end{aligned}\qquad(2)$$

Мы видимъ, что уравненія (2) допускаютъ для произвольныхъ постоянныхъ φ_0 и φ'_0 рѣшенія отличныя отъ нуля при всякихъ значеніяхъ изгибающей силы и слѣдовательно самая незначительная нагрузка P уже будетъ вызывать искривленіе оси балки въ плоскости XY.

Уголъ поворота концевого поперечнаго сѣченія легко найти изъ уравненій (2). Онъ будетъ равенъ

$$\varphi_0 = \frac{A}{(M)_l\left[(S)_l + \frac{1}{6}\frac{1}{\gamma^2}(T)_l\right] - (R)_l\left[(N)_l + \frac{1}{6}\frac{1}{\gamma^2}(P)_l\right]} \tag{3}$$

Буквой A мы обозначили довольно сложное выраженіе, въ которое множителями входятъ величины α и a. При малыхъ отклоненіяхъ отъ идеальнаго случая числитель формулы (3) будетъ величиной малой, а слѣдовательно и φ_0 будетъ мало, разъ знаменатель величина конечная. Въ тѣхъ случаяхъ, когда величина изгибающей силы такова, что знаменатель въ формулѣ (3) близокъ къ нулю, уголъ поворота быстро возрастаетъ. Такъ какъ знаменатель этотъ представляетъ собой ничто иное, какъ лѣвую часть уравненія (15), то мы можемъ заключить, что когда имѣются нами разсмотрѣнныя отклоненія отъ идеальнаго случая, искривленіе и крученіе балки начинаютъ быстро возрастать и могутъ достигнуть опасныхъ размѣровъ, если величина изгибающей силы приближается къ критической нагрузкѣ соотвѣтствующаго идеальнаго случая.

Замѣтимъ, что величины a и α, входящія въ выраженіе A числителя (3), могутъ быть подобраны такимъ образомъ, что A обратится въ нуль, тогда вліянія отдѣльныхъ отклоненій взаимно уничтожатся и явленіе будетъ протекать также, какъ и въ идеальномъ случаѣ.

Разсмотримъ теперь вліяніе перемѣщенія точки приложенія силы P по вертикальному направленію. Назовемъ черезъ d величину этого перемѣщенія; тогда скручивающій моментъ у свободнаго конца балки, при условіи появленія крученія, очевидно будетъ

$$M_\xi = Pd\varphi_0$$

II) Условіе предыдущаго параграфа напишется такъ

$$-C\varphi'_0+\frac{Dh^2}{2}\cdot\varphi'''_0=Pd\varphi_0.\quad\ldots\quad(4)$$

Откуда

$$\varphi'''_0=\frac{1}{V^2l^2}\varphi'_0+\frac{2P}{Dh^2}d\varphi_0\quad\ldots\quad(5)$$

Если принять во вниманіе, что на практикѣ всегда съ достаточной точностью можно положить

$$D=\frac{B_2}{2}$$

и что, на основаніи (12),

$$W^2=\frac{l^6}{h^2}\cdot\frac{2P^2}{B_2D},$$

то выраженіе (5) можно представить въ болѣе удобномъ для вычисленій видѣ

$$\varphi'''_0=\frac{1}{V^2l^2}\varphi'_0+\frac{W}{l^3}\frac{2d}{h}\varphi_0\quad\ldots\quad(6)$$

На основаніи этого уравненія, опредѣляющія произвольныя постоянныя напишутся такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned}&\left[(M)_l+\frac{1}{6}(P)_l\,W\frac{2d}{h}\right]\varphi_0+\left[(N)_l+\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(P)_l\right]l\varphi'_0=0\\&\left[(R)_l+\frac{1}{6}(T)_lW\frac{2d}{h}\right]\varphi_0+\left[(S)_l+\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(T)_l\right]l\varphi'_0=0\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Откуда, для возможности появленія искривленной формы изгиба, получимъ такое условіе

$$\left.\begin{aligned}&\left[(M)_l+\frac{1}{6}(P)_lW\frac{2d}{h}\right]\left[(S)_l+\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(T)_l\right]-\\&-\left[(R)_l+\frac{1}{6}(T)_l\,W\frac{2d}{h}\right]\left[(N)_l+\frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(P)_l\right]=0\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

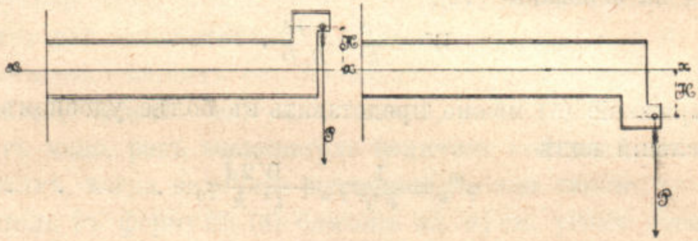
Не трудно видѣть, что при малыхъ перемѣщеніяхъ d, вліяніе ихъ на величину критической нагрузки, опредѣленной для идеальнаго случая, будетъ не велико. Если же d нельзя считать малымъ по сравненію съ высотой балки h и способъ приложенія изгибающей силы имѣетъ видъ представленный на черт. (16), то тогда критическая нагрузка должна быть вычисляема на основаніи уравненія (8).

Когда точка приложенія внѣшней силы будетъ совпадать съ верхней или нижней гранью балки, то

$$d = \pm \frac{h}{2}$$

и условіе (8) перепишется въ такомъ видѣ

$$\begin{aligned}&\left[(M)_l \pm \frac{1}{6}(P)_l W\right]\left[(S)_l + \frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(T)_l\right] - \\ &- \left[(R)_l \pm \frac{1}{6}(T)_l W\right]\left[(N)_l + \frac{1}{6}\frac{1}{V^2}(P)_l\right]\end{aligned} \quad \ldots \quad (8')$$



Черт. 16.

Знакъ + придется брать въ томъ случаѣ, когда точка приложенія силы лежитъ надъ осью балки и знакъ —, когда она лежитъ подъ осью. Замѣтимъ, что съ повышеніемъ точки приложенія силы устойчивость системы быстро уменьшается. Пониженіе же этой точки вліяетъ въ противоположномъ направленіи.

Разсмотримъ теперь, какъ повліяетъ на наши выводы малое отклоненіе дѣйствующей силы отъ вертикальнаго направленія. Положимъ, что дѣйствующая сила, оставаясь въ вертикальной плоскости yz, повернулась на малый уголъ α и пусть P и Q будутъ вертикальная и горизонтальная составляющія этой силы. Основныя уравненія для даннаго случая напишутся такимъ образомъ

$$\begin{aligned}-C\varphi' + \frac{Dh^2}{2}\varphi''' &= P(xy' - y) + Q(z - z'x)\\ B_2 y'' &= (P\varphi + Q)x \\ B_1 z'' &= Px.\end{aligned} \quad \ldots \quad (9)$$

Исключая изъ этихъ уравненій y и z и принимая во вниманіе, что $\frac{Q}{B_1}$ мало по сравненію съ $\frac{Q}{B_2}$, получимъ

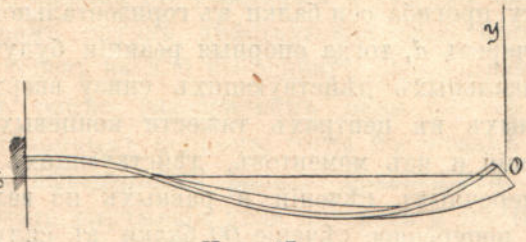
$$\varphi^{IV} - \frac{2\,C}{D'^2}\,\varphi^{II} - \frac{2\,P^2 x^2}{D\,h^2.B_2}\left(\varphi + \frac{Q}{P}\right) = 0$$

Это уравненіе отличается отъ уравненія (6) предыдущаго параграфа только тѣмъ, что вмѣсто угла φ вошелъ уголъ $\varphi + \frac{Q}{P}$. Если бы мы силу оставили въ ея вертикальномъ направленіи, а повернули стѣнку балки на уголъ $\frac{Q}{P}$ вокругъ оси, то очевидно явленіе было то же самое. Если мы обозначимъ $\varphi + \frac{Q}{P}$ черезъ ψ, то условія для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ будутъ такія.

$$\left.\begin{aligned} \psi_0\,(M)_l + \psi'_0\left[(N)_l + \frac{1}{6}\,\frac{1}{V^2}\,(P)_l\right] &= \frac{Q}{P} \\ \psi_0\,(R)_l + \psi'_0\left[(S)_l + \frac{1}{6}\,\frac{1}{V^2}\,(T)_l\right] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (10)$$

Искривленіе оси балки въ плоскости XY начинается при самыхъ малыхъ нагрузкахъ. Но если уголъ отклоненія силы $d = \frac{Q}{P}$ очень малъ, то искривленія оси будутъ малы, пока величина нагрузки не станетъ приближаться къ критическому значенію опредѣленному для идеальнаго случая.

Въ заключеніе замѣтимъ, что уравненіе (15) § 10, которое служило намъ для вычисленія критическихъ нагрузокъ,



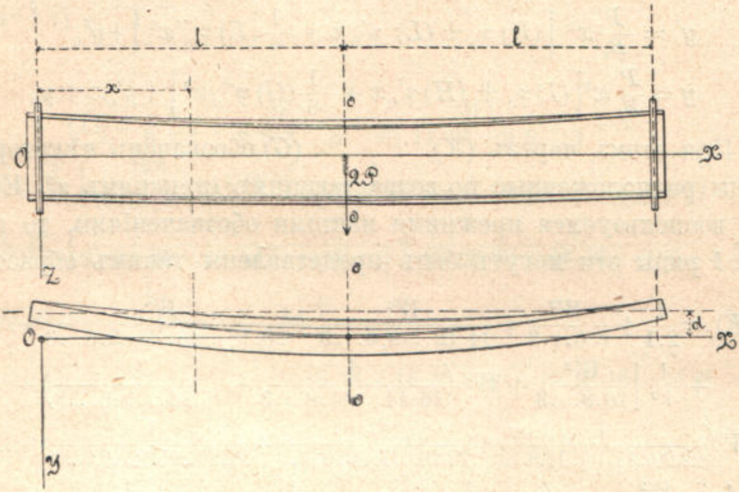
Черт. 17.

должно имѣть безчисленное множество корней и каждому корню соотвѣтствуетъ своя форма искривленнаго изгиба. Мы до сихъ поръ говорили о наименьшемъ корнѣ этого уравненія, такъ какъ онъ имѣетъ практическій интересъ и соотвѣтствуетъ первой возможной искривленной формѣ изгиба, представленной на черт. 14. Если бы мы вычислили второй корень, то ему соотвѣтствовала бы форма черт. (17) и т. д. Всѣ формы кромѣ первой будутъ неустойчивы.

Случай балки, лежащей на двухъ опорахъ.

Пусть AB представляетъ собой двутавровую балку съ пролетомъ $2l$. Внѣшняя сила величины $2P$ приложена въ срединѣ пролета такимъ образомъ, что точка приложенія ея совпадаетъ съ центромъ тяжести срединнаго поперечнаго сѣченія балки. Ось балки горизонтальна и стѣнка лежитъ въ вертикальной плоскости. Концы закрѣплены такимъ образомъ, что устранена возможность вращенія концевыхъ поперечныхъ сѣченій вокругъ оси XX, совпадающей съ осью балки въ недеформированномъ состояніи. Подъ вліяніемъ внѣшней силы $2P$ балка изгибается и такъ какъ направленіе силы совпадаетъ съ направленіемъ одной изъ главныхъ осей инерціи поперечнаго сѣченія, то изгибъ будетъ происходить въ вертикальной плоскости. Постепенно увеличивая нагрузку, мы можемъ достигнуть такого напряженнаго состоянія, при которой плоская форма изгиба становится неустойчивой. Тогда ось балки можетъ изогнуться въ горизонтальной плоскости и мы получимъ искривленную форму равновѣсія изображенную на черт. 18.

Стрѣлку прогиба оси балки въ горизонтальной плоскости назовемъ черезъ d, тогда опорныя реакціи будутъ состоять изъ вертикальныхъ дѣйствующихъ снизу вверхъ силъ P, приложенныхъ въ центрахъ тяжести концевыхъ поперечныхъ сѣченій и изъ моментовъ, дѣйствующихъ въ плоскостяхъ поперечныхъ сѣченій и равныхъ по величинѣ Pd. Срединное поперечное сѣченіе OO балки въ силу симметріи остается плоскимъ, и потому мы можемъ настоящую задачу легко свести къ ранѣе разобранному нами случаю балки, одинъ конецъ которой задѣланъ неподвижно. Въ самомъ дѣлѣ, если мы представимъ себѣ срединное поперечное сѣченіе балки задѣланнымъ, а къ концевому сѣченію приложимъ вертикальную силу P, проходящую въ разстояніи d отъ центра тяжести сѣченія, то мы ничѣмъ не измѣнимъ условій нашей задачи и изъ разсмотрѣнія условій равновѣсія полученной такимъ образомъ балки съ однимъ задѣланнымъ концомъ должны получить искомую величину критической нагрузки для балки, лежащей на двухъ опорахъ.



Черт. 18.

Возьмемъ лѣвую половину балки и построимъ для нея систему координатныхъ осей X, Y, Z, начало которой помѣстимъ на горизонтальной оси симметріи лѣваго концевого поперечнаго сѣченія въ разстояніи d отъ его центра тяжести. Въ такомъ случаѣ дѣйствующая сила всегда будетъ проходить черезъ начало координатъ. Оси направимъ также, какъ и въ ранѣе разобранномъ нами случаѣ балки съ однимъ задѣланнымъ концомъ; тогда мы можемъ воспользоваться уже выведенными раньше уравненіями (5) § 10 и сразу написать выраженія угла поворота и его первой производной для какого либо сѣченія балки

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0\,(M) + \varphi'_0\,(N)x + \frac{1}{6}\,\varphi_0'''\,(P)x^3 \\ \varphi' &= \varphi_0\,(R)\,\frac{1}{x} + \varphi'_0\,(S) + \frac{1}{6}\,\varphi_0'''\,(T)x^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Въ настоящемъ случаѣ, чтобы воспользоваться условіями на концахъ необходимо еще составить выраженія для y и его производной. На основаніи второго изъ основныхъ уравненій (5) § 10 будемъ имѣть

$$B_2 y'' = Px\left[\varphi_0\ (M) + \varphi'_0\ (N)\ x + \frac{1}{6}\varphi'''_0\ (P) x^3\right]\cdot$$

Отсюда интегрированіемъ получаемъ

$$\begin{aligned} y' &= \frac{P}{B_2} x^2 \left[(K)\varphi_0 + (L)\ \varphi'_0 x + \frac{1}{6}(E)\varphi_0''' x^3\right] + y'_0 \\ y &= \frac{P}{B_2} x^3 \left[(I)\varphi_0 + (H)\varphi'_0 x + \frac{1}{6}(G)\varphi'''_0 x^3\right] + y'_0 x + y_0 \end{aligned} \qquad (2)$$

При этомъ черезъ (K), ... (G) обозначены нѣкоторые ряды расположенные по возрастающимъ степенямъ x^2. Если мы воспользуемся прежними нашими обозначеніями, то при $x = l$ ряды эти могутъ быть представлены такимъ образомъ

$$\begin{aligned} (K)_l = &\frac{1}{2.1} + \frac{W^2}{8.6\ldots3} + \frac{W^4}{14.12\ldots9.6\ldots3} + \frac{W^6}{20.18\ldots15.12\ldots9.6\ldots3} + \cdots \\ &+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{10.8\ldots3} + W^4\left(\frac{1}{16.14\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{16.14\ldots9.6\ldots3}\right) + \right. \\ &+ W^6\left(\frac{1}{22.20\ldots17.14\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{22.20\ldots17.14\ldots9.6\ldots3} + \frac{1}{22.20\ldots15.12\ldots9.6\ldots3}\right) + \cdots\Big] + \\ &+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{12.10\ldots3} + W^4\left(\frac{1}{18,16\ldots13.10\ldots3} + \frac{1}{18.16\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{18.16\ldots9.6.5.4.3}\right) + \cdots\right] + \\ &+ \frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{14.12\ldots3} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right] + \\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (L)_l = &\frac{1}{3} + \frac{W^2}{9.7\ldots4} + \frac{W^4}{15.13\ldots10.7\ldots4} + \frac{W^6}{21.19\ldots16.13\ldots10.7\ldots4} + \cdots \\ &+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{11.9\ldots4} + W^4\left(\frac{1}{17.15\ldots12.9\ldots4} + \frac{1}{17.15\ldots10.7\ldots4}\right) + \right. \\ &+ w^6\left(\frac{1}{23.21\ldots18.15\ldots12.9\ldots4} + \frac{1}{23.21\ldots18.15\ldots10.7\ldots4} + \right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{23.21\ldots16.13\ldots10.7\ldots4}\right) + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right] + \\ &+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{13.11\ldots4} + W^4\left(\frac{1}{19.17\ldots14.11\ldots4} + \frac{1}{19.17\ldots12.9\ldots4} + \right.\right. \\ &\left.\left. + \frac{1}{19.17\ldots10.7\ldots4}\right) + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right] + \\ &+ \frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{15.13\ldots4} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\right] + \\ &+ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

$$(E)_l = \frac{1}{5} + \frac{W^2}{11.9\ldots6} + \frac{W^4}{19.15\ldots12.9\ldots6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{1}{7.5.4} + W^2\left(\frac{1}{13.11\ldots8.5.4} + \frac{1}{13.11\ldots6} + \right.\right.$$
$$\left.+ W^4\left(\frac{1}{19.17\ldots14.11\ldots8.5.4} + \frac{1}{19.17\ldots14.11\ldots6} + \frac{1}{19.17\ldots12.9\ldots6}\right) + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{1}{9.7\ldots4} + W^2\left(\frac{1}{15.13\ldots10.7\ldots4} + \frac{1}{15.13\ldots8.5.4} + \frac{1}{15.13\ldots6}\right) + \ldots\right] +$$
$$+ \frac{1}{V^6}\left[\frac{1}{11.9\ldots4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(I)_l = \frac{1}{3.2.1} + \frac{W^2}{9.8.6\ldots3} + \frac{W^4}{15.14.12\ldots9.6\ldots3} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{11.10.8\ldots3} + W^4\left(\frac{1}{17.16.14.11.8\ldots3} + \frac{1}{17.16.14\ldots9.6\ldots3}\right) + \right.$$
$$+ W^6\left(\frac{1}{23.22.20\ldots17.14\ldots11.8\ldots3} + \frac{1}{23.22.20\ldots17.14\ldots9.6\ldots3} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{23.22.20\ldots15.12\ldots9.6\ldots3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$
$$+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{13.12.10\ldots3} + W^4\left(\frac{1}{19.18.16\ldots13.10\ldots3} + \frac{1}{19.18.16\ldots11.8\ldots3} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{19.18.16\ldots9.6\ldots3}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$
$$+ \frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{15.14.12\ldots3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(H)_l = \frac{1}{4.3} + \frac{W^2}{10.9.7\ldots4} + \frac{W^4}{16.15.13\ldots10.7\ldots4} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{12.11.9\ldots4} + W^4\left(\frac{1}{18.17.15\ldots12.9\ldots4} + \frac{1}{18.17.15\ldots10.7.4} + \ldots\right]\right. +$$
$$+ \frac{1}{V^4}\left[\frac{1}{14.13.11\ldots4} + W^4\left(\frac{1}{20.19.17\ldots14.11\ldots4} + \frac{1}{20.19.17\ldots12.9\ldots4}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{20.19.17\ldots10.7\ldots4}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\Bigg] +$$
$$+ \frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{16.15.13\ldots4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right] +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(G)_l = \frac{1}{6.5} + \frac{W^2}{12.11.9\ldots6} + \frac{W^4}{18.17.15\ldots12.9\ldots6} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{V^2}\left[\frac{1}{8.7.5.4} + W^2\left(\frac{1}{14.13.11\ldots8.5.4} + \frac{1}{14.13.11\ldots6}\right) + \right.$$
$$+ W^4\left(\frac{1}{20.19.17\ldots14.11\ldots8.5.4} + \frac{1}{20.19.17\ldots14.11\ldots6} + \right.$$

$$+\frac{1}{20.19.17\ldots 12.9\ldots 6}\Big)+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \Big]+$$

$$+\frac{1}{V^4}\Big[\frac{1}{10.9.7\ldots 4}+W^2\Big(\frac{1}{16.15.13\ldots 10.7\ldots 4}+\frac{1}{16.15.13\ldots 8.5.4}+$$

$$+\frac{1}{16.15.13\ldots 6}\Big)+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \Big]+$$

$$+\frac{1}{V^6}\Big[\frac{1}{12.11.9\ldots 4}+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \Big]+$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

Въ выраженія (1) и (2) входятъ пять произвольныхъ постоянныхъ и для ихъ опредѣленія имѣемъ слѣдующія пять условій.

I) при $x=0$; $\varphi_0=0$, такъ какъ закрѣпленіе концовъ не допускаетъ вращенія относительно оси X-овъ;

II) при $x=l$; $y=0$; III) и $y'_l=0$, такъ какъ касательная въ этой точкѣ параллельна оси X-овъ

IV) при $x=l$; $\varphi'_l=0$

V) $Py_0=C\varphi'_0-\frac{Dh^2}{2}\varphi'''_0$ (y_0 очевидно равно d).

Пользуясь условіями III) и V), можемъ выразить произвольныя постоянныя y_0 и y'_0 черезъ φ'_0 и φ'''_0; подставляя ихъ въ условіе (4) получимъ уравненіе, заключающее только φ'_0 и φ'''_0

$$\Big[-(H)_l l^4+(L)_l l^4-\frac{CB_2}{P^2}\Big]\varphi'_0+$$
$$+\Big[\frac{(E)_l-(G)_l}{6}l^6+\frac{D\cdot h^2\cdot B_2}{2P^2}\Big]\varphi'''_0=0\quad .\ \ .\ \ .\ (3)$$

Для удобства вычисленія сдѣлаемъ нѣкоторыя преобразованія. На основаніи обозначеній (12) § 10 будетъ имѣть

$$\frac{B_2C}{P^2}=\frac{l^4}{W^2V^2}$$
$$\frac{Dh^2\cdot B_2}{2P^2}=\frac{l^6}{W^2}$$

Слѣдовательно (3) представится въ такомъ видѣ

$$\Big[(L)_l-(H)_l-\frac{1}{W^2V^2}\Big]\varphi'_0+\Big[\frac{(E)_l-(G)_l}{6}+\frac{1}{W^2}\Big]\cdot l^2\ \ \varphi'''_0=0\ \ .\ (4)$$

Присоединяя сюда условіе IV, которое намъ даетъ

$$\varphi'_0(S)_l+\frac{1}{6}l^2\varphi'''_0\ (T)_j=0\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ \ .\ (5)$$

Получимъ два уравненія (4), (5) для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ φ'_0 и φ'''_0. Чтобы кромѣ плоскаго изгиба возможна была и искривленная форма равновѣсія необходимо, чтобы опредѣлитель уравненій (4) и (5) обращался въ нуль

$$\left[(L)_l-(H)_l-\frac{1}{W^2V^2}\right]\cdot\frac{(T)_l}{6}-\left[\frac{(E)_l-(G)_l}{6}+\frac{1}{W^2}\right](S)_l=0\quad .\quad .\ (6)$$

Для опредѣленія величины критической нагрузки придется идти прежнимъ путемъ. По размѣрамъ балки и модулю упругости матеріала вычисляемъ величину $\frac{1}{V^2}$, а потомъ путемъ послѣдовательныхъ пробъ опредѣляемъ величину W^2 такимъ образомъ, чтобы было удовлетворено уравненіе (6). Обозначая, какъ и прежде, W^2V^2 черезъ k^2 будемъ имѣть для опредѣленія нагрузки P [1]) уравненіе

$$P=\frac{k\sqrt{B_2C}}{l^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

Если бы мы пренебрегли жесткостью полокъ и положили въ основномъ уравненіи $D=0$, то для опредѣленія критической нагрузки имѣли бы формулу, полученную Prandtl'емъ

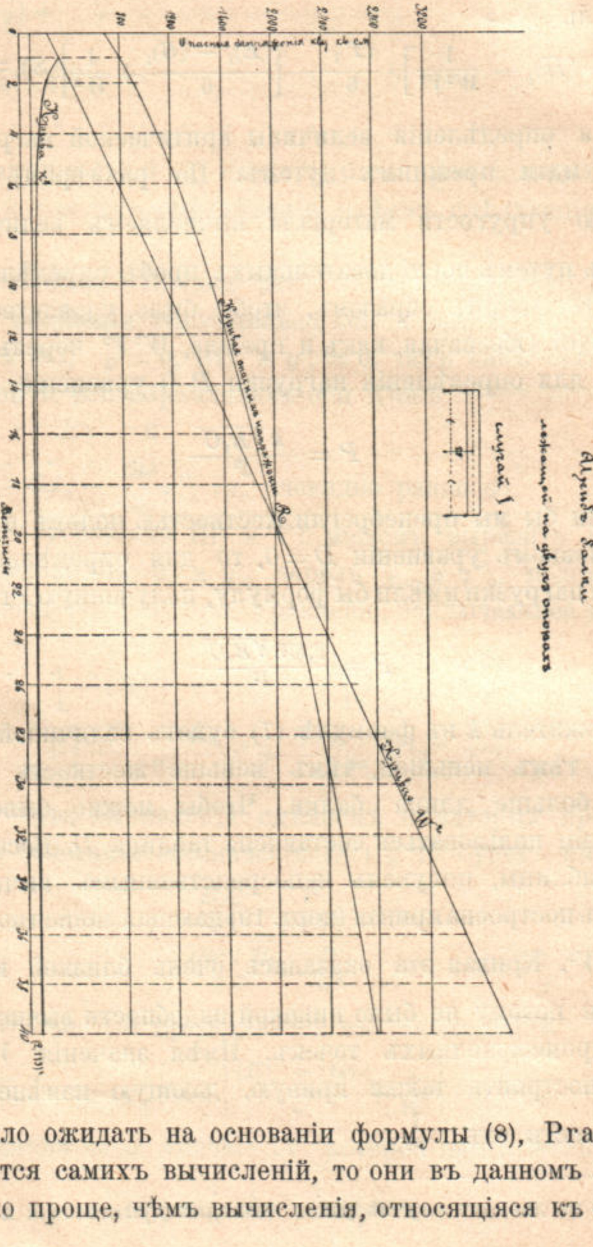
$$P=\frac{2{,}115\sqrt{B_2C}}{l^2}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8)$$

Множитель k въ формулѣ (7) будетъ величиной перемѣнной и тѣмъ меньшей, чѣмъ меньше жесткость полокъ и чѣмъ больше длина балки. Чтобы можно было нашими выводами пользоваться составлена таблица D. Восемь точекъ этой таблицы, получены непосредственнымъ вычисленіемъ. По нимъ построена кривая (черт. 19) дающая зависимость между $\frac{1}{V^2}$ и W^2. Кривая эта оказалась очень близкой къ прямой линіи и потому не было никакой надобности вычислять многихъ промежуточныхъ точекъ. Имѣя значенія W^2 можно было построить также кривую, дающую измѣненія k^2 въ зависимости отъ $\frac{1}{V^2}$.

---

[1]) P въ данномъ случаѣ равно половинѣ критической нагрузки.

Кривая эта съ одной стороны ассимптотически приближается къ оси Y-овъ, съ другой къ прямой параллельной оси X-овъ и проведенной въ разстояніи $(2,115)^2$ отъ нея, какъ того и



Черт. 19.

нужно было ожидать на основаніи формулы (8), Prandtl'я. Что касается самихъ вычисленій, то они въ данномъ случаѣ несравнено проще, чѣмъ вычисленія, относящіяся къ случаю балки, задѣланной однимъ концомъ въ стѣну, такъ какъ ряды $(K)_l$, $(L)_l$... сходятся очень быстро.

Таблица D.

$\frac{1}{V^2}$	W^2	W^2V^2	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{2l}=\frac{1}{10}$ $E=2.10^6\,klg.$ кв. см.	$\frac{1}{V^2}$	W^2	W^2V^2	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}$ и $\frac{h}{2l}=\frac{1}{10}$ $E=2.10^6\,klg.$ кв. см.
0,1	11,7	117	680	12	65,9	5,60	1620
1	15,9	15,9	800	16	81,0	5,25	1830
2	20,5	10,25	910	20	102	5,10	2020
4	29,7	7,43	1090	24	120	5,00	2190
6	38,8	6,47	1250	32	156	4,88	2500
8	47,8	5,98	1380	40	192	4,80	2770

Мы вычисленіе таблицы довели до значеній $\frac{1}{V^2} = 40$, такъ какъ за этимъ предѣломъ безъ большихъ погрѣшностей можно считать k постояннымъ, равнымъ 2,115 *).

Что касается вычисленія опасныхъ напряженій, то для нихъ очевидно остается въ силѣ прежняя формула

$$R=\frac{1}{4}\,W\,\frac{B_2}{B_1}\left(\frac{h}{l}\right)^2 E.$$

Замѣтимъ только, что l въ данномъ случаѣ будетъ половина пролета балки. Въ таблицѣ D приведены величины опасныхъ напряженій для

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100} \text{ и } \frac{h}{2l}=\frac{1}{10}.$$

Модуль упругости E принятъ равнымъ 2.10^6 klg. кв. см.

---

*) При $\frac{1}{V^2}=40$ ошибка въ опредѣленіи опасныхъ напряженій, если положить $k=2,115$ будетъ около 3%.

Точка приложенія силы не лежитъ на оси балки.

§ 13. Разсмотримъ здѣсь какое вліяніе на величину критической нагрузки будутъ оказывать различныя отступленія отъ только что разобраннаго нами случая. Положимъ, что точка приложенія силы не точно совпадаетъ съ центромъ тяжести срединнаго поперечнаго сѣченія, а перемѣщена на малую величину a въ направленіи оси $У$-овъ; кромѣ того пусть стѣнка балки составляетъ съ вертикальной плоскостью малый уголъ α. Тогда условія I) и II) предыдущаго параграфа придется измѣнить такимъ образомъ

$$\varphi_0 = \alpha;\ y_l = -a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Уравненія (4) и (5) § 12, служащія для опредѣленія произвольныхъ постоянныхъ φ'_0 и φ'''_0 перепишутся такъ

$$\begin{gathered}\left[(L)_l - (H)_l - \frac{1}{W^2V^2}\right]\varphi'_0 + \left[\frac{(E)_l - (G)_l}{6} + \frac{1}{W^2}\right] . \ l^2 . \ \varphi'''_0 = A \\ \varphi'_0\,(S)_l + \frac{1}{6}\,l^2\varphi'''_0\,(T)_l = B\end{gathered} \qquad (2)$$

гдѣ A и B нѣкоторыя величины, зависящія отъ размѣровъ балки и отъ малыхъ величинъ a и α. Уравненія (2) допускаютъ для φ'_0 и φ'''_0 рѣшенія отличныя отъ нуля при всякихъ значеніяхъ изгибающей силы. Когда опредѣлитель уравненія (2) приближается къ нулю, то искривленіе балки въ плоскости $XУ$ и сопровождающее его скручиваніе начинаетъ быстро возрастать.

Если бы мы предположили, что дѣйствующая сила не вертикальна, а слегка наклонна, то получили бы ту же картину явленія, т. е. уже при малыхъ значеніяхъ дѣйствующей силы начались бы искривленіе и скручиванье балки. Мы не будемъ на этомъ больше останавливаться, такъ какъ все это уже было разъ подробно разобрано въ случаѣ балки съ однимъ задѣланнымъ концомъ.

Перейдемъ теперь къ вопросу имѣющему большой практическій интересъ: — именно выяснимъ, какъ вліяетъ на устойчивость системы перемѣщеніе точки приложенія внѣшней силы по вертикальному направленію. Въ случаѣ, разобранномъ нами въ предыдущемъ параграфѣ, точка приложенія силы лежала на оси, между тѣмъ на практикѣ точка приложенія силы чаще всего совпадаетъ съ верхней или нижней гранью балки, и нужно ожидать, что это оказываетъ большое вліяніе на величину критической нагрузки.

Уравненія (1) и (2) предыдущаго параграфа очевидно останутся въ силѣ и придется только измѣнить условія на концахъ. Если мы черезъ H назовемъ перемѣщеніе точки приложенія силы по вертикальному направленію, то условіе 1) предыдущаго параграфа должно быть видоизмѣнено такимъ образомъ

$$y_l = -H\varphi_l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Соотвѣтственно этому измѣнятся и уравненія (4) и (5) § 12, опредѣляющія произвольныя постоянныя

$$\varphi_0' \text{ и } \varphi_0'''.$$

$$\left[(L)_l - (H)_l - \frac{1}{W^2V^2}\right]\varphi_0' + \left[\frac{(E)_l - (G)_l}{6} + \frac{1}{W^2}\right] l^2 \varphi_0''' =$$

$$= -\varphi_l \frac{HB_2}{Pl^4} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$\varphi_0' (S)_l + \frac{1}{6} (T)_l l^2 \varphi_0''' = 0.$$

Если мы примемъ во вниманіе, что

$$\varphi_l = \varphi_0'(N)_l\, l + \frac{1}{6} \varphi_0''' (P)_l l^3,$$

то для опредѣленія величины критической нагрузки будемъ имѣть такое условіе

$$\left[-(H)_l l^4 + (L)^l l^4 - \frac{l}{W^2V^2} + (N)_l l \frac{HB_2}{P}\right] \frac{1}{6} (T)_l l^2 -$$

$$-\left[\frac{(E)_l - (G)_l}{6} l^6 + \frac{l^6}{W^2} + \frac{1}{6} (P)_l l^3 \frac{HB_2}{P}\right] (S)_l = 0. \quad (5)$$

Если принять во вниманіе, что

$$\frac{Dh^2B_2}{2P^2} = \frac{l^6}{W^2}$$

и положить

$$D = \frac{B_2}{2}$$

то при $H = \pm \frac{h}{2}$ условіе (5) перепишется такимъ образомъ

$$\left[-(H)_l + (L)_l - \frac{1}{W^2 V^2} \pm (N)_l \frac{1}{W}\right] \frac{(T)_l}{6} -$$
$$-\left[\frac{(E)_l - (G)_l}{6} + \frac{1}{W^2} \pm \frac{1}{6}(P)_l \frac{1}{W}\right](S)_l = 0 \quad . \quad . (5')$$

Знакъ $+$ придется очевидно брать въ томъ случаѣ, когда точка приложенія силы совпадаетъ съ верхней гранью балки. Опредѣлить величину критической нагрузки для какой либо опредѣленной балки можно конечно только рѣшивши уравненіе (5)'.

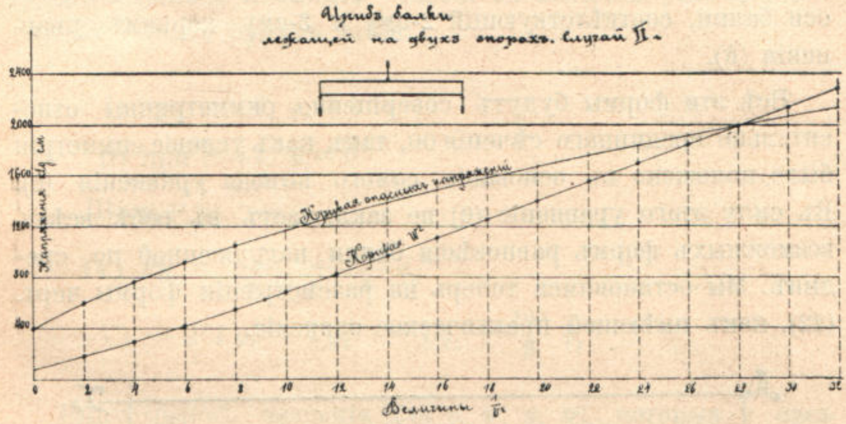
Для того случая, когда точка приложенія силы совпадаетъ съ верхней гранью (практически это наиболѣе часто встрѣчающійся случай), нами составлена таблица F, гдѣ для ряда значеній $\frac{1}{V^2}$ приведены величины соотвѣтствующихъ значеній W^2, W^2V^2, а также величины опасныхъ напряженій, вычисленныхъ для того случая, когда

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{100}; \quad \frac{h}{2l} = \frac{1}{10} \text{ и } E = 2 \;.\; 10^6 \;.\; \text{klg./кв. см.}$$

Таблица F.

$\frac{1}{v^2}$	w^2	w^2v^2	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{100}$ и $\frac{h}{2l} = \frac{1}{10}$	$\frac{1}{v^2}$	w^2	w^2v^2	Опасныя напр. при $\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{100}$ и $\frac{h}{2l} = \frac{1}{10}$
0,1	4,13	41,3	405	8	27,7	3,46	1050
1	6,36	6,36	505	10	34,3	3,43	1170
2	9,05	4,53	600	12	41,2	3,43	1280
3	11,9	3,97	690	16	55,3	3,46	1485
4	14,9	3,73	770	24	84,8	3,53	1840
6	21,1	3,52	920	32	114,4	3,58	2135

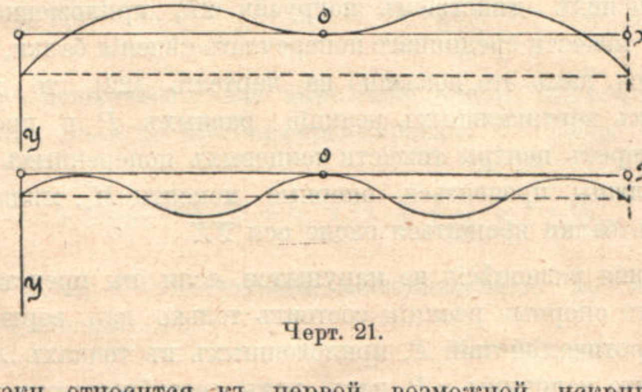
Кромѣ того на чертежѣ (20) представлена графически зависимость между $\frac{1}{V^2}$ съ одной стороны и величинами W^2, W^2V^2, и R съ другой.



Черт. 20.

Сравнивая таблицы D и F, мы видимъ, что повышеніе точки приложенія груза сильно вліяетъ на устойчивость системы и это вліяніе тѣмъ больше, чѣмъ меньше $\frac{1}{V^2}$, т. е. чѣмъ меньше длина балки при прочихъ равныхъ условіяхъ.

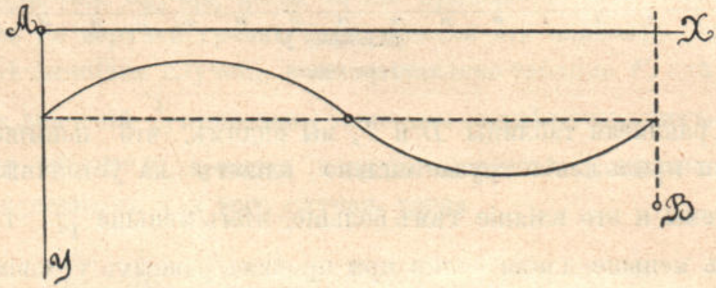
Въ заключеніе замѣтимъ, что все, что было сказано въ двухъ послѣднихъ параграфахъ о величинѣ критической



Черт. 21.

нагрузки, относится къ первой возможной искривленной формы изгиба, и при вычисленіяхъ мы пользовались наименьшимъ корнемъ уравненія (6) § 12. Но это уравненіе должно имѣть безчисленное множество корней и каждому изъ нихъ соотвѣтствуетъ своя возможная форма равновѣсія; всѣ эти формы кромѣ первой будутъ неустойчивы. На чертежѣ (21) изображенъ въ планѣ примѣрный видъ изогнутой оси балки, соотвѣтствующій 2-ому и 3-ему корнямъ уравненія (6).

Всѣ эти формы будутъ совершенно симметричны относительно срединнаго сѣченія 00, такъ какъ условіе симметріи было положено въ основаніе самого вывода уравненія (6). Въ силу этого уравненіе (6) не заключаетъ въ себѣ всѣхъ возможныхъ формъ равновѣсія балки нагруженной по рединѣ. Мы остановимся теперь на разсмотрѣніи формы черт. (22), какъ имѣющей практическое значеніе.



Черт. 22.

Если подъ дѣйствіемъ нагрузки $2P$, приложенной къ центру тяжести срединнаго поперечнаго сѣченія балки, балка изогнется, какъ это показано на чертежѣ (22), то кромѣ опорныхъ вертикальныхъ реакцій равныхъ P и проходящихъ черезъ центры тяжести концевыхъ поперечныхъ сѣченій должны проявиться опорные моменты M_0, мѣшающіе концамъ балки вращаться около оси XX.

Условія равновѣсія не нарушатся, если мы представимъ себѣ, что опорныя реакціи состоятъ только изъ вертикальныхъ противодѣйствій P, приложенныхъ въ точкахъ A и B такъ, что величины y_0P какъ разъ соотвѣтствуютъ опорнымъ моментамъ M_0. Если мы теперь возьмемъ половину балки, построимъ для нея систему координатъ X, Y, Z, такъ чтобы начало ея совпадало съ точкой A, то тогда можно пользоваться ранѣе выведенными основными уравненіями и для полученія величины критической нагрузки придется только измѣнить условія на концахъ. Для даннаго случая условія будутъ такія:

I) при $x=0,\ \varphi_0=0$

II) при $x=l,\ \varphi_l=0$

III) $y_l=y_0$

IV) $Py_0=-C\varphi_0'+\frac{Dh^2}{2}\varphi_0'''$

V) $-Ply_l'+Py_0=-C\varphi_l'+\frac{Dh^2}{2}\varphi_l'''$

Выписываемъ значенія для φ, φ', y, y', которыя у насъ были получены раньше:

$$\varphi=\varphi_0\ (M)+\varphi_0'\ (N)\,x+\frac{1}{6}\,x^3\,\varphi_0'''\ (P)$$

$$\varphi'=\varphi_0\ (R)\ \frac{1}{x}+\varphi_0'\ (S)+\frac{1}{6}\,x^2\,\varphi_0'''\ (T)$$

$$y=-\frac{P}{B_2}\Big[\ (I)\ \varphi_0\ x^3+(H)\ \varphi_0'\ x^4+\frac{1}{6}\,x^6\varphi_0'''\ (G)\Big]+y_0.x+y_0$$

$$y'=-\frac{P}{B_2}\Big[\ (K)\ \varphi_0\ x^2+(L)\ \varphi_0'\ x^3+\frac{1}{6}\ (E)\ \varphi_0'''\ x^5\ \Big]+y_0'$$

Намъ понадобится еще выраженіе для φ'''. Мы его можемъ получить, дважды продифференцировавъ φ'. Тогда будемъ имѣть

$$\varphi'''=\varphi_0\ (C)\,\frac{1}{x^3}+\varphi_0'\ (A)\,\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\,\varphi_0'''\ (B).$$

гдѣ A, B, C будутъ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x^2.

На основаніи условій I и II получимъ

$$\varphi_0'\ (N)_l\ l+\frac{1}{6}\ l^3\ \varphi_0'''\ (P)_l=0\ .\quad .\quad .\quad .\ (1)$$

Условіе III даетъ намъ

$$y'_0 \cdot l = \frac{P}{B_2}\Big[\ (H)_l\ \varphi_0'\ l^4 + \frac{1}{6}\ (G)_l\ \varphi_0'''\ l^6\ \Big] \ . \ \ . \ \ . \ (2)$$

Величину y'_0 можно выразить на основаніи условій IV) и V) черезъ φ'_0 и φ'''. Подставляя полученное такимъ образомъ значеніе для y'_0 въ (2) будемъ имѣть

$$\varphi_0'\Big[\ (S)_l - 1 - V^2 (A)_l + W^2 V^2 \Big((L)_l - (H)_l\Big)\Big] +$$
$$+ \frac{\varphi_0''' l^2}{6}\Big[(T)_l + 6V^2 - (B)_l V^2 + W^2 V^2\Big((E)_l - (G)_l\Big)\Big] = 0 . (3)$$

Изъ уравненій (1) и (3), опредѣляющихъ значенія произвольныхъ постоянныхъ φ'_0 и φ'''_0, сейчасъ же получаемъ условіе для опредѣленія величины критической нагрузки

$$(P)_l\Big[(S)_l - 1 - V^2 (A)_l + W^2 V^2\Big((L)_l - (H)_l\Big)\Big] -$$
$$- (N)_l\Big((T)_l + 6\ V^2 - V (B)_l{}^2 + W^2 V^2\Big((E)_l - (G)_l\Big)\Big] = \ . \ (4)$$

Изгибъ балки сплошной нагрузкой.

§ 14. Разсмотримъ наиболѣе простой случай балки, однимъ концомъ задѣланной неподвижно. Ось балки предполагаемъ горизонтальной, стѣнка балки лежитъ въ вертикальной плоскости. Нагрузка распредѣлена равномѣрно по оси балки и пусть p обозначаетъ нагрузку, приходящуюся на единицу длины. Оставляя прежній методъ разсужденій, положимъ, что чертежъ (23) въ двухъ проэкціяхъ представляетъ видъ изогнутой оси балки, соотвѣтствующій первой возможной искривленной формѣ изгиба. Положимъ, что начало координатъ XYZ совпадаетъ съ центромъ тяжести свободнаго концевого сѣченія балки. Возьмемъ какое-либо сѣченіе балки съ абсциссой x, для него построимъ систему кеординатъ ξ, η, ζ и составимъ выраженія моментовъ M_ξ, M_η, M_ζ.

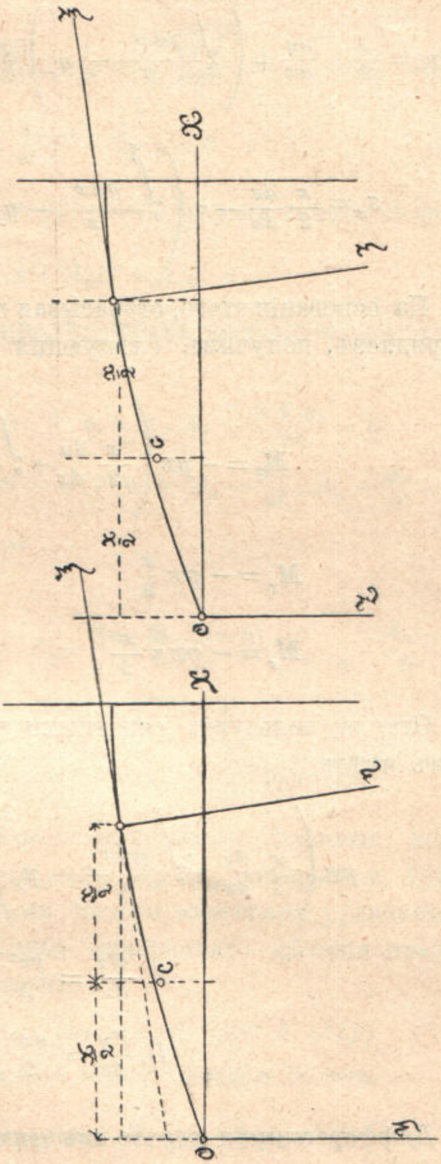
Сила дѣйствующая на лѣвую отсѣченную часть балки по величинѣ будетъ равна px, по направленію вертикальна, точка приложенія ея A очевидно совпадаетъ съ центромъ тяжести лѣвой отсѣченной части упругой линіи.

Координаты точки A, отнесенныя къ осямъ X, Y, Z, очевидно, при малыхъ прогибахъ, выразятся такимъ образомъ.

$$X = \frac{x}{2}$$

$$Y = \frac{\int_0^x z\,dx}{x} \quad . \; . \; (1)$$

$$Z = \frac{\int_0^x z\,dx}{x}$$



Черт. 23.

Не трудно составить теперь выраженія для координатъ той же точки A въ системѣ ξ, η, ζ. Пользуясь таблицей косинусовъ § 4 будемъ имѣть

$$\xi_x = -\frac{x}{2} + \frac{dy}{dx}\left(\frac{\int_0^x y\,dx}{x} - y_x\right) + \frac{dz}{dx}\left(\frac{\int_0^x z\,dx}{x} - z_x\right)$$

$$\eta_x = \frac{x}{2} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\int_0^x y\,dx}{x} - y_x \right) + \varphi \left(\frac{\int_0^x z\,dx}{x} - z_x \right) \quad . \quad . \quad (2)$$

$$z_x = \frac{x}{2} \frac{dz}{dx} - \varphi \left(\frac{\int_0^x y\,dx}{x} - y_x \right) + \left(\frac{\int_0^x z\,dx}{x} - z_x \right)$$

На основаніи этого, отбрасывая величины малыя высшихъ порядковъ, получимъ слѣдующія выраженія для моментовъ

$$M_\xi = -px \left(\frac{x}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{\int_0^x y\,dx}{x} - y_x \right)$$

$$M_\eta = -px \frac{x}{2}$$

$$M_z = -px\varphi \frac{x}{2}$$

Откуда, пользуясь основными уравненіями (см. § 3) будемъ имѣть

$$px \left(\frac{x}{2} \frac{dy}{dx} + \frac{\int_0^x y\,dx}{x} - y_x \right) = -C\varphi' + \frac{Dh^2}{2} \varphi'''$$

$$B_1 \frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{px^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$B_2 \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} \varphi$$

Дифференцируя первое изъ этихъ уравненій по x и, подставляя въ полученное такимъ образомъ выраженіе вмѣсто y'' его значеніе изъ уравненія третьяго, получимъ для опредѣленія φ слѣдующее уравненіе

$$\frac{1}{B_2} \left(\frac{px^2}{2} \right)^2 \varphi = -C\varphi'' - \frac{Dh^2}{2} \varphi^{IV} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

или вводя обозначенія

$$\frac{1}{a^2}=\frac{2C}{Dh^2};\quad \frac{1}{b^8}=\frac{2\left(\frac{px^2}{2}\right)^2}{B_2Dh^2}\quad \ldots \ldots (5)$$ [1]

будемъ имѣть

$$\varphi^{IV}-\frac{1}{a^2}\varphi^{II}-\frac{1}{b^8}\varphi=0\quad \ldots \ldots (4)$$

Общій интегралъ этого уравненія будемъ искать въ формѣ ряда

$$\varphi=A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$$

Для опредѣленія неопредѣленныхъ коэфиціентовъ будемъ имѣть соотношенія

$$4.3.2.1\,A_4-\frac{2.1}{a^2}.A_2=0\qquad 7.6.5.4.A_7-\frac{5.4.A_5}{a^2}=0$$

$$5.4.3.2.A_5-\frac{3.2}{a^2}.A_3=0\qquad 8.7.6.5.A_8-\frac{6.5}{a^2}.A_6-\frac{A_0}{b^8}=0$$

$$6.5.4.3.A_6-\frac{4.3}{a^2}.A_4=0\quad \ldots \ldots (6)$$

. . . .

$$n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3).A_n-\frac{(n-2).(n-3)}{a^2}.A_{n-2}-\frac{A_{n-8}}{b^8}=0$$

откуда получаемъ такую общую формулу

$$A_n=A_{n-2}\frac{1}{n\,(n-1)a^2}+A_{n-8}\frac{1}{n\,(n-1)\,(n-2)(n-3)b^8}\quad \ldots (7)$$

Пользуясь этимъ, можно всѣ неопредѣленные коэфиціенты выразить черезъ A_0, A_1, A_2, A_3, которыя и будутъ произвольными постоянными общаго интеграла уравненія (4). Уголъ поворота какого-либо поперечнаго сѣченія представится тогда такимъ образомъ

$$\varphi=A_0\,(m)+A_1x\,(n)+A_2x^2\,(q)+A_3x^3\,(p)\quad \ldots (8)$$

а крученіе, соотвѣтствующее этому сѣченію будетъ

$$\varphi'=A_0\,(r)\,\frac{1}{x}+A_1\,(s)+A_2\,x\,(u)+A_3x^2\,(t)\quad \ldots (9)$$

Въ выраженіяхъ (8) и (9) буквы (m) (n) . . . (t) обозначаютъ ряды, расположенные по восходящимъ степенямъ x^2.

[1]) Если принять во вниманіе, что $\frac{px^2}{2}=M_x$, то $\frac{1}{b^8}=\frac{2M^2}{B_2Dh^2}$.

Такъ какъ въ дальнѣйшемъ намъ понадобятся значенія ф—ій $(m)\ .\ .\ .\ (t)$ при $x=l$, то мы ихъ даемъ здѣсь, предварительно введя такія обозначенія

$$\frac{l^2}{a^2}=\frac{1}{V^2} \text{ и } \frac{l^8}{b^8}=\frac{(p^2 l^2)l^6}{2h^2B_2D}=W^2\ .\ \ .\ \ .\ \ . \quad (10)$$

$$(m)_l=1+\frac{W^2}{8\ldots5}+\frac{W^4}{16\ldots13.8\ldots5}+\frac{W^6}{24\ldots21.16\ldots13.8\ldots5}+\ ^{*})$$
$$+\frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{10\ldots5}+W^4\left(\frac{1}{18\ldots15.10\ldots5}+\frac{1}{18\ldots13.8\ldots5}\right)+\ .\ .\ .\right]+$$
$$+\frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{12\ldots5}+W^4\left(\frac{1}{20\ldots17.12\ldots5}+\frac{1}{20\ldots15.10\ldots5}+\frac{1}{20\ldots13.8\ldots5}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Въ общемъ видѣ рядъ можетъ быть представленъ такъ

$$(m)_l=\sum a_{mn}\ W^{2m}\ \frac{1}{V^{2n}}$$

гдѣ $m=0,1,2\ldots$, $n=0,1,2\ldots$

При чемъ

$$a_{oo}=1$$
$$a_{mo}=\frac{1\ 2.3.4.210.11\ 12\ \ldots(8m-7)\ (8m-6)\ (8m-5)\ (8m-4)}{8m}$$
$$a_{on}=0$$

Далѣе, a_{mn} составляется изъ $a_{m-1,n}$ и изъ $a_{m,n-1}$ по формулѣ

$$a_{mn}=\frac{1}{(8m+2n-3)\ (8m+2n-2)\ (8m+2n-1)\ (8m+2n)}a_{m-1,n}+$$
$$+\frac{1}{(8m+2n-1)\ (8m+2n)}a_{m,n-1}$$

Подобнымъ же образомъ составляются и два другіе ряда n_l и p_l

. . . .

$$(n)_l=1+\frac{W^2}{9\ldots6}+\frac{W^4}{17\ldots14.9\ldots6}+\frac{W^6}{25\ldots22.17\ldots14.9\ldots6}+\cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$+\frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{11\ldots6}+W^4\left(\frac{1}{19\ldots16.11\ldots6}+\frac{1}{19\ldots14.9\ldots6}\right)+\cdot\ \cdot\ \cdot\right]+$$

---

[1]) Въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣется рядъ множителей, идущихъ въ порядкѣ чиселъ, мы для сокращенія письма пишемъ только крайніе множители, замѣняя промежуточные точками.

$$+\frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{13\ldots6}+W^4\left(\frac{1}{21\ldots18.13\ldots6}+\frac{1}{21\ldots16.11\ldots6}+\frac{1}{21\ldots14.9\ldots6}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{15\ldots6}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p)_l=1+\frac{W^2}{11\ldots8}+\frac{W^4}{19\ldots16.11\ldots8}+\frac{W^6}{27\ldots24.19\ldots16.11\ldots8}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{V^2}\left[\frac{1}{5.4}+W^2\left(\frac{1}{13\ldots10.5.4}+\frac{1}{13\ldots8}\right)+\right.$$
$$\left.+W^4\left(\frac{1}{21\ldots18.13\ldots10.5.4}+\frac{1}{21\ldots18.13\ldots8}+\frac{1}{21\ldots16.11\ldots8}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^4}\left[\frac{1}{7\ldots4}+W^2\left(\frac{1}{15\ldots12.7\ldots4}+\frac{1}{15\ldots10.5\ldots4}+\frac{1}{15\ldots8}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^6}\left[\frac{1}{9\ldots4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(r)_l=\frac{W^2}{7.6.5}+\frac{W^4}{15.14.13.8\ldots8}+\frac{W^6}{23.22.21.16\ldots13.8\ldots5}+\ldots$$
$$+\frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{9\ldots5}+W^4\left(\frac{1}{17.16.15.10\ldots5}+\frac{1}{17\ldots13.8\ldots5}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{11\ldots5}+W^4\left(\frac{1}{19.18.17.12\ldots5}+\frac{1}{19\ldots15.10\ldots5}+\frac{1}{19\ldots13.8\ldots5}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{13\ldots5}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(s)_l=1+\frac{W^2}{8.7.6}+\frac{W^4}{16.15.14.9\ldots6}+\frac{W^6}{24.23.22.17\ldots14.9\ldots6}+\ldots$$
$$+\frac{1}{V^2}\left[\frac{W^2}{10\ldots6}+W^4\left(\frac{1}{18.17.16.11\ldots6}+\frac{1}{18\ldots14.9\ldots6}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^4}\left[\frac{W^2}{12\ldots6}+W^4\left(\frac{1}{20.19.18.13\ldots6}+\frac{1}{20\ldots16.11\ldots6}+\frac{1}{20\ldots14.9\ldots6}\right)+\ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^6}\left[\frac{W^2}{14\ldots6}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(t)_l=3+\frac{W^2}{10.9.8}+\frac{W^4}{18.17.16.11\ldots8}+\frac{W^6}{26.25.24.19\ldots16.11\ldots8}+\ldots$$
$$+\frac{1}{V^2}\left[\frac{1}{4}+W^2\left(\frac{1}{12.11.10.5.4}+\frac{1}{12\ldots8}\right)+\right.$$
$$\left.W^4\left[\frac{1}{20.19.18.13\ldots10.5.4}+\frac{1}{20.19.18.13\ldots8}+\frac{1}{20\ldots16.11\ldots8}+\ldots\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{V^4}\left[\frac{1}{6.5.4}+W^2\left(\frac{1}{14.13.12.7\ldots4}+\frac{1}{14\ldots10.5.4}+\frac{1}{14\ldots8}\right)+\ \ldots\right]+$$
$$+\frac{1}{V^6}\left[\frac{1}{8\ldots4}+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]+$$
$$+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Если мы величину угла поворота свободнаго конца балки обозначимъ черезъ φ_0, то не трудно на основанiи (8) и (9) получить

$$\left.\begin{aligned}\varphi&=\varphi_0\,(m)+\varphi_0'\,(n)\,x+\frac{1}{2}\,\varphi_0''\,(q)\,x^2+\frac{1}{6}\,\varphi_0'''\,(p)\,x^3\\ \varphi,&=\varphi_0\,(r)\,\frac{1}{x}+\varphi_0'\,(s)+\frac{1}{2}\,\varphi_0''\,(u)\,\,x+\frac{1}{6}\,\varphi_0'''\,(t)\,x^2\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Для опредѣленiя произвольныхъ постоянныхъ у насъ будутъ такiя условiя на концахъ

$$\text{I и II) при } x=0\qquad \varphi_0''=0,\qquad C\,\varphi_0'-\frac{Dh^2}{2}\,\varphi_0'''=0$$
$$\text{III и IV) при } x=l\qquad \varphi_l=0,\qquad \varphi_l'=0$$

которыя даютъ намъ слѣдующiя два уравненiя

$$\left.\begin{aligned}\varphi_0\,(m)_l+\varphi_0'\,l\,\left((n)_l+\frac{l^2}{a^2}\,\frac{1}{6}\,(p)_l\right)&=0\\ \varphi_0\,(r)_l+\varphi_0'\,l\,\left((s)_l+\frac{l^2}{a^2}\,\frac{1}{6}\,(t)_l\right)&=0\end{aligned}\right\}\quad .\ .\ (12)$$

Для возможности искривленiя оси балки въ плоскости XY должно быть удовлетворено условiе

$$(m)_l\left((s)_l+\frac{1}{6}\,\frac{1}{V^2}\,(t)_l\right)-(r)_l\left((n)_l+\frac{1}{6}\,\frac{1}{V^2}\,(p)_l\right)=0\quad .\ (13)$$

Ходъ расчета при опредѣленiи величины критической нагрузки остается прежнiй: По заданнымъ размѣрамъ балки и свойству матерiала вычисляемъ величину $\frac{1}{V^2}$, а потомъ изъ уравненiя (13) опредѣляемъ соотвѣтствующую величину W^2. Называя величину W^2V^2 черезъ k^2, будемъ на основанiи обозначенiй (10) имѣть

$$k^2=\frac{\left(\frac{pl}{2}\right)^2\cdot l^4}{B_2C}$$

Величина $\left(\frac{pl}{2}\right)^2 . l^2$ есть ничто иное, какъ значеніе квадрата изгибающаго момента въ плоскости задѣлки балки. Называя его черезъ M, получимъ уже знакомую намъ формулу

$$M = \frac{k\sqrt{B_2 C}}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Предѣлы примѣнимости выведенныхъ формулъ.

§ 15 Формулы строительной механики, которыми мы пользовались при выводѣ основныхъ уравненій, приложимы къ совершенно упругимъ тѣламъ, и потому всѣ результаты, относящіеся къ величинѣ критическихъ изгибающихъ моментовъ, имѣютъ дѣйствительное значеніе лишь до тѣхъ поръ, пока соотвѣтствующія имъ напряженія не превзошли предѣла упругости даннаго матеріала. За предѣлами упругости вычисленныя по нашимъ формуламъ значенія критическихъ изгибающихъ моментомъ, вообще говоря, не имѣютъ никакого реальнаго значенія, и ими можно пользоваться только временно, пока въ интересующей насъ области не имѣется достаточнаго количества научно поставленныхъ опытныхъ изслѣдованій.

Такъ какъ за предѣлами упругости деформаціи растутъ быстрѣе напряженій, то надо полагать, что въ такихъ случаяхъ вычисленныя по нашимъ формуламъ значенія критическихъ изгибающихъ моментовъ будутъ преувеличены, и слѣдовательно, повѣряемыя на устойчивость балки будутъ на дѣлѣ въ болѣе опасныхъ условіяхъ, чѣмъ то слѣдуетъ изъ теоретически выведенныхъ формулъ.

Особенно сомнительными въ смыслѣ устойчивости являются балки такихъ поперечныхъ сѣченій, при которыхъ отношеніе $\frac{B_2}{B_1}$ очень мало, т. е. высокія балки склепанныя изъ тонкихъ желѣзныхъ листовъ, какъ, напримѣръ, балки мостовыя. Что касается прокатныхъ балокъ, то здѣсь приходится говорить только объ устойчивости наиболѣе высокихъ изъ нихъ;

балки небольшой высоты имѣютъ такія поперечныя сѣченія, при которыхъ можно считать устойчивость всегда обезпеченной.

Замѣтимъ, что стремленіе достигнуть какъ можно большей экономіи въ вѣсѣ балокъ приводитъ иногда къ не совсѣмъ удачнымъ типамъ поперечныхъ сѣченій. Для примѣра укажемъ на данныя новаго нѣмецкаго сортамента, опубликованныя въ Zeitsch. d. Ver. d. Ing. № 36 1905 г.

Если принимать во вниманіе отношеніе вѣса погонной единицы балки къ моменту сопротивленія поперечнаго сѣченія, то новый сортаментъ представляетъ по сравненію съ старымъ значительныя выгоды. Но мы должны будемъ придти къ совершенно инымъ заключеніямъ, если сравнимъ достоинства обоихъ сортаментовъ съ точки зрѣнія устойчивости.

Экономія въ вѣсѣ балки достигнута благодаря тому, что взята значительно меньшая толщина стѣнки и ширина полокъ; вслѣдствіе этого жесткость балки при крученіи C и отношеніе главныхъ жесткостей при изгибѣ $\frac{B_2}{B_1}$ значительно уменьшились и балка стала менѣе устойчивой. Сдѣлаемъ примѣрныя вычисленія для наиболѣе высокаго поперечнаго сѣченія. Данныя сортамента таковы:

Высота $h = 600$ mm

Ширина полокъ $b = 180$ mm.

Толщина стѣнки $d = 14{,}6$ mm.

Толщина полокъ $t = 27{,}2$ mm.

На основаніи этихъ размѣровъ будемъ имѣть отношеніе главныхъ жесткостей при изгибѣ:

$$\frac{B_2}{B_1} = \infty \frac{1}{38}$$

Жесткость балки при крученіи на основаніи приближенныхъ пріемовъ изложенныхъ въ § 3 будетъ

$$C = \infty \left(12 \,.\, (2{,}72)^3 + 20 \,.\, (1{,}46)^3\right) . \, G = \infty \, 303 \, G \text{ klg. кв. см.}$$

Наибольшая жесткость одной полки при изгибѣ будетъ

$$D = \frac{2{,}72 \cdot 18^3}{12} E = \infty \, 1320 \, E.$$

Полагая коэфиціентъ поперечнаго сжатія для желѣза равнымъ $^1/_4$, получимъ

$$\frac{G}{E}=\frac{1}{2{,}5}$$

тогда

$$\frac{2\,C}{D}=\frac{2.303}{1320}\cdot\frac{G}{E}=\infty\,0{,}184.$$

Имѣя величину этого соотношенія, уже легко вычислить для всякаго пролета балки, какъ значенія $\frac{1}{V^2}$, такъ и значенія опасныхъ напряженій, соотвѣтствующихъ какому либо опредѣленному роду нагрузки.

Положимъ что балка разсматриваемаго нами поперечнаго сѣченія лежитъ на двухъ опорахъ и нагружена по срединѣ сосредоточенной силой $2P$, приложенной къ верхнему канту балки. Пусть

$$\frac{h}{2\,l}=\frac{1}{12}$$

тогда

$$\frac{1}{V^2}=\frac{2\,C}{D}\quad\left(\frac{l}{h}\right)^2=0{,}184\,.\;36=6{,}6.$$

На основаніи вычисленной нами таблицы F, для полученнаго нами значенія величины $\frac{1}{V^2}$, опасныя напряженія будутъ

$$R=\infty\,960\ \text{klg. кв. см.}$$

Если мы примемъ во вниманіе, что таблица F вычислена для

$$\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{100}\ \text{и}\ \frac{h}{2l}=\frac{1}{10},$$

то не трудно сейчасъ же получить величину опасныхъ напряженій, соотвѣтствующую нашему случаю.

$$R'=\frac{960.10^4}{38.144}=\infty\,1750\ \text{klg. на кв. см.}$$

Если бы мы задались меньшимъ пролетомъ балки и положили бы, напримѣръ

$$\frac{h}{2l}=\frac{1}{10},$$

то тогда соотвѣтствующія напряженія таблицы F были бы, для

$$\frac{1}{V^2} = 0{,}184.25 = \infty\, 4{,}6,$$

$$R = 735 \text{ klg. на кв. см.}$$

Для нашей балки мы бы получили такія опасныя напряженія

$$R' = \frac{735.100}{38} = \infty\, 1930 \text{ klg. на кв. см.}$$

Какъ и нужно было ожидать, съ уменьшеніемъ пролета балка становится устойчивѣе, но все-таки опасныя напряженія остаются гораздо ниже разрушающихъ напряженій для желѣза.

Если мы возьмемъ наиболѣе высокую прокатную балку американскаго сортамента, то ея устойчивость оказывается еще менѣе обезпеченной. Размѣры сѣченія будутъ.

Высота $h = 610$ mm.
Толщина стѣнки $b = 12{,}6$ mm.
Ширина полокъ $d = 177{,}8$ mm.
Толщина полокъ $t = 22{,}7$ mm.

Для нея будемъ имѣть

$$\frac{B_2}{B_1} = \infty\, \frac{1}{42}$$

и

$$\frac{2C}{D} = \infty\, \frac{1}{7{,}5}$$

Если положимъ отношеніе

$$\frac{h}{2l} = \frac{1}{12}$$

то

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{7{,}5}\,.\,36 = 4{,}8.$$

и на основаніи таблицы E

$$R = 830 \text{ klg. на кв. см.}$$

Отсюда сейчасъ-же получаемъ опасныя напряженія для нашего случая

$$R' = \frac{830.100.100}{42.144} = \infty\, 1375 \text{ klg.}$$

Возьмемъ теперь примѣръ клепанной двутавровой балки.

Балка [1]) состоитъ изъ вертикальной стѣнки $70 \times 0{,}8$ см. и четырехъ уголковъ $7 \times 7 \times 0{,}8$ см. Свободная длина балки

$$2l = 3{,}25 \text{ mt.}$$

Вычисленія даютъ намъ

$$B_1 = \infty 59140\ E \text{ см.}^2 \text{ klg.}$$

$$B_2 = \infty 446\ E \text{ см.}^2 \text{ klg.}$$

$$\frac{B_2}{B_1} = \infty \frac{1}{133}$$

и

$$D = \infty 223\ E.$$

(Здѣсь мы взяли $D = \frac{B_2}{2}$; если бы мы приняли во вниманіе жесткость однихъ уголковъ, то получили бы величину на $^1/_2\%$ меньшую).

Величину C опредѣляемъ на основаніи приближенныхъ формулъ § 3

$$C = \infty 72 \,.\, G.$$

откуда

$$\frac{2C}{D} = 0{,}257$$

и слѣдовательно

$$\frac{1}{V^2} = \frac{2C}{D}\left(\frac{l}{h}\right)^2 = 0{,}257 \,.\, \left(\frac{3{,}25}{1{,}40}\right)^2 = 1{,}38.$$

Для случая нагрузки, приложенной къ верхнему канту балки по срединѣ пролета, таблица F даетъ намъ величину опасныхъ напряженій

$$R = \infty 540 \text{ klg.}$$

относящихся къ случаю

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{100} \text{ и } \frac{h}{2l} = \frac{1}{10}$$

Въ нашемъ случаѣ для величины опасныхъ напряженій будемъ имѣть

$$R' = \frac{540 \,.\, 10^4}{133 \,.\, 21{,}6} = \infty 1880 \text{ klg.}$$

---

[1]) Это поперечное сѣченіе соотвѣтствуетъ продольной балкѣ изъ проэкта моста черезъ Русановскій протокъ Днѣпра у Кіева (см. проэктъ Бѣлелюбскаго и Кривошеина).

И здѣсь мы получили для опасныхъ напряженій величину значительно меньшую нежели разрушающія напряженія для желѣза. Какъ показываютъ приведенные примѣры, повѣрка устойчивости балки по заданнымъ размѣрамъ производится очень просто. На получаемыя этимъ путемъ величины критическихъ напряженій нужно смотрѣть какъ на тотъ опасный предѣлъ, который ни въ коемъ случаѣ не долженъ быть допускаемъ въ сооруженіи. Для опредѣленія величины допустимыхъ напряженій мы будемъ исходить изъ того положенія, что при достиженіи напряженіями величины вычисленныхъ критическихъ напряженій сооруженію угрожаетъ опасность въ той же мѣрѣ, какъ напримѣръ при растяженіи—достиженіе временнаго сопротивленія разрыву. Слѣдовательно допускаемыя напряженія при изгибѣ двутавровыхъ балокъ должны быть во столько разъ меньше вычисленныхъ критическихъ напряженій, во сколько разъ допускаемо напряженіе на разрывъ меньше временнаго сопротивленія разрыву.

Опыты.

§ 1. Въ началѣ настоящей статьи [1]) были получены нѣкоторыя формулы, относящіяся къ скручиванью двутавровой балки съ однимъ задѣланнымъ концомъ. Такъ какъ этими формулами мы пользовались въ дальнѣйшихъ выводахъ при опредѣленіи величинъ критическихъ нагрузокъ, то провѣрка ихъ опытнымъ путемъ является очень важной. Особенно удобна для такой провѣрки формула [2]):

$$\varphi = \frac{M}{C}\left[l - x + \frac{a}{\operatorname{Cos}h\,\frac{l}{a}}\cdot \sinh\frac{a}{x} - a\operatorname{tgh}\frac{l}{a}\right], \quad . \quad . \quad (1)$$

дающая уголъ закручиванья для любого поперечнаго сѣченія балки.

Здѣсь l—длина балки, x—разстояніе выбраннаго сѣченія отъ свободнаго конца, M— скручивающій моментъ, C— жесткость при крученіи въ случаѣ свободныхъ концовъ и

$$a = h\sqrt{\frac{D}{2C}},$$

гдѣ h — высота и D — наибольшая жесткость при изгибѣ каждой полки.

Провѣрку формулы (1) приходится начать рядомъ предварительныхъ опытовъ по опредѣленію величинъ C и D.

---

[1]) См. Извѣст. Полит. Инст. 1905 г. вып. 3—4.

[2]) См. § 2 форм. (8).

Балки, надъ которыми производились опыты, были изготовлены въ механической мастерской института. Для полученія поперечныхъ сѣченій, по возможности, соотвѣтствующихъ теоретически разобранному случаю, обыкновенная двутавровая балка высотой 5″ подвергалась оструржкѣ.

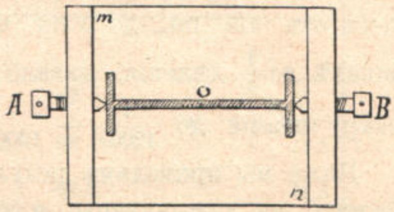
Толщина стѣнки и полокъ была доведена до 3 mm. и высота до 119 mm. Для ширины полокъ брались величины 40 mm, 30 mm и 20 mm. Радіусъ окружности, сопрягающей полки съ вертикальной стѣнкой балки, взятъ былъ очень малымъ, чтобы вліяніе закругленія на величину жесткости было невелико. Относительно размѣровъ поперечнаго сѣченія замѣтимъ, что желательно было бы имѣть меньшую толщину стѣнки и полокъ, т. к. тогда выведенныя формулы возможно было бы прилагать съ большей точностью, и явленія неустойчивости при изгибѣ были бы рѣзче выражены. Къ сожалѣнію при малой толщинѣ балка сильно гнется во время оструржки, и работа становится не точной.

Опредѣленіе величины C.

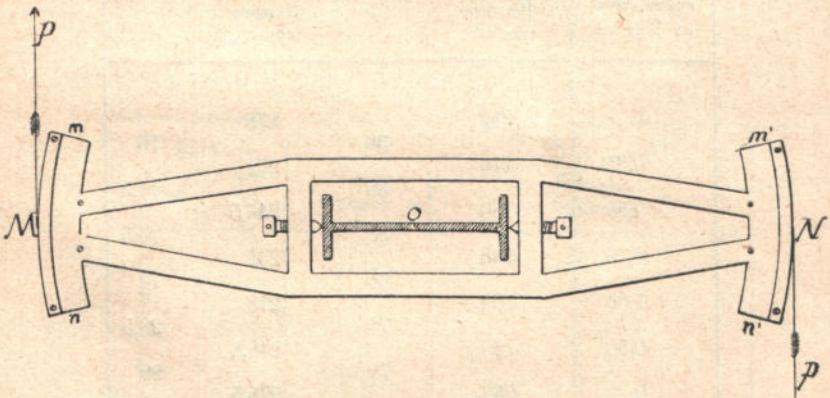
§ 2. Такъ какъ при выбранныхъ нами поперечныхъ сѣченіяхъ балки величина C не велика, опредѣленіе же ея должно быть сдѣлано какъ можно точнѣе, то пришлось отказаться отъ производства опыта на имѣющейся въ лабораторіи института машинѣ, и произвести скручиванье непосредственной нагрузкой.

Для этого балка установлена въ вертикальномъ положеніи. Нижній конецъ ея стальнымъ остріемъ опирается на особую подушку mn, см. черт. (24) (a), и зажатъ двумя винтами A и B такъ, что концевыя поперечныя сѣченія полокъ остаются свободными.

Къ верхнему концу балки прикрѣпленъ рычагъ MN, представленный на черт. 24 (b). Концы рычаговъ mn и $m'n'$, очерченные по дугамъ круга радіуса 25 см., огибаются тонкими нитями, натяженіемъ которыхъ и производится скручиванье балки. Чтобы достигнуть равенства натяженій обѣихъ нитей, концы ихъ перекинуты черезъ блоки и по низу соединены горизонтальнымъ стержнемъ. Нагрузка прилагается не къ каждой нити отдѣльно, а ставится на общую чашку, подвѣшенную къ срединѣ горизонтальнаго стержня. Этимъ пріемомъ достигается и равенство натяженій и одновременность приложенія усилій къ обѣимъ нитямъ. Такимъ образомъ осуществляется скручивающая балку пара силъ. Величина ея опредѣляется по величинѣ поставленнаго на чашку груза и по длинѣ рычага MN. Въ нашемъ случаѣ эта длина равнялась 50 см., и потому грузъ въ 1 klg., поставленный на чашку, давалъ пару равную 0,25 klg. mt.



Черт. 24 a.



Черт. 24 b.

Для установки балки и прикрѣпленія блоковъ мы пользовались рамой машины Amsler'а для изгиба.

Жесткость балки опредѣлялась по углу закручиванья, который измѣрялся зеркальнымъ приборомъ. На опредѣленномъ разстояніи одна отъ другой на балкѣ закрѣплялись зажимными винтами двѣ рамочки съ зеркалами. Устанавливая въ нѣкоторомъ разстояніи отъ зеркалъ горизонтальныя шкалы, и дѣлая по нимъ отсчеты во время скручиванія, можно опредѣлить уголъ закручиванія съ большой точностью. При нашихъ опытахъ разстояніе до шкалы бралось отъ 1,5 mt., до 2 mt. что, при точности отсчетовъ по шкалѣ до $\frac{1}{4}$ дѣленія, давало возможность измѣрять углы закручиванія до $\frac{1}{12000}$ — $\frac{1}{16000}$.

Ниже мы приводимъ результаты испытаній всѣхъ трехъ балокъ на скручиванье и вычисленныя по этимъ даннымъ величины C.

Балка № 1.

Ширина полокъ 40 mm. Разстояніе между зеркалами $l = 50$ см. Разстояніе отъ зеркала до шкалы 1,5 mt.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ. Верхнее зеркало.		Нижнее зеркало.	
0	252		276	
		36		15
0,25	216		261	
		36		14,5
0,50	180		246,5	
		35		14,5
0,75	145		232	
		36		14
1,00	109		218	
		71		28,5
0,50	180		246,5	
		72		29
0	252		275,5	

Вычисленная на основаніи этихъ данныхъ жесткость.

$$c = \frac{M.l}{\Delta\varphi} = 177.10^3 \text{ klg. cm}^2 .$$

Балка № 2.

Ширина полокъ 30 mm. Разстояніе между зеркалами $l = 80$ см. Разстояніе отъ зеркала до шкалы 2 mt.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Верхнее зеркало.		Нижнее зеркало.	
0	65		115	
		62		15
0,25	127		100	
		63		14,5
0,50	190		85,5	
		62,5		14,5
0,25	127,5		100	
		62,5		15
0	65		115	

Вычисленная на основаніи этихъ данныхъ жесткость.

$$C = 168.10^3 \text{ klg. cm}^2.$$

Балка № 3.

Ширина полокъ 20 см. Разстояніе между зеркалами $l = 60$ см.

Разстояніе отъ прибора до шкалы 2 mt.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Верхнее зеркало.		Нижнее зеркало.	
0	29,5		193	
		57,5		17
0,25	87		176	
		57,5		17
0,50	114,5		159	
		57,5		17
0,75	202		142	
		56		16,5
0,50	146		158,5	
		58		16,5
0,25	88		175	
		58		18
0	30		193	

Повторныя испытанія для той же балки, но при меньшей нагрузкѣ, дали.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ. Верхнее зеркало.		Нижнее зеркало.	
0	29,5		193	
		28,5		8,5
0,125	58		184,5	
		29		8,5
0,25	87		176	
		57,5		17
0,50	144,5		159	
		57,5		17
0,25	87		176	
		28,5		8
0,125	58,5		184	
		29		9
0	29,5		193	

Вычисленная на основаніи этихъ данныхъ жесткость балки

$$C = 148.10^3 \text{ klg. cm}^2.$$

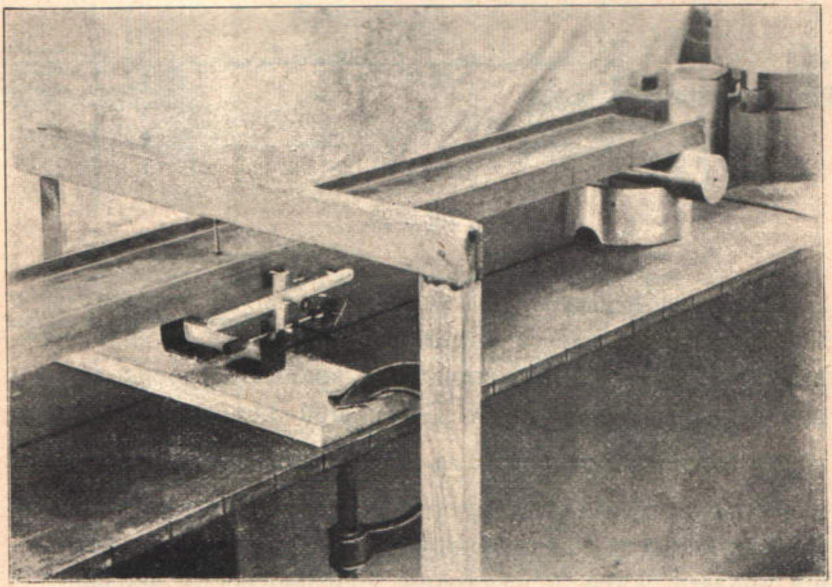
Наибольшія погрѣшности въ приведенныхъ опытахъ получаются благодаря неточности отсчетовъ по шкалѣ. Такъ какъ для вычисленія угла закручиванья приходится сдѣлать четыре отсчета, то погрѣшность можетъ достигать 1%.

Что касается погрѣшностей отъ неточности опредѣленія разстоянія между зеркалами и разстоянія отъ зеркала до плоскости шкалы, то онѣ могутъ быть сдѣланы очень малыми. Треніе въ блокахъ, черезъ которые перекинуты нити, также оказываетъ вліяніе на результаты. Чтобы опредѣлить погрѣшности, происходящія отъ этого тренія, блоки были предварительно испытаны такимъ образомъ: Черезъ блокъ перекидывалась нить, къ концамъ которой прикрѣплялись гири равнаго вѣса, и потомъ опредѣлялась величина той добавочной нагрузки, при которой одна изъ гирь начинаетъ перевѣшивать другую.

При опытахъ съ балкой № 1 треніе не превосходило 0,1% нагрузки на блокъ. Столь малое треніе получалось благодаря тому, что блоки взяты были малаго вѣса (сдѣланы изъ алюминія), діаметры осей сдѣланы были равными 0,75 mm., и концы ихъ опирались на камни изъ часового механизма. При дальнѣйшихъ испытаніяхъ отъ большихъ нагрузокъ камни лопнули, и ихъ пришлось замѣнить подшипниками изъ закаленой стали. Треніе повысилось до 0,3%.

Опредѣленіе жесткости балки при изгибѣ.

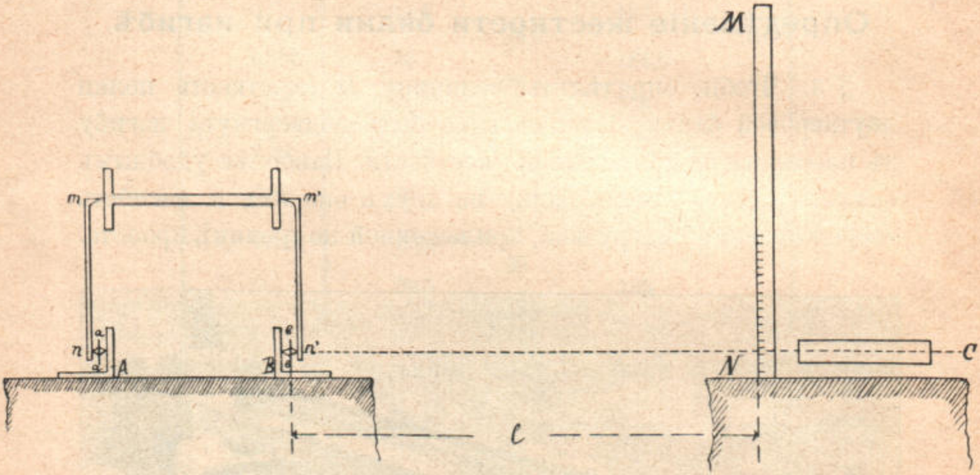
§ 3. Чтобы опредѣлить величину *D* (жесткость полки двутавровой балки) балка должна быть подвергнута изгибу въ плоскости ея наименьшей жесткости. Наиболѣе удобнымъ оказалось расположить балку на двухъ опорахъ и изгибать сосредоточенной нагрузкой, приложенной по срединѣ пролета.



Способъ приложенія нагрузки и устройство опоръ видны на прилагаемой фотографіи. Жесткость при изгибѣ можетъ быть вычислена на основаніи измѣренія стрѣлки прогиба по срединѣ пролета. Чтобы достигнуть бо́льшей точности измѣренія, мы воспользовались зеркальнымъ приборомъ Мертенса, обыкновенно употребляемымъ при измѣреніи растяженій.

Расположеніе прибора видно на приложенной фотографіи и на чертежѣ (25),

Концы m и m' пластинокъ mn и $m'n'$ остріями своими m и m' вдавлены въ полки испытуемой двутавровой балки. Въ точкахъ n и n' пластинки прижаты къ стальнымъ призмамъ, составляющимъ одно цѣлое съ зеркалами aa и bb.



Черт. 25.

При изгибѣ балки пластинки mn и $m'n'$ опускаются и заставляютъ вращаться призмы, опирающіяся на неподвижные уголки A и B. Съ призмами вращаются зеркала, направленныя на шкалу MN. Дѣлая при помощи зрительной трубы отсчеты по шкалѣ съ точностью до $\frac{1}{4}$ дѣленія, мы можемъ опредѣлить стрѣлку прогиба съ точностью до $^1/_3\%-^1/_4\%$.

Погрѣшности, происходящія отъ неточнаго опредѣленія пролета балки и разстоянія отъ плоскости зеркала до шкалы могутъ быть сдѣланы очень малыми.

При нѣкоторыхъ опытахъ зеркальные приборы устанавливались также и на концахъ балки для опредѣленія осадки опоръ. Отсчеты по этимъ зеркаламъ при нашихъ нагрузкахъ были всегда меньше $\frac{1}{4}$ дѣленія, и потому мы ихъ нигдѣ не принимаемъ въ расчетъ.

Приводимъ теперь результаты, полученные при нѣкоторыхъ опытахъ, и вычисленные по этимъ даннымъ жесткости балокъ при изгибѣ.

Балка № 1.

Пролетъ балки $l = 1196$ mm.

Увеличенie зеркальнаго прибора 430.

Вели ина нагрузки въ klg.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Зеркало 1.		Зеркало 2.	
0	215,5		60,0	
		10,5		11
0,5	205,0		71,0	
		11		11
1,0	194,0		82,0	
		10,75		11,75
1,5	183,25		93,75	
		11,25		11,5
2,0	172		105,25	
		22		23
3,0	150		128,25	
		22		23,75
4,0	128		152	

Черезъ пять минутъ приступлено къ разгрузкѣ балки и получены такie отсчеты.

Величина нагрузки въ klg.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Зеркало 1.		Зеркало 2.	
4,0	127,75		152,0	
		21,75		23
3,0	149,5		129,0	
		21,5		23
2,0	171,0		106,0	
		11		11,5
1,5	182,0		94,5	
		11		11,5
1,0	193,0		83,0	
		11,25		11,75
0,5	204,25		71,25	
		10,75		11
0	215		60,25	

Отсчеты по зеркаламъ установленнымъ на опорахъ все время остаются меньше $\frac{1}{4}$ дѣленія и потому мы ихъ вовсе не приводимъ.

Опредѣленная по среднему значенію стрѣлки прогиба величина жесткости балки будетъ

$$B_2 = \frac{P.l^3}{48.f} = 684.10^4 \text{ klg. cm}^2.$$

Балка № 2.

Пролетъ $l = 80$ см. Разстояніе отъ шкалы до плоскости зеркала 1628 mm. При этомъ увеличеніе прибора 500.

Величина нагрузки въ klg.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Зеркало 1.		Зеркало 2.	
0	439,5		294	
		18,25		19
1,0	421,25		313	
		18,25		18,75
2,0	403,0		331,75	
		37		38,5
4,0	366,0		370,25	
		37,5		38,75
6,0	328,5		409	

При разгрузкѣ черезъ пять минутъ получены такіе отсчеты.

Величина нагрузки въ klg.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Зеркало 1.		Зеркало 2.	
6,0	328,25		410	
		36,5		38
4,0	364,75		372	
		36,5		38
2,0	401,25		334	
		19,25		20
1,0	420,5		314	
		18,75		19,75
0	439,25		294,25	

Величина жесткости при изгибѣ, опредѣленная по среднему значенію стрѣлки прогиба, будетъ

$$B_2 = 283.10^4 \text{ klg. cm}^2.$$

Балка № 3.

Пролетъ $l = 80$ см. Разстояніе отъ шкалы до зеркала 1628 mm.

Увеличеніе прибора 500.

Величина нагрузки въ klg.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Зеркало 1.		Зеркало 2.	
0	286		499,5	
		59		57,5
1	345		442	
		61		61
2	406		381	
		60,5		62
3	466,5		319	
		61		62
4	527,5		257	

При разгрузкѣ черезъ пять минутъ получены отсчеты:

Величина нагрузки въ klg.	О Т С Ч Е Т Ы.			
	Зеркало 1.		Зеркало 2.	
4	528		257	
		60,5		62
3	467,5		319	
		59,5		60,5
2	408		379,5	
		60		59,5
1	348		439	
		62		60,5
0	286		499,5	

Вычисленная по среднему значенію стрѣлки прогиба величина жесткости балки будетъ

$$B_2 = 883.10^3 \text{ klg. cm}^2.$$

На основаніи полученныхъ изъ опытовъ величинъ B_2 не трудно опредѣлить и соотвѣтствующія значенія D,—нужно только по геометрическимъ размѣрамъ балки, задавшись модулемъ упругости E, вычислить жесткость стѣнки [1]), вычесть ее изъ соотѣвтствующаго значенія B_2 и разность раздѣлить пополамъ. Опредѣленныя такимъ образомъ величины для нашихъ балокъ имѣютъ слѣдующія значенія:

Балка № 1 $D = 339.10^4$ klg. cm².
Балка № 2 $D = 139.10^4$ klg. cm².
Балка № 3 $D = 439.10^3$ klg. cm².

Скручиванье балки моментомъ, приложеннымъ по срединѣ пролета.

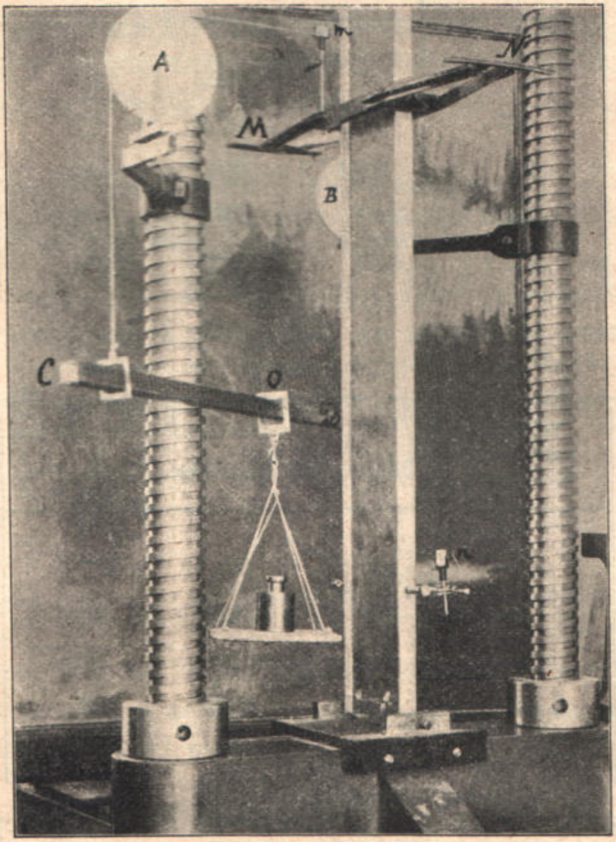
§ 4. Если скручивающій моментъ приложенъ по срединѣ пролета балки и концы балки удерживаются, то въ силу симметріи среднее сѣченіе должно оставаться плоскимъ. Въ такомъ случаѣ къ каждой половинѣ балки можетъ быть приложена формула (1) и по ней вычисленъ уголъ поворота любого сѣченія балки относительно ея средняго сѣченія. Тотъ же уголъ поворота можетъ быть полученъ и опытнымъ путемъ. Сравненіе двухъ результатовъ покажетъ насколько близка къ истинѣ формула (1).

Изъ прилагаемой фотографіи видно, какъ осуществлялось скручиванье. Рычагъ MN съ помощью двухъ винтовъ закрѣпленъ по срединѣ высоты балки. Нити, огибающія концы рычага, перекинуты черезъ блоки A и B и соединены по низу рычагомъ CD. Нагрузка подвѣшена къ точкѣ O— срединѣ рычага CD. Способъ закрѣпленія концовъ балки также совершенно ясенъ. Углы поворота отдѣльныхъ сѣченій измѣрялись зеркальнымъ приборомъ. Одно изъ зеркалъ m прикрѣплено къ рычагу MN и даетъ поворотъ средняго

---

[1]) Эта величина мала по сравненію съ жесткостью полокъ, и даже значительныя погрѣшности при ея опредѣленіи не окажутъ существеннаго вліянія на величину D.

сѣченія. Кромѣ того два зеркала помѣщены въ равныхъ разстояніяхъ отъ средины балки; по нимъ возможно опре-



дѣлять углы поворота, соотвѣтствующіе выбраннымъ сѣченіямъ.

Результаты полученные изъ опыта приводимъ ниже.

Балка № 1.

Зеркала помѣщены въ разстояніи 50 см. отъ средняго сѣченія балки. Разстояніе отъ шкалы до плоскости зеркалъ 150 см.

Длина балки между верхними и нижними зажимными винтами равна 127 см.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	124	252,5	119
1,25	114,5	219,5	110
2,0	108,5	200	104
1,25	114	219	109,5
0	124	252,5	119

Зеркала помѣщены въ разстояніи 40 см. отъ средняго сѣченія.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	144	267	116
1,25	128	234,5	100
2,0	118	214,5	90
1,25	126,5	234,5	100
0	143	267	116

Зеркала помѣщены въ разстояніи 30 см. отъ средняго сѣченія.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	209	267	192
1,25	186,5	234	214,5
2	173	214,5	228
1,25	186	234	214,5
0	208,5	267	192

Для большей наглядности мы приводимъ въ отдѣльной таблицѣ (3) величины угловъ поворота, полученныя изъ опыта и вычисленныя аналитически по формулѣ (1). Въ четвертомъ столбцѣ приведены углы закручиванья, которые получились бы, если-бы мы пренебрегали изгибомъ полокъ и примѣнили обычную формулу крученія.

3)

Разстояніе сѣченія отъ средины балки.	Углы получ. изъ опыта.	Углы вычислены по формулѣ (1).	Углы вычисл. по обыч. форм.
50 см.	0,0125	0,0114	0,0285
40 см.	0,0088	0,0080	0,0228
30 см.	0,0053	0,0049	0,0171

Балка № 2.

Разстояніе отъ плоскости зеркалъ до шкалъ 2 mt.

Длина балки между верхними и нижними зажимными винтами равна 127 см.

Зеркала закрѣплены въ разстояніи 50 см. отъ средняго сѣч. балки.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	115	64,5	202
2	86	164	173,5
0	115	64,5	202

Зеркала закрѣплены въ разстояніи 40 см. отъ средняго сѣченія балки.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	123	27,5	67,5
1,25	92,5	90	36,5
2	74	127	18,5
1,25	92	91	36,0
0	122,5	28	68

Зеркала помѣщены въ разстояніи 30 см. отъ средняго сѣченія балки.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	ОТСЧЕТЫ.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	179,5	28	90
2	112	127,5	22,5
0	179,5	28	90

Результаты опытовъ и вычисленій для балки № 2 приведены въ слѣдующей таблицѣ.

Разстояніе сѣченія отъ средины балки.	Углы получ. изъ опыта.	Углы вычисл. по формулѣ (1).	Углы вычисл. по обычн. форм.
50 см.	0,0177	0,0167	0,0298
40 см.	0,0126	0,0119	0,0238
30 см.	0,0080	0,0075	0,0179

Балка № 3.

Углы закручиванія были измѣрены только для сѣченій отстоящихъ на 50 см. отъ средины балки.

Разстояніе отъ плоскости зеркала до шкалы 2 mt.

Длина балки между верхними и нижними зажимными винтами равна 127.

Величина скруч. мом. въ klg. mt.	О Т С Ч Е Т Ы.		
	Верхн. зерк.	Средн. зерк.	Нижн. зерк.
0	127,5	136,5	248,75
0,25	122,75	154,5	244
0,50	118	172	239
0,75	113	190	234
1,25	103	226	224
0,75	112,5	191	233,5
0,50	117,5	173	238,75
0,25	122,5	155	244
0	127,5	136,5	248,75

Вычисленный на основаніи этихъ наблюденій уголъ закручиванія будетъ

$$\Delta\varphi = \frac{66}{4000} = 0{,}0165.$$

Тотъ же уголъ вычисленный по формулѣ (1) будетъ

$$\Delta'\varphi = 0{,}0152.$$

Сравнивая результаты, полученные для всѣхъ трехъ балокъ, мы видимъ, что наша формула даетъ для величины жесткости значенія нѣсколько преувеличенныя. Разность между данными опытовъ и вычисленными по формулѣ (1) значеніями угловъ закручиванія колеблется въ предѣлахъ отъ 6% до 8%.

Результаты вычисленій по формулѣ (1) еще ближе совпадутъ съ данными опытовъ, если вмѣсто высоты балки h ввести разстояніе между центрами тяжести поперечныхъ сѣченій полокъ. Мы попробовали ввести эту поправку для балки № 2 и тогда получили разность между данными опыта и результатами формулы (1) всего въ 3,5%.

На основаніи этихъ результатовъ можно считать, что основная формула крученія, которой мы пользуемся при опредѣленіи критическихъ значеній нагрузокъ, опытами подтверждается.

Изгибъ балки въ плоскости ея наибольшей жесткости.

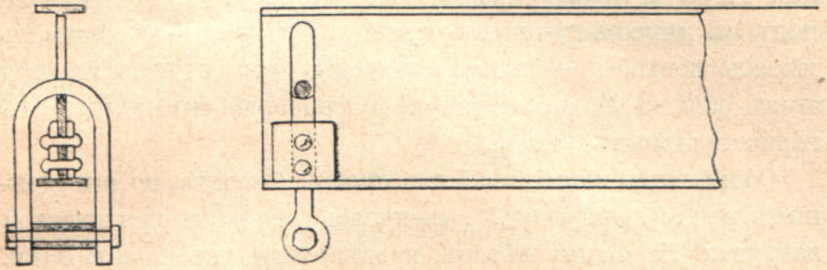
§ 5. Для наблюденія надъ явленіемъ искривленія плоской формы изгиба двутавровой балки выбранъ былъ случай балки задѣланной однимъ концомъ. Такой способъ закрѣпленія наиболѣе просто осуществляется [1])—нужно только зажать конецъ балки между двумя точно пристроганными поверхностями. Этому же случаю соотвѣтствуютъ наименьшія значенія критическихъ изгибающихъ моментовъ, а значитъ и наименьшія напряженія.

Изъ трехъ ранѣе испытанныхъ нами балокъ для дальнѣйшихъ опытовъ служила балка № 3, такъ какъ по расчету только для нея величина критическихъ напряженій оказалась меньше предѣла упругости желѣза.

Для закрѣпленія конца балки мы воспользовались машиной Amsler'a для изгиба балокъ сосредоточенными грузами.

[1]) Въ случаѣ балки на двухъ опорахъ закрѣпленіе концовъ должно быть устроено такимъ образомъ, чтобы сохранилась возможность свободнаго вращенія концевыхъ поперечныхъ сѣченій балки относительно ихъ главныхъ осей инерціи.

Чтобы при изгибѣ избѣжать мѣстныхъ деформацій, зажатый конецъ былъ усиленъ двумя желѣзными накладками плотно пригнаными къ полкамъ и стѣнкѣ двутавровой балки. Для



Черт. 26.

приложенія изгибающей нагрузки на свободномъ концѣ балки было сдѣлано приспособленіе, представленное на черт. 26. Благодаря ему, точка приложенія изгибающей силы довольно точно можетъ быть приведена къ совпаденію съ осью балки.

При вполнѣ точной постановкѣ опыта, при идеально правильной формѣ балки изгибъ долженъ оставаться плоскимъ все время, пока нагрузка не достигла критическаго значенія. За этими предѣлами начинается искривленіе балки, которое, вообще говоря, быстро возрастаетъ съ возрастаніемъ нагрузки. Вліяніе неточности установки и нѣкоторой первоначальной кривизны оси балки сказывается въ томъ, что искривленіе начинается при самыхъ малыхъ нагрузкахъ. Съ возрастаніемъ нагрузки это искривленіе растетъ сначала медленно, потомъ, съ приближеніемъ нагрузки къ ея критическому значенію, возрастаніе кривизны идетъ очень быстро.

Для наблюденія этого явленія мы при предварительныхъ опытахъ пользовались зеркальнымъ приборомъ Баушингера. Расположеніе зеркалъ и способъ ихъ прикрѣпленія видѣнъ изъ приложенной фотографіи. Съ помощью зрительной трубы довольно точно можно опредѣлять горизонтальныя перемѣщенія верхняго и нижняго края концевого поперечнаго сѣченія балки, и по полученнымъ перемѣщеніямъ вычислять прогибъ балки въ горизонтальной плоскости и уголъ закручиванія. При дальнѣйшихъ опытахъ мы отказались отъ этого способа измѣреній, такъ какъ оказалось, что даже незначительное треніе зеркальнаго прибора сказывается на величинѣ появляющихся искривленій. Чтобы избѣжать треній, мы воспользовались микроскопомъ съ микрометреннымъ винтомъ. Онъ даетъ возможность мѣрить прогибы балки съ точностью до 0,01 mm., и при этомъ конецъ балки остается совершенно свободнымъ отъ горизонтальныхъ усилій.

Общій ходъ испытанія былъ таковъ. Сначала, по выведеннымъ ранѣе формуламъ, выяснялась величина критической нагрузки. На чашку вѣсовъ, подвѣшенную къ серьгѣ A (см. фотогр.), устанавливалась нагрузка на 30—40 klg. меньше вычисленной. Дальнѣйшее нагруженіе производилось посте-

пенно и при этомъ дѣлались отсчеты по микроскопу или шкалѣ зеркальнаго прибора черезъ каждые два килограмма. Чтобы избѣжать толчковъ и сотрясеній, нагрузка производилась водой. Для этой цѣли на чашкѣ съ грузами устанавливался резервуаръ, въ который осторожно приливали воду по два килограмма. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, когда вѣсъ воды, помѣщающейся въ резервуарѣ, оказывался недостаточнымъ, пользовались для нагрузки мелкой дробью.

Первые опыты были произведены при пролетѣ балки $l=113$ см., считая отъ плоскости закрѣпленія до точки приложенія изгибающей силы. Величина критической нагрузки вычислена по слѣдующимъ даннымъ

$$\frac{1}{V^2}=\frac{l^2}{h^2}\cdot\frac{2C}{D}=60{,}8.$$

Коэфиціентъ k опредѣляется по формулѣ

$$k\,\frac{4.013}{(1-V)^2}=5{,}28.$$

Значеніе критическаго изгибающаго момента будетъ

$$M_{kp.}=\frac{K\sqrt{B_2C}}{l}=16900\ \text{klg. см.}$$

Слѣдовательно величина критической изгибающей силы будетъ

$$P_{kp.}=\frac{16900}{113}=150\ \text{klg.}$$

При взятыхъ нами размѣрахъ балки, этой нагрузкѣ будутъ соотвѣтствовать напряженія, величина которыхъ въ опасномъ сѣченіи не превосходитъ 1110 klg. на кв. см. Слѣдовательно явленіе искривленія будетъ происходить въ предѣлахъ упругости.

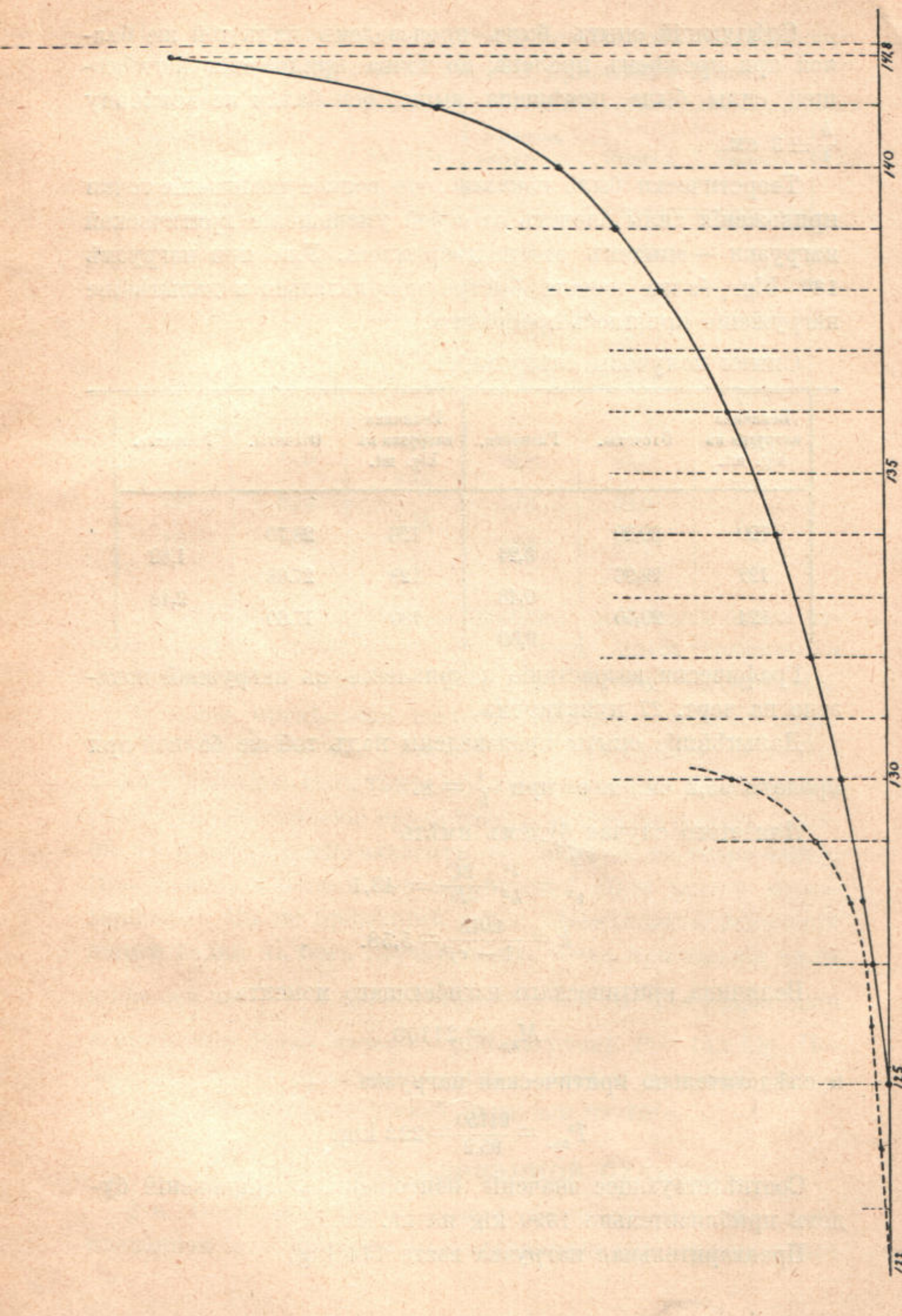
Раньше нежели приступить къ измѣреніямъ на чашку была положена предварительная нагрузка, которая вмѣстѣ съ вѣсомъ самой чашки и резервуара для воды составила 125 klg.

Дальнѣйшее нагруженіе производилось водой, измѣренія искривленій велись микроскопомъ, и полученные отсчеты приведены ниже.

Величина нагрузки въ klg.	Отчеты.	Разности.	
125	22		
		70	
126	21,30		
		1,40	
128	19,90		
		1,70	
130	18,20		
		2,20	
132	16,00		
		2,85	
134	13,15		
		3,85	
136	9,30		
		5,40	
138	3,90		
			приборъ переставленъ.
138	13,86		
		3,56	
139	10,30		
		4,62	
140	5,68		
			приборъ переставленъ.
140	14,35		
		9,09	
141	5,26		
			приборъ переставленъ.
141	18,40		
		22,68	
141,8	— 4		

Дальнѣйшее нагруженіе было прекращено, такъ какъ балка начала быстро искривляться. Результаты опыта представлены для большей наглядности графически на черт. 27 сплошной линіей.

По оси абциссъ отложены, нагрузки, а по оси ординатъ соотвѣтствующія имъ искривленія. Съ приближеніемъ нагрузки къ 142 klg. искривленіе идетъ очень быстро—дальнѣйшее нагруженіе невозможно. Дѣйствительная предѣльная нагрузка оказалась меньше вычисленной, и разность составляетъ около 5%.



Черт. 27.

Слѣдующій опытъ былъ произведенъ надъ той же балкой при прежнемъ пролетѣ; но точка приложенія изгибающей силы была помѣщена выше оси балки на величину $\frac{h}{4} = 3$ см.

Теоретически было показано, что всякое повышеніе точки приложенія силы влечетъ за собой уменьшеніе критической нагрузки — опытомъ это подтвердилось. Уже при нагрузкѣ 130 klg. балка начала быстро искривляться и дальнѣйше нагруженіе пришлось прекратить.

Опыты получены слѣдующіе:

Величина нагрузки въ klg. mt.	Отсчеты.	Разности.	Величина нагрузки въ klg. mt.	Отсчеты.	Разности.
120	30,20		126	28,70	
		0,24			1,62
122	29,96		128	27,08	
		0,46			9,48
124	29,50		130	17,60	
		0,80			

Графически возрастаніе искривленія съ нагрузкой показано на черт. 27 пунктиромъ.

Дальнѣйшіе опыты произведены надъ той же балкой при пролетѣ 95,2 см., т. е. при $\frac{l}{h} = 8$.

Для этого случая будемъ имѣть

$$\frac{1}{v^2} = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2C}{D} = 43,1$$

$$k = \frac{4{,}013}{(1-v)^2} = 5,58.$$

Величина критическаго изгибающаго момента

$$M_{kp.} = 21150,$$

и слѣдовательно критическая нагрузка

$$P_{kp.} = \frac{21150}{95,2} = 222 \text{ klg}.$$

Соотвѣтствующее значеніе наибольшихъ напряженій будетъ приблизительно 1390 klg на кв. см.

Предварительная нагрузка взята 174 klg,

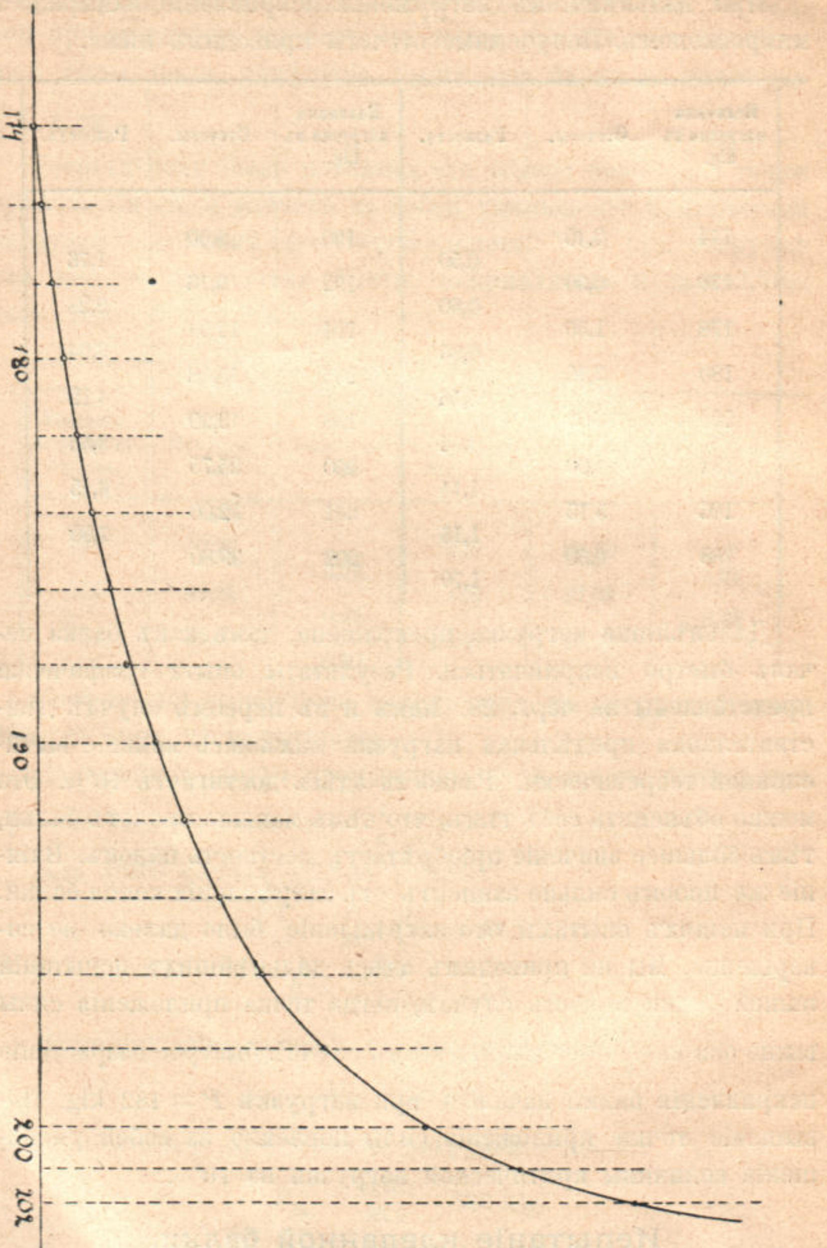
При дальнѣйшемъ нагруженіи искривленіе измѣрялось микроскопомъ. Полученные отсчеты приводимъ ниже.

Величина нагрузки въ klg.	Отсчеты.	Разности.	Величина нагрузки въ klg.	Отсчеты.	Разности.
174	0,40		190	8,00	
		0,50			1,76
176	0,90		192	9,76	
		0,60			2,28
178	1,50		194	12,04	
		0,80			3,04
180	2,30		196	15,08	
		0,76			4,12
182	3,06		198	19,20	
		0,94			6,55
184	4,00		200	25,75	
		1,15			6,25
186	5,15		201	32,00	
		1,15			7,80
188	6,30		202	39,80	
		1,70			

Дальнѣйшая нагрузка прекращена, такъ какъ балка начала быстро искривляться. Результаты опыта графически представлены на черт. 28. Какъ и въ первомъ случаѣ дѣйствительная предѣльная нагрузка оказалась меньше вычисленной теоретически. Разность здѣсь достигаетъ 10°/o. Это можно объяснить себѣ тѣмъ, что чѣмъ меньше пролетъ балки, тѣмъ бо̀льшее значеніе пріобрѣтаетъ жесткость полокъ. Вліяніе же полокъ сильно зависитъ отъ закрѣпленія конца балки. При нашихъ опытахъ это закрѣпленіе было далеко не совершенно. Мы не приводимъ здѣсь дальнѣйшихъ испытаній нашей балки въ томъ случаѣ, когда точка приложенія силы выше оси на $\frac{h}{4} = 3$ см. Въ этомъ случаѣ быстрое возрастаніе искривленія балки началось при нагрузкѣ $P = 182$ klg. Повышеніе точки приложенія силы повлекло за собой уменьшеніе величины критической нагрузки на 10°/o.

Испытаніе клепанной балки.

§ 6. Послѣдній рядъ опытовъ былъ произведенъ надъ клепанной балкой. Балка была составлена изъ вертикальнаго



Черт. 28.

листа 180 × 3,7 mm. и четырехъ уголковъ 20 × 20 × 3,7 mm. Заклепки діаметромъ 6 mm. были разставлены въ разстояніи 25 mm. центръ отъ центра. Общая длина балки взята 2 mt. При такой длинѣ скручиванье удобнѣе было производить, расположивши балку горизонтально. Одинъ конецъ балки зажимался, какъ и раньше, двумя винтами въ особой подушкѣ, а къ другому, перпендикулярно оси балки, прикрѣплялся горизонтальный рычагъ, служившій для приложенія скручивающей пары. Скручиванье производилось непосредственной нагрузкой. Ранѣе описаннымъ приспособленіемъ достигалась одновременность и равномѣрность передачи нагрузки на двѣ нити, прикрѣпленныя къ концамъ вышеупомянутаго рычага. Длина рычага взята 1 mt, и потому нагрузка въ 1 klg. даетъ скручивающую пару равную 0,5 klg. mt.

Уголъ закручиванья измѣрялся зеркальнымъ приборомъ. Для этого въ двухъ поперечныхъ сѣченіяхъ балки, отстоящихъ на разстояніи 80 см. одно отъ другого, были закрѣплены зеркала. Углы поворота выбранныхъ сѣченій опредѣлялись на основаніи отсчетовъ по вертикально поставленнымъ шкаламъ. Разстояніе отъ шкалъ до плоскости зеркалъ взято было равнымъ 150 см.

Величины скручивающихъ моментовъ въ klg. mt. и соотвѣтствующіе имъ отсчеты приводимъ ниже.

Скручивающіе моменты.	ОТСЧЕТЫ.			
	Зеркало 1-е.		Зеркало 2-е.	
0	215,5		341	
		26,25		61,25
0,5	241,75		402,25	
		26,25		62,75
1,0	268		465	
		26,5		63
1,5	294,5		528	
		25,75		61,5
1,0	268,75		466,5	
		26,75		63,5
0,5	242		403	
		26,5		62
0	215,5		341	

Вычисленная по этимъ даннымъ жесткость балки

$$C=\frac{Ml}{\triangle\varphi}=333 \,.\, 10^{3} \text{ klg. см.}^{2}.$$

Замѣтимъ, что жесткость получилась несравненно меньше той, которую можно было бы ожидать на основанiи вычисленiй по приближенной формулѣ, приведенной въ § 3.

Для опредѣленiя величины D мы подвергли балку изгибу въ плоскости перпендикулярной къ плоскости стѣнки. Устройство опоръ и расположенiе приборовъ не отличалось ничѣмъ отъ ранѣе описанной установки, и потому ограничимся приведенiемъ результатовъ.

Пролетъ балки взятъ равнымъ 160 см.

Шкалы были установлены въ такомъ разстоянiи, что увеличенiе зеркальнаго прибора равно 500.

Зеркала 1-е и 2-е установлены по срединѣ пролета 3-е и 4-е у опоръ. Величины нагрузокъ въ klg, и полученные по шкаламъ отсчеты были слѣдующiе.

Величина нагрузки.	О Т С Ч Е Т Ы.					
	Зеркало 1.		Зеркало 2.		Зеркало 3.	Зеркало 4.
0	374.25		320,5		187	240
		36.75		37,5		
1	337,5		358		187	240
		36,75		38		
2	300,75		396		187	240
		37.25		37,5		
3	263.5		433.5		187	240
		75		75,5		
5	188,5		509		187,25	240,25
		76		77		
7	112,5		586		187.25	240.25
		75,5		76		
5	188		510		187.25	240.25
		75		75		
3	263		435		187	240
		37.25		38		
2	300,25		397		187	240
		37.25		38		
1	337.5		359		187	240
		36.75		38,5		
0	374.25		320.5		187	240

Вычисленная по этимъ даннымъ жесткость балки при изгибѣ

$$B_2 = 1140 \cdot 10^4 \text{ klg. см.}^2.$$

Вычитая изъ B_2 жесткость стѣнки балки и дѣля разность пополамъ, получимъ величину

$$D = 565 \cdot 16^4 \text{ klg. см.}^2.$$

Опредѣливъ опытнымъ путемъ величины C и D, мы приступили къ изгибу балки въ плоскости ея наибольшей жесткости. Закрѣпленіе конца и способъ приложенія нагрузки остались прежніе. Пролетъ балки, считая отъ плоскости задѣлки до точки приложенія нагрузки, былъ взятъ равнымъ 180 см. Слѣдовательно

$$\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$$

Для вычисленія величины критической нагрузки имѣемъ

$$\frac{1}{v^2} = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2C}{D} = 11,8.$$

Соотвѣтствующее значеніе коэфиціента

$$k = 7,2,$$

И слѣдовательно величина критической нагрузки будетъ

$$P_{kp.} = \frac{K \cdot \sqrt{B_2 C}}{l^2} = 433 \text{ klg.}$$

Этому соотвѣтствуютъ наибольшія напряженія въ опасномъ сѣченіи

$$R_{kp.} = \infty\, 1300 \text{ klg кв. см.}$$

Слѣдовательно явленіе искривленія плоской формы изгиба балки будетъ происходить въ предѣлахъ упругости. На балку была положена первоначальная нагрузка 388 klg. и при этомъ замѣтнаго искривленія не произошло. Дальнѣйшая нагрузка производилась постепенно и сопровождалась измѣреніемъ угла закручиванія концевого поперечнаго сѣченія балки.

Ниже мы приводимъ величины нагрузки въ klg. и соотвѣтствующія отсчеты, полученные съ помощью зеркальнаго прибора. Чтобы получить уголъ закручиванія, нужно величину разности отсчетовъ дѣлить на 200.

Нагрузка.	Отсчеты.	Разности.
388	200	
		14
398	186	
		28
405	158	
		53
410	105	
412	Балка сразу сильно искривилась.	

Вторичный опытъ далъ такіе результаты

Нагрузка.	Отсчеты.	Разности.
388	228,5	
		6,5
398	235,0	
		1,9
405	254,0	
410	Балка сразу сильно искривилась.	

Въ первомъ опытѣ при 412 klg., во второмъ при 410 klg. начинается такое сильное искривленіе балки, что дальнѣйшая нагрузка становится невозможной. Полученная опытнымъ путемъ предѣльная нагрузка и въ этомъ случаѣ меньше вычисленной. Разность составляетъ приблизительно 5%.