УДК 511

Оразов Мамет, к.ф-м.н., докторант (Туркменский сельскохозяйственный университет имени С. А. Ниязова, г. Ашхабад)

УСЛОВИЯ НУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТИ МНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ В ВИДЕ $p+a^m$

Розглянуті адаптивні завдання для чисел арифметичної прогресії, що представляються у вигляді суми двох заданих послідовностей.
Ключові слова: арифметичні прогресії, достатні умови, нульова щільність.

Рассмотрены адаптивные задачи для чисел арифметической прогрессии, представляемых в виде суммы двух заданных последовательностей.
Ключевые слова: арифметические прогрессии, достаточные условия, нулевая плотность.

The adaptive problem for arithmetic progressions of numbers represented as a sum of two sequences are considered.
Keywords: arithmetic progression, sufficient conditions for zerodensity.

В этой работе исследуется вопрос о существовании классов вычетов по $mod\, k$, в которых плотность чисел вида $p+a^m$ нулевая.

Начнем со случая, когда a – первообразный корень по $mod\, k$. В этом случае числа вида a^m содержаться в каждом примитивном классе вычетов по $mod\, k$, так что

$$c_1(k,l,a)=\sum_{\substack{x=1\\(x,k)=1\\(x-l,k)=1}}^{k} 1=\sum_{\substack{x=1\\(x(x-l),k)=1}}^{k} 1=\sum_{x=1}^{k}\sum_{d/(x(x-l),k)}\mu(d)=$$

$$=\sum_{d/k}\mu(d)\sum_{\substack{x=1\\x(x-l)\equiv o(d)}}^{k} 1=\sum_{d/k}\mu(d)\,\frac{k}{d}\sum_{\substack{x=1\\x(x-l)\equiv o(d)}}^{d} 1.$$

Введем обозначение $\omega(d) = \sum\limits_{\substack{x=1 \\ x(x-l)\equiv o(d)}}^{d} 1$ (число решений сравнения $x(x-l) \equiv o(\mathrm{mod}\, d)$). Как известно, функция $\omega(d)$ мультипликативна при $d = p$ (p – простое число) имеем:

$$\omega(p) = \begin{cases} 2, & если \quad p \nmid l, \\ 1, & если \quad p / l \end{cases}$$

Поэтому

$$c_1(k,l,a) = k \prod_{p/k}\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right) = k \prod_{p/(k,l)}\left(1-\frac{1}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{p/k \\ p\nmid l}}\left(1-\frac{2}{p}\right) =$$

$$= k\frac{\varphi((k,l))}{(k,l)} \prod_{\substack{p/k \\ p\nmid l}}\left(1-\frac{2}{p}\right).$$

Отсюда видно, что если k четно (поскольку мы предполагаем существование первообразного корня по модулю k, это означает, что $k = 2q^{\alpha}$, где q – нечетное простое число, $\alpha \geq 1$ – целое), а l – нечетно, то $c_1(k,l,a) = 0.$ Таким образом справедлива теорема 1.

Теорема 1. Если $k = 2q^{\alpha}$, где q – нечетное простое число, $\alpha \geq 1$ – целое, то во всех классах вычетов, порожденных нечетными числами, множество чисел вида $p + a^m$, где a – первообразный корень по $\mathrm{mod}\, k$ имеет нулевую асимптотическую плотность; во всех остальных классах вычетов по $\mathrm{mod}\, k$ плотность чисел вида $p + a^m$ положительна.

Рассмотрим теперь более общий случай.

Пусть g – некоторый первообразный корень по $\mathrm{mod}\, k$, $(a,k) = 1$ и s – индекс числа a по $\mathrm{mod}\, k$, соответствующий первообразному корню g, то есть $a \equiv g^s (\mathrm{mod}\, k).$ Тогда

$$\delta_a(k)=\frac{\varphi(k)}{(s,\varphi(k))}.$$

$$c_1(k,l,a)=\sum_{\substack{m=1\\(g^{ms}-l,k)=1}}^{\delta_a(k)}1=\frac{1}{(s,\varphi(k))}\sum_{\substack{m=1\\(g^{ms}-l,k)=1}}^{\varphi(k)}1=\frac{1}{(s,\varphi(k))}\sum_{\substack{x=1\\(x(x^s-l),k)=1}}^{k}1.$$

Снова пользуясь известным свойством функции Мебиуса получаем:

$$c_1(k,l,a)=$$

$$=\frac{1}{(s,\varphi(k))}\sum_{d/k}\mu(d)\sum_{\substack{x=1\\x(x^s-1)\equiv o(d)}}^{k}1=\frac{k}{(s,\varphi(k))}\prod_{p/k}\left(1-\frac{\omega_s(p)}{p}\right),$$

где $\omega_s(p)$ – число решений сравнения $x(x^s-l)\equiv o(p)$. Если p/l, то очевидно $\omega_s(p)=1$. Пусть теперь $p\not/\,l$ и $t=ind\ l$ по модулю p. Тогда, если $(s,p-1)/t$, то сравнение $x^s\equiv l(mod\ p)$ имеет $(s,p-1)$ решений; в противном случае оно не имеет решений. Таким образом

$$\omega_S(p)=\begin{cases}1, & \text{если } p/1 \text{ или } p\not/\,1,\ (s,p-1)\not/\,t\\ 1+(s,p-1), & \text{если } p\not/\,1,\ (s,p-1)/t\end{cases}$$

и

$$c_1(k,l,a)=$$

$$=\frac{k}{(s,\varphi(k))}\prod_{p/(k,l)}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p/k\\p\not/\,l\\(s,p-1)\not/\,t}}\left(1-\frac{1}{p}\right)\prod_{\substack{p/k\\p/l\\(s,p-1)/t}}\left(1-\frac{1+(s,p-1)}{p}\right).$$

Рассмотрим отдельно два случая.

1. $k=q^{\alpha}$, где q – нечетное простое число.

Если $q\not/\,l,\quad (s,q-1)\not/\,l$ то из предыдущей формулы вытекает

$$c_1(k,l,a)=\frac{q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\left(1-\frac{1}{q}\right)=\frac{q^{\alpha}-q^{\alpha-1}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}.$$

Если $q\not/\,l,\quad (s,q\text{-}1)/l$, то

$$c_1(k,l,a)=\frac{q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\cdot\left(1-\frac{1+(s,q-1)}{q}\right).$$

Если же, q / l, то

$$c_1(k,l,a)=\frac{q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

2. $k=2q^{\alpha}$, где q – нечетное простое число.

Тогда при нечетном l имеем: если $q \not| l$, $(s,q-1) \not| t$ или q / l, то

$$c_1(k,l,a)=\frac{2q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\left(1-\frac{1}{q}\right),$$

Если же $q \not| l$, а $(s,q\text{-}1)/t$, то

$$c_1(k,l,a)=\frac{2q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\cdot\left(1-\frac{1+(s,q-1)}{q}\right).$$

При четном l, если q / l, $(s,q-1) \not| l$ или

$$c_1(k,l,a)=\frac{q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\cdot\left(1-\frac{1}{q}\right).$$

если $q \not| l, (s,q\text{-}1)/t$, то

$$c_1(k,l,a)=\frac{q^{\alpha}}{(s,q^{\alpha}-q^{\alpha-1})}\cdot\left(1-\frac{(s,q-1)}{q}\right).$$

Отметим, что для любого целого $a>2$ существует прогрессия, в которой плотность множества чисел вида $p+a^m$ нулевая. Действительно, полагая $k=a-1,\ l=1$, получаем сравнение $p+a^m \equiv 1(mod(a-1))$. Так как для любого натурального m имеем $a^m \equiv 1(mod(a-1))$, то из этих сравнений следует $p \equiv o(mod(a-1))$, что в виду простоты p возможно лишь при $p=a-1$. Таким образом, плотность чисел вида $p+a^m$ в прогрессии $1+(a-1)l,\ (l \in Z)$ нулевая. Так как с другой стороны плотность самой этой прогрессии есть $\frac{1}{a-1}$, то отсюда следует

Теорема 2. При $a > 2$ плотность множества натуральных чисел, представимых в форме $p + a^m$ не превосходит $1 - \frac{1}{a-1} = \frac{a-2}{a-1}$. Поскольку из тривиальных соображений следует, что указанная плотность не превосходить $\frac{1}{ln\,a}$, этот результат представляет интерес в случаях, когда $ln\,a < \frac{a-1}{a-2}$, т.е. при $a = 3,\ 4$.

Из приведенной выше формулы для $c_1(k,l,a)$ следует, что если g – первообразный корень по модулю k, $a \equiv g^s (mod\,k)$, где $s \equiv o(mod(p-1)),\ l \equiv 1(mod\ p),\ \ k = p^{\alpha}$, то $c_1(k,l,a) = 0.$ Отсюда следует

Теорема 3. Пусть q – нечетное простое число, $l \equiv 1(q),\ \ s \equiv 0(q\text{-}1),$ где s – индекс числа $a \geq 2$ по модулю $q^{\alpha},\ \ \alpha \geq 1$ – целое число. Тогда асимптотическая плотность множества чисел вида $p + a^m$, сравнимых с l по модулю q^{α}, равна нулю.

Рассмотрим пример. Пусть $q = 3,\ \alpha = 2;$ так как число 2 есть первообразный корень по модулю $3^2 = 9$, возьмем $s = 2,\ \ a = 2^s = 2^2 = 4,$ $l = 7 \equiv 1(mod\,3).$ Из теоремы 3 вытекает, что множество натуральных чисел вида $9l + 7,\ \ l \in Z$, представимых в форме $p + 4^m$, где p – простое, а m – натуральное число, имеет нулевую асимптотическую плотность.

1. Romanow N. P. Über einige satze der additiven Zahlentheorie // Math. Ann. – 1934. – № 109. – S. 669-678. **2.** Шнирельман Л. Г. Об аддитивных свойствах чисел // Изв. Донского политехнического института. – Ч. 1. – 1930. – С. 3-28. **3.** Файнлейб А. С. Некоторые асимптотические формулы для мультипликативных функций и их приложения // Литовский матем. сб. – 1967. – № 3. – С. 535-545. **4.** Selber S. A generalization of a teorem of Romanoff, Kong. Norske vid, Selsc For handl, 35 (1962). – P. 91-95.

Рецензет: д.т.н., професор Древецький В. В. (НУВГП)