

УДК 628.315.3+517.95

Сівак В. М., к.т.н., доцент, Шепетько Ю. О., аспірантка (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне),
Климюк Ю. Є., к.т.н., викладач (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ МАСОПЕРЕНОСУ ЗАБРУДНЮЮЧИХ РЕЧОВИН У ДВОШАРОВИХ ІЗОТРОПНИХ НАСИЧЕНИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ

У роботі запропонована математична модель для прогнозування процесу поширення забруднюючих речовин у двошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищах – модельних областях, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, що характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі. Проведено числовий експеримент.

Ключові слова: математична модель, коефіцієнт фільтрації, пористе середовище, забруднюючі речовини, числовий експеримент.

В работе предложена математическая модель для прогнозирования процесса распространения загрязняющих веществ в двухслойных кусочно-однородных изотропных насыщенных пористых средах – модельных областях, которые имеют форму криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения и разделенных некоторой эквипотенциальной поверхностью на две подобласти, характеризующиеся различными коэффициентами фильтрации, пористости и диффузии. Получен алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи. Проведено численный эксперимент.

Ключевые слова: математическая модель, коэффициент фильтрации, пористая среда, загрязняющие вещества, численный эксперимент.

A mathematical model proposed in this paper to predict the process of distribution of pollutants in two-layer piecewise-homogeneous isotropic saturated porous media – model regions that are curved form parallelepipeds bounded by two equipotential surfaces and four surface flow and divided by some equipotential surface into two subregions, which are characterized by different coefficients of filtration, porosity and diffusion. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem is developed. Numerical experiment is made.

Keywords: mathematical model, the coefficient of filtration, porous media, pollutants, numerical experiment.

Вступ. При дослідженні просторових процесів поширення забруднюючих речовин у пористих середовищах виникає чимало труднощів, пов'язаних із повздовжніми і поперечними викривленостями області, в якій шукається розв'язок, та складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних модельних задач. У зв'язку із цим для випадків областей, обмежених еквіпотенціальними поверхнями і поверхнями течії, у рівняннях конвективної дифузії, граничних та початкових умовах доцільно перейти до нових незалежних змінних – координат області комплексного потенціалу, завдяки чому суттєво спрощується запис задачі та її розв'язання [1-3].

У цій роботі нами відповідну методику перенесено на випадок двошарових кусково-однорідних ізотропних насичених пористих середовищ – модельних областей, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії та розділених деякою еквіпотенціальною поверхнею на дві підобласті, які характеризуються різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії.

Загальна постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0, \infty)$ ($z = (x, y, z)$), $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв'язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z: f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \{z: f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z: f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z: f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z: f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z: f_6(x, y, z) = 0\}$ та розділений еквіпотенціальною поверхнею $EFF_*E_* = \{z: f_*(x, y, z) = 0\}$ на дві підобласті $G_{z-} = ABFEA_*B_*F_*E_*$ і $G_{z+} = EFCDE_*F_*C_*D_*$ (рис. 1, а), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу поширення забруднюючої речовини із врахуванням нерівномірного і змінного в часі розподілу величини її концентрації на ділянці входу ABB_*A_* фільтраційної течії як відсутності, так і наявності інтенсивного відводу рідини на виході CDD_*C_* , додаткових джерел на водонепроникних ділянках ADD_*A_* , BCC_*B_* , $ABCD$ і $A_*B_*C_*D_*$ фільтраційної області, що описується рівняннями:

$$\vec{v} = \kappa \cdot \text{grad } \phi, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\text{div} (D \cdot \text{grad } C) - \vec{v} \cdot \text{grad } C = \sigma \cdot C_t' \quad (2)$$

за наступних крайових умов:

$$\phi \Big|_{ABB_*A_*} = \phi_*, \quad \phi \Big|_{CDD_*C_*} = \phi^*, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \quad (3)$$

$$C(x, y, z, t) \Big|_{ABB_*A_*} = c_*(M, t), \quad (4)$$

$$C(x, y, z, t) \Big|_{CDD_*C_*} = c^*(M, t) \quad (5)$$

або

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{CDD, C_s} = 0, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} C(x, y, z, t) \Big|_{ADD, A_s} &= c_{**}(M, t), \quad C(x, y, z, t) \Big|_{BCC, B_s} = c^{**}(M, t), \\ C(x, y, z, t) \Big|_{ABCD} &= c_{***}(M, t), \quad C(x, y, z, t) \Big|_{A_s B_s C_s D_s} = c^{***}(M, t) \end{aligned} \quad (7)$$

або

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial \bar{n}} \Big|_{ADD, A_s \cup BCC, B_s \cup ABCD \cup A_s B_s C_s D_s} = 0, \quad (8)$$

початкової умови

$$C(x, y, z, 0) = c_0^0(x, y, z) \quad (9)$$

і умов узгодженості на еквіпотенціальній поверхні EFF_*E_* :

$$\Phi \Big|_{EFF, E_{s-}} = \Phi \Big|_{EFF, E_{s+}} = \Phi^*, \quad \kappa_1 \cdot \Phi'_{\bar{n}} \Big|_{EFF, E_{s-}} = \kappa_2 \cdot \Phi'_{\bar{n}} \Big|_{EFF, E_{s+}}, \quad (10)$$

$$C \Big|_{EFF, E_{s-}} = C \Big|_{EFF, E_{s+}}, \quad D_* \cdot C'_{\bar{n}} + v_n \cdot C \Big|_{EFF, E_{s-}} = D^* \cdot C'_{\bar{n}} + v_n \cdot C \Big|_{EFF, E_{s+}}, \quad (11)$$

де Φ – фільтраційний потенціал ($0 < \Phi_* \leq \Phi \leq \Phi^* < \infty$), κ – коефіцієнт фільт-

рації, $\kappa = \begin{cases} \kappa_1, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ \kappa_2, & (x, y, z) \in G_{z+}, \end{cases}$ κ_j – довільні дійсні додатні числа ($j=1,2$),

$\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ – вектор швидкості ($|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2(x, y, z) + v_y^2(x, y, z) + v_z^2(x, y, z)} > v_* \gg 0$), \bar{n} – зовнішня нормаль до відповідної поверхні; $C = C(x, y, z, t)$ – концентрація забруднюючої речовини у фільтраційній течії в точці (x, y, z) у

момент часу t , $D = \begin{cases} D_1, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ D_2, & (x, y, z) \in G_{z+} \end{cases}$ – коефіцієнт дифузії, $D_j = \varepsilon \cdot d_j$

($j=1,2$), d_j – довільні дійсні додатні числа ($j=1,2$), ε – малий параметр

($\varepsilon > 0$), $\sigma = \begin{cases} \sigma_1, & (x, y, z) \in G_{z-}, \\ \sigma_2, & (x, y, z) \in G_{z+} \end{cases}$ – коефіцієнт пористості, $0 < \sigma_1, \sigma_2 \leq 1$,

$c_*(M, t)$, $c^*(M, t)$, $c_{**}(M, t)$, $c^{**}(M, t)$, $c_{***}(M, t)$, $c^{***}(M, t)$,

$c_0^0(x, y, z)$ – достатньо гладкі функції, узгоджені між собою вздовж ребер області G [1, 9], M – довільна точка відповідної поверхні, v_n – нормальна складова швидкості на поверхні розділу EFF_*E_* .

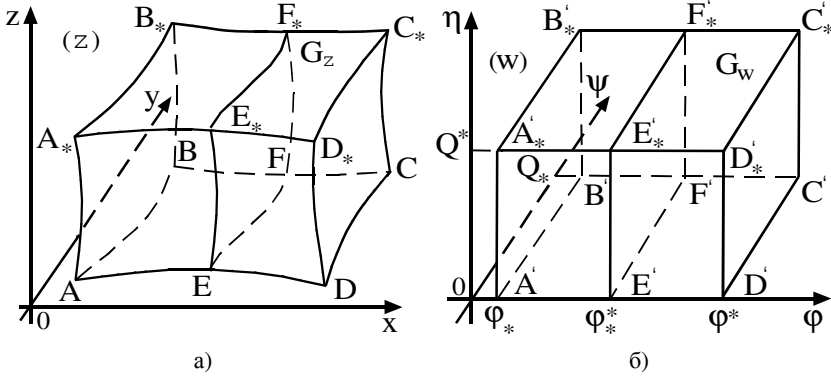


Рис. 1. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x, y, z)$, $\eta = \eta(x, y, z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\phi(x, y, z)$) таких, що $\kappa \cdot \text{grad } \phi = \text{grad } \psi \times \text{grad } \eta$ [10] і заміною останніх чотирьох з граничних умов (3) на умови: $\psi|_{ADD, A_s} = 0$, $\psi|_{BCC, B_s} = Q_*$, $\eta|_{ABCD} = 0$, $\eta|_{A, D, C, B_s} = Q^*$, задача (1), (3), (10) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{w = (\phi, \psi, \eta) : \phi_* < \phi < \phi^*, 0 < \psi < Q_*, 0 < \eta < Q^*\}$ (рис. 1, б), де Q_* , Q^* – невідомі параметри, $Q_* \cdot Q^* = Q = \int_{EFF, E_s} \frac{\partial \phi}{\partial s} ds$ – кількість рідини, що проходить через деяку еквіпотенціальну поверхню EFF_*E_s області G_z (повна фільтраційна витрата). Припустимо, що ця задача є розв’язаною [7], зокрема, знайдено поле швидкостей \vec{v} і параметри Q_* , Q^* , Q , ϕ_* . Здійснивши заміну змінних $x = x(\phi, \psi, \eta)$, $y = y(\phi, \psi, \eta)$, $z = z(\phi, \psi, \eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4) – (9), (11) отримаємо відповідну “дифузійну задачу” для області $G_w \times (0, \infty)$:

$$D \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2} \cdot c''_{\phi\phi} + b_{1,1} \cdot c''_{\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_\psi + b_{2,2} \cdot c'_\eta \right) - \frac{\tilde{v}^2}{\kappa} \cdot c'_\phi = \sigma \cdot c'_i, \quad (12)$$

$$c(\phi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t), \quad (13)$$

$$c(\phi^*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}^*(\psi, \eta, t) \quad (14)$$

або

$$c'_\varphi(\varphi^*, \psi, \eta, t) = 0, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} c(\varphi, 0, \eta, t) &= \tilde{c}_{**}(\varphi, \eta, t), \quad c(\varphi, Q_*, \eta, t) = \tilde{c}^{**}(\varphi, \eta, t), \\ c(\varphi, \psi, 0, t) &= \tilde{c}_{***}(\varphi, \psi, t), \quad c(\varphi, \psi, Q^*, t) = \tilde{c}^{***}(\varphi, \psi, t) \end{aligned} \quad (16)$$

або

$$c'_\psi(\varphi, 0, \eta, t) = c'_\psi(\varphi, Q_*, \eta, t) = c'_\eta(\varphi, \psi, 0, t) = c'_\eta(\varphi, \psi, Q^*, t) = 0, \quad (17)$$

$$c(\varphi, \psi, \eta, 0) = c_0^0(\varphi, \psi, \eta), \quad (18)$$

$$c(\varphi_{*+}, \psi, \eta, t) = c(\varphi_{*+}^*, \psi, \eta, t),$$

$$\begin{aligned} D_1 \cdot c'_\varphi(\varphi_{*+}^*, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot c(\varphi_{*+}^*, \psi, \eta, t) = \\ = D_2 \cdot c'_\varphi(\varphi_{*+}^*, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot c(\varphi_{*+}^*, \psi, \eta, t), \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$c = c(\varphi, \psi, \eta, t) = C(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_*(\psi, \eta, t) = c_*(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta), t),$$

$$\tilde{c}^*(\psi, \eta, t) = c^*(x(\varphi^*, \psi, \eta), y(\varphi^*, \psi, \eta), z(\varphi^*, \psi, \eta), t)$$

$$\tilde{c}_{**}(\varphi, \eta, t) = c_{**}(x(\varphi, 0, \eta), y(\varphi, 0, \eta), z(\varphi, 0, \eta), t),$$

$$\tilde{c}^{**}(\varphi, \eta, t) = c^{**}(x(\varphi, Q_*, \eta), y(\varphi, Q_*, \eta), z(\varphi, Q_*, \eta), t),$$

$$\tilde{c}_{***}(\varphi, \psi, t) = c_{***}(x(\varphi, \psi, 0), y(\varphi, \psi, 0), z(\varphi, \psi, 0), t),$$

$$\tilde{c}^{***}(\varphi, \psi, t) = c^{***}(x(\varphi, \psi, Q^*), y(\varphi, \psi, Q^*), z(\varphi, \psi, Q^*), t),$$

$$\tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta) = c_0^0(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$\tilde{v} = \tilde{v}(\varphi, \psi, \eta) = v(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)),$$

$$b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi, \psi, \eta) = \psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2, \quad b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi, \psi, \eta) = \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2,$$

$$b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi, \psi, \eta) = \psi''_{xx} + \psi''_{yy} + \psi''_{zz}, \quad b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi, \psi, \eta) = \eta''_{xx} + \eta''_{yy} + \eta''_{zz} \quad [2].$$

Алгоритм розв'язання задачі. Асимптотичне наближення розв'язку

$$c(\varphi, \psi, \eta, t) = \begin{cases} c_1(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_* < \varphi < \varphi_*^*, \\ c_2(\varphi, \psi, \eta, t), & \varphi_*^* < \varphi < \varphi^* \end{cases} \quad \text{задачі (12) – (19) з точністю } O(\varepsilon^{n+1})$$

шукатимемо у вигляді таких рядів [4]:

$$\begin{aligned} c_1 = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{1,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot p_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{P}_{1,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{H}_{1,i} + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \hat{H}_{1,i} + R_{1,n+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^n \varepsilon^i \cdot c_{2,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot p_{2,i} + \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \cdot P_{2,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{P}_{2,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{P}_{2,i} + \\ + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \tilde{H}_{2,i} + \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{i/2} \cdot \hat{H}_{2,i} + \tilde{R}_{2,n+1}, \quad (21)$$

де $c_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j=1, 2, i=\overline{0, n}$) – члени регулярних частин асимптотик, $p_{j,i}(\phi_j, \psi, \eta, t)$ ($j=1, 2, i=\overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки в околі поверхні EFF_*E_* розділу підобластей G_{z-} і G_{z+}), $P_i(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i=\overline{0, n+1}$) – функції типу примежового шару в околі $\varphi = \varphi^*$ (поправки на виході фільтраційної течії), $\tilde{P}_{j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\hat{P}_{j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{H}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{H}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j=1, 2, i=\overline{0, 2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi = 0$, $\psi = Q_*$, $\eta = 0$, $\eta = Q^*$, що враховують вплив “бічних джерел забруднень”, $\phi_1 = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$, $\phi_2 = \frac{\varphi - \varphi^*}{\varepsilon}$, $\tilde{\varphi} = \frac{\varphi^* - \varphi}{\varepsilon}$,

$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}} = \frac{Q_* - \psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}} = \frac{Q^* - \eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{j,n+1}(\varphi, \psi, \eta, t, \varepsilon)$ ($j=1, 2$) – залишкові члени (їх оцінка

встановлюється на основі принципу максимуму [1]).

У результаті підстановки (20) і (21) в (12) – (19) і виконання стандартної процедури порівнювання коефіцієнтів при однакових степенях ε , одержимо задачі для знаходження головних частин $c_{j,0}$ ($j=1, 2$) розв’язку і поправок $c_{j,i}$ ($j=1, 2, i=\overline{1, n}$):

$$\begin{cases} \frac{\tilde{\nu}^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,0)\varphi} + \sigma_j \cdot c'_{(1,0)t} = 0, \\ c_{1,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = \tilde{c}_*(\psi, \eta, t), \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\tilde{\nu}^2}{\kappa_1} \cdot c'_{(1,i)\varphi} + \sigma_j \cdot c'_{(1,i)t} = g_{1,i}, \\ c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = 0 \quad (i=\overline{1, n}), \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{\tilde{\nu}^2}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,0)\varphi} + \sigma_j \cdot c'_{(2,0)t} = 0, \\ c_{2,0}(\varphi, \psi, \eta, 0) = \tilde{c}_0^0(\varphi, \psi, \eta), c_{2,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\tilde{v}^2}{\kappa_2} \cdot c'_{(2,i)\varphi} + \sigma_j \cdot c'_{(2,i)t} = g_{2,i}, \\ c_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, 0) = 0, c_{2,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) = c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}), \end{cases}$$

де $g_{j,i} = d_j \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa_j^2} \cdot c''_{(j,i-1)\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(j,i-1)\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(j,i-1)\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c''_{(j,i-1)\psi} + b_{2,2} \cdot c''_{(j,i-1)\eta} \right)$
 $(j = 1, 2, i = \overline{1, n}).$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$\begin{aligned} c_{1,0}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} \tilde{c}_*(\psi, \eta, t - f_1(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \tilde{c}_0^0(f_1^{-1}(f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \\ c_{2,0}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} c_{1,0}(\varphi_*, \psi, \eta, t - f_2(\varphi, \psi, \eta)), & t \geq f_2(\varphi, \psi, \eta), \\ \tilde{c}_0^0(f_2^{-1}(f_2(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta), & t < f_2(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \\ c_{1,i}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} \kappa_1 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{1,i}(s, \psi, \eta, f_1(s, \psi, \eta) + t - f_1(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(s, \psi, \eta)} ds, & t \geq f_1(\varphi, \psi, \eta), \\ \int_0^t \frac{g_{1,i}(f_1^{-1}(s + f_1(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\sigma_1} ds, & t < f_1(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \\ c_{2,i}(\varphi, \psi, \eta, t) &= \begin{cases} h_i(\varphi, \psi, \eta, t), & t \geq f_2(\varphi, \psi, \eta), \\ \int_0^t \frac{g_{2,i}(f_2^{-1}(s + f_2(\varphi, \psi, \eta) - t, \psi, \eta), \psi, \eta, s)}{\sigma_2} ds, & t < f_2(\varphi, \psi, \eta), \end{cases} \\ h_i(\varphi, \psi, \eta, t) &= \kappa_2 \cdot \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{g_{2,i}(s, \psi, \eta, f_2(s, \psi, \eta) + t - f_2(\varphi, \psi, \eta))}{\tilde{v}^2(s, \psi, \eta)} ds + c_{1,i}(\varphi_*, \psi, \eta, t), \end{aligned}$$

де $f_1(\varphi, \psi, \eta) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\kappa_1 \cdot \sigma_1 \cdot ds}{\tilde{v}^2(s, \psi, \eta)}$ – час проходження відповідною частинкою шляху від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in ABB_*A_*$ до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_-$ вздовж відповідної лінії течії, а

$$f_2(\varphi, \psi, \eta) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{\kappa_2 \cdot \sigma_2 \cdot ds}{\tilde{v}^2(s, \psi, \eta)}$$
 – від точки $(x(\varphi_*, \psi, \eta), y(\varphi_*, \psi, \eta), z(\varphi_*, \psi, \eta)) \in$

EFF_*E_* до точки $(x(\varphi, \psi, \eta), y(\varphi, \psi, \eta), z(\varphi, \psi, \eta)) \in G_+$, $f_j^{-1} (j = 1, 2)$ – функції, обернені відповідно до $f_j (j = 1, 2)$ відносно змінної φ (відмітимо, що такі функції існують, оскільки $\tilde{v}^{-2}(\varphi, \psi, \eta)$ – неперервно диференційовна, обмежена, додатньо визначена функція).

Для знаходження примежових функцій $P_{2,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) в околі ділянки $\varphi = \varphi^*$ у випадку відсутності інтенсивного відводу рідини (крайова умова (14)) одержимо такі задачі:

$$\begin{cases} d_2 \cdot P''_{(2,0)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,0)\tilde{\varphi}} = 0, \\ P_{2,0}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P_{2,0}(0, \psi, \eta, t) = \tilde{c}^*(\psi, \eta, t) - c_{2,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \\ d_2 \cdot P''_{(2,i)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)\tilde{\varphi}} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_{2,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P_{2,i}(0, \psi, \eta, t) = -c_{2,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t), \\ d_2 \cdot P''_{(2,n+1)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)\tilde{\varphi}} = q_{n+1}, \\ P_{2,n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P_{2,n+1}(0, \psi, \eta, t) = 0, \end{cases}$$

де $q_i = \frac{\kappa_2^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_2 \cdot P'_{(2,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_2 \cdot \frac{V_k}{\kappa_2^2} \cdot P''_{(2,i-k)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \frac{V_k}{\kappa_2} \cdot P'_{(2,i-k)\tilde{\varphi}} \right) - I(i, 2) \times \right.$
 $\left. \times d_2 \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(B_{1,1,k} \cdot P''_{(2,i-2-k)\psi\psi} + B_{2,1,k} \cdot P'_{(2,i-2-k)\psi} + B_{1,2,k} \cdot P''_{(2,i-2-k)\eta\eta} + B_{2,2,k} \cdot P'_{(2,i-2-k)\eta} \right) \right)$
 ($i = \overline{1, n+1}$), V_k , $B_{1,1,k}$, $B_{1,2,k}$, $B_{2,1,k}$, $B_{2,2,k}$ – коефіцієнти при k -тих ($m-k$ -тих) степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi}, \psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, $I(a, b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \geq b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$

У результаті їх послідовного розв'язання матимемо:

$$P_{2,0}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{d_2}{\kappa_2} \left(\tilde{c}^*(\psi, \eta, t) - c_{2,0}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{\varphi}},$$

$$P_{2,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_2} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}s} \cdot \int_0^s q_i(\tilde{s}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{s}} d\tilde{s} \right) ds - c_{2,i}(\varphi^*, \psi, \eta, t) \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,n+1}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_2} \cdot \int_0^{\tilde{\varphi}} \left(e^{-\frac{\kappa_2}{d_2}s} \cdot \int_0^s q_{n+1}(\tilde{s}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2}{d_2}\tilde{s}} d\tilde{s} \right) ds.$$

У випадку ж врахування інтенсивного відводу рідини (крайова умова (15)) для знаходження функцій $P_{2,i}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t)$ ($i = \overline{0, n+1}$) матимемо наступні задачі:

$$\begin{cases} d_2 \cdot P''_{(2,0)\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,0)\tilde{\varphi}} = 0, \\ P_{2,0}(\tilde{\varphi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\tilde{\varphi} \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,0)\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(2,0)\tilde{\varphi}}(0, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_2 \cdot P''_{(2,i)\bar{\phi}\bar{\phi}} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)\bar{\phi}} = q_i \quad (i = \overline{1, n}), \\ P_{2,i}(\bar{\phi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\bar{\phi} \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,i)\bar{\phi}}(0, \psi, \eta, t) = -c'_{(2,i)\bar{\phi}}(0, \psi, \eta, t), \\ \\ d_2 \cdot P''_{(2,n+1)\bar{\phi}\bar{\phi}} + \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)\bar{\phi}} = q_{n+1}, \\ P_{2,n+1}(\bar{\phi}, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\bar{\phi} \rightarrow \infty} 0, P'_{(2,n+1)\bar{\phi}}(0, \psi, \eta, t) = 0. \end{cases}$$

У результаті ж їх послідовного розв'язання отримаємо:

$$P_{2,0}(\bar{\phi}, \psi, \eta, t) = \frac{d_2}{\kappa_2} c'_{2,0\bar{\phi}}(0, \psi, \eta, t) \cdot e^{-\frac{\kappa_2 \bar{\phi}}{d_2}},$$

$$P_{2,i}(\bar{\phi}, \psi, \eta, t) = \int_0^{\bar{\phi}} \left(\frac{1}{d_2} \cdot e^{-\frac{\kappa_2 s}{d_2}} \cdot \int_0^s q_i(\bar{s}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2 \bar{s}}{d_2}} d\bar{s} - c'_{2,i\bar{\phi}}(0, \psi, \eta, t) \right) ds \quad (i = \overline{1, n}),$$

$$P_{2,n+1}(\bar{\phi}, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_2} \cdot \int_0^{\bar{\phi}} \left(e^{-\frac{\kappa_2 s}{d_2}} \cdot \int_0^s q_{n+1}(\bar{s}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_2 \bar{s}}{d_2}} d\bar{s} \right) ds.$$

Для знаходження функцій $p_{j,i}(\phi_j, \psi, \eta, t)$ ($j = 1, 2, i = \overline{0, n+1}$) отримаємо такі задачі:

$$\begin{cases} d_1 \cdot P''_{(1,0)\phi_1\phi_1} + \kappa_1 \cdot P'_{(1,0)\phi_1} = 0, d_2 \cdot P''_{(2,0)\phi_2\phi_2} - \kappa_2 \cdot P'_{(2,0)\phi_2} = 0, p_{j,0}(\phi_j, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_j \rightarrow \infty} 0 \quad (j = 1, 2), \\ c_{1,0}(0_-, \psi, \eta, t) + p_{1,0}(0_-, \psi, \eta, t) = c_{2,0}(0_+, \psi, \eta, t) + p_{2,0}(0_+, \psi, \eta, t), \\ -d_1 \cdot (c'_{(1,0)\phi_1}(0_-, \psi, \eta, t) + p'_{(1,0)\phi_1}(0_-, \psi, \eta, t)) + \kappa_1 \cdot (c_{1,0}(0_-, \psi, \eta, t) + p_{1,0}(0_-, \psi, \eta, t)) = \\ = d_2 \cdot (c'_{(2,0)\phi_2}(0_+, \psi, \eta, t) + p'_{(2,0)\phi_2}(0_+, \psi, \eta, t)) + \kappa_2 \cdot (c_{2,0}(0_+, \psi, \eta, t) + p_{2,0}(0_+, \psi, \eta, t)), \\ d_1 \cdot P''_{(1,i)\phi_1\phi_1} + \kappa_1 \cdot P'_{(1,i)\phi_1} = \bar{q}_{1,i}, d_2 \cdot P''_{(2,i)\phi_2\phi_2} - \kappa_2 \cdot P'_{(2,i)\phi_2} = \bar{q}_{2,i}, \\ p_{j,i}(\phi_j, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_j \rightarrow \infty} 0 \quad (j = 1, 2, i = \overline{1, n}), \\ c_{1,i}(0_-, \psi, \eta, t) + p_{1,i}(0_-, \psi, \eta, t) = c_{2,i}(0_+, \psi, \eta, t) + p_{2,i}(0_+, \psi, \eta, t), \\ -d_1 \cdot (c'_{(1,i)\phi_1}(0_-, \psi, \eta, t) + p'_{(1,i)\phi_1}(0_-, \psi, \eta, t)) + \kappa_1 \cdot (c_{1,i}(0_-, \psi, \eta, t) + p_{1,i}(0_-, \psi, \eta, t)) = \\ = d_2 \cdot (c'_{(2,i)\phi_2}(0_+, \psi, \eta, t) + p'_{(2,i)\phi_2}(0_+, \psi, \eta, t)) + \kappa_2 \cdot (c_{2,i}(0_+, \psi, \eta, t) + p_{2,i}(0_+, \psi, \eta, t)), \\ d_1 \cdot P''_{(1,n+1)\phi_1\phi_1} + \kappa_1 \cdot P'_{(1,n+1)\phi_1} = \bar{q}_{1,n+1}, d_2 \cdot P''_{(2,n+1)\phi_2\phi_2} - \kappa_2 \cdot P'_{(2,n+1)\phi_2} = \bar{q}_{2,n+1}, \\ p_{j,n+1}(\phi_j, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\phi_j \rightarrow \infty} 0 \quad (j = 1, 2), p_{1,n+1}(0_-, \psi, \eta, t) = p_{2,n+1}(0_+, \psi, \eta, t), \\ -d_1 \cdot p'_{(1,n+1)\phi_1}(0_-, \psi, \eta, t) + \kappa_1 \cdot p_{1,n+1}(0_-, \psi, \eta, t) = \\ = d_2 \cdot p'_{(2,n+1)\phi_2}(0_+, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot p_{2,n+1}(0_+, \psi, \eta, t), \end{cases}$$

де $\hat{q}_{j,i} = \frac{\kappa_j^2}{\tilde{v}^2(\varphi_*^*, \psi, \eta)} \cdot \left(\sigma_j \cdot P'_{(j,i-1)t} - \sum_{k=1}^i \left(d_j \cdot \frac{\tilde{V}_{j,k}}{\kappa_j^2} \cdot P''_{(j,i-k)\varphi, \psi} - (-1)^j \cdot \frac{\tilde{V}_{j,k}}{\kappa_j} \cdot P'_{(j,i-k)\varphi} \right) - I(i, 2) \cdot d_j \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\tilde{B}_{1,1,j,k} \cdot P''_{(j,i-2-k)\psi\psi} + \tilde{B}_{2,1,j,k} \cdot P'_{(j,i-2-k)\psi} + \tilde{B}_{1,2,j,k} \cdot P''_{(j,i-2-k)\eta\eta} + \tilde{B}_{2,2,j,k} \cdot P'_{(j,i-2-k)\eta} \right) \right)$ ($j=1, 2, i=\overline{1, n+1}$), $\tilde{V}_{j,k}$, $\tilde{B}_{1,1,j,k}$, $\tilde{B}_{1,2,j,k}$, $\tilde{B}_{2,1,j,k}$, $\tilde{B}_{2,2,j,k}$ ($j=1, 2$) – коефіцієнти при k -тих ($m-l$ -тих) степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi_*^* - \varepsilon\phi_1, \psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_{*+}$ та $\tilde{v}^2(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta)$, $b_{2,2}(\varphi_*^* + \varepsilon\phi_2, \psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_{*+}$.

Розв'язки відповідних задач мають наступний вигляд:

$$p_{1,0}(\phi_1, \psi, \eta, t) = 0.5 \cdot \kappa_2^{-1} \left(d_2 \cdot c'_{(2,0)\phi_2}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) - d_1 \cdot c'_{(1,0)\phi_1}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) + 3 \cdot \kappa_2 \cdot c_{2,0}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) - 2 \cdot \kappa_2 \cdot c_{1,0}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) - \kappa_1 \cdot c_{1,0}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_1}{d_1} \phi_1},$$

$$p_{2,0}(\phi_2, \psi, \eta, t) = 0.5 \cdot \kappa_2^{-1} \left(d_2 \cdot c'_{(2,0)\phi_2}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) - d_1 \cdot c'_{(1,0)\phi_1}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) + \kappa_2 \cdot c_{2,0}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) - \kappa_1 \cdot c_{1,0}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) \right) \cdot e^{-\frac{\kappa_2}{d_2} \phi_2},$$

$$p_{j,i}(\phi_j, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_j} \cdot \int_0^{\phi_j} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} s} \cdot \int_0^s \hat{q}_{j,i}(\tilde{s}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{s}} d\tilde{s} \right) ds - (\kappa_1 + \kappa_2)^{-1} \cdot \left(d_1 \times \right. \\ \left. \times c'_{(1,i)\phi_1}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) + d_2 \cdot c'_{(2,i)\phi_2}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) + (\kappa_1 + \kappa_2) \cdot c_{j,i}(\varphi_*^*, \psi, \eta, t) \right) \quad (j=1, 2, i=\overline{1, n}),$$

$$p_{j,n+1}(\phi_j, \psi, \eta, t) = \frac{1}{d_j} \cdot \int_0^{\phi_j} \left(e^{-\frac{\kappa_j}{d_j} s} \cdot \int_0^s \hat{q}_{j,n+1}(\tilde{s}, \psi, \eta, t) \cdot e^{\frac{\kappa_j}{d_j} \tilde{s}} d\tilde{s} \right) ds \quad (j=1, 2).$$

Функції $\tilde{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j=1, 2, i=\overline{0, 2n+1}$) у випадку наявності додаткових джерел (перша з крайових умов (16)) знайдемо, розв'язавши задачі:

$$\begin{cases} d_j \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \tilde{P}''_{(j,0)\psi\psi} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_j} \cdot \tilde{P}'_{(j,0)\varphi} = \sigma_j \cdot \tilde{P}'_{(j,0)t} \quad (j=1, 2), \\ \tilde{P}_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \tilde{P}_{j,0}(\varphi, 0, \eta, t) = \tilde{c}_{**}(\varphi, \eta, t) - \tilde{M}_{j,0}(\varphi, \eta, t), \\ d_j \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \tilde{P}''_{(j,i)\psi\psi} - \frac{\tilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_j} \cdot \tilde{P}'_{(j,i)\varphi} = \sigma_j \cdot \tilde{P}'_{(j,i)t} - \tilde{M}_{j,i} \quad (j=1, 2, i=\overline{1, 2n+1}), \\ \tilde{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \tilde{P}_{j,i}(\varphi, 0, \eta, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ непарне,} \\ -\tilde{M}_{j,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне.} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тут } \widehat{M}_{1,i}(\varphi, \eta, t) &= \widehat{n}_{1,3-3/2}(\varphi, 0, \eta, t) + p_{1,3-3/2}(\varphi, 0, \eta, t), \quad \widehat{M}_{2,i}(\varphi, \eta, t) = \widehat{n}_{2,3-3/2}(\varphi, 0, \eta, t) + \\ &+ p_{2,3-3/2}(\varphi, 0, \eta, t) + P_{2,3-3/2}(\varphi, 0, \eta, t) \quad (i = \overline{0, 2n+1}), \quad \widetilde{M}_{j,i} = d_j \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-k)\psi\psi}'' + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{i-1} (B_{2,1,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-1-k)\psi}) + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_{j,k}^*}{\kappa_j^2} \cdot \widetilde{P}_{(j,i-2-k)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-2-k)\eta\eta}'' + B_{2,2,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-2-k)\eta}'' \right) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^i \frac{V_{j,k}^*}{k_j} \cdot \widetilde{P}_{(j,i-k)\varphi}' \quad (j = 1, 2, \quad i = \overline{1, 2n+1}), \quad V_{j,k}^*, \quad B_{1,1,j,k}^*, \quad B_{1,2,j,k}^*, \quad B_{2,1,j,k}^* \quad \text{і} \quad B_{2,2,j,k}^* \end{aligned}$$

($j = 1, 2$) – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\widetilde{v}^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в ряд Тейлора в околі $\psi = 0$.

У випадку відсутності додаткових джерел (перша з крайових умов (17)) функції $\widetilde{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t)$ ($j = 1, 2, \quad i = \overline{0, 2n+1}$) знаходяться шляхом розв'язання наступних задач:

$$\begin{cases} d_j \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \widetilde{P}_{(j,0)\psi\psi}'' - \frac{\widetilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_j} \cdot \widetilde{P}_{(j,0)\varphi}' = \sigma_j \cdot \widetilde{P}_{(j,0)t} \quad (j = 1, 2), \\ \widetilde{P}_{j,0}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \quad \widetilde{P}'_{(j,0)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = -\widehat{M}_{j,0}(\varphi, \eta, t), \\ \left\{ \begin{aligned} d_j \cdot b_{1,1}(\varphi, 0, \eta) \cdot \widetilde{P}_{(j,i)\psi\psi}'' - \frac{\widetilde{v}^2(\varphi, 0, \eta)}{\kappa_j} \cdot \widetilde{P}_{(j,i)\varphi}' = \sigma_j \cdot \widetilde{P}_{(j,i)t} - \widehat{M}_{j,i} \quad (j = 1, 2, \quad i = \overline{1, 2n+1}), \\ \widetilde{P}_{j,i}(\varphi, \psi, \eta, t) \xrightarrow{\psi \rightarrow \infty} 0, \quad \widetilde{P}'_{(j,i)\psi}(\varphi, 0, \eta, t) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } i \text{ не парне,} \\ -\widehat{M}_{j,i}(\varphi, \eta, t), \text{ якщо } i \text{ парне,} \end{cases} \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{де } \widehat{M}_{1,i}(\varphi, \eta, t) &= \widehat{n}'_{1,3-3/2\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + p'_{1,3-3/2\psi}(\varphi, 0, \eta, t), \quad \widehat{M}_{2,i}(\varphi, \eta, t) = \widehat{n}'_{2,3-3/2\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + \\ &+ p'_{2,3-3/2\psi}(\varphi, 0, \eta, t) + P'_{2,3-3/2\psi}(\varphi, 0, \eta, t) \quad (i = \overline{0, 2n+1}), \quad \widetilde{M}_{j,i} = d_j \cdot \left(\sum_{k=1}^i B_{1,1,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-k)\psi\psi}'' + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=0}^{i-1} (B_{2,1,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-1-k)\psi}) + I(i, 2) \cdot \sum_{k=0}^{i-2} \left(\frac{V_{j,k}^*}{\kappa_j^2} \cdot \widetilde{P}_{(j,i-2-k)\varphi\varphi}'' + B_{1,2,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-2-k)\eta\eta}'' + B_{2,2,j,k}^* \cdot \widetilde{P}_{(j,i-2-k)\eta}'' \right) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^i \frac{V_{j,k}^*}{k_j} \cdot \widetilde{P}'_{(j,i-k)\varphi} \quad (j = 1, 2, \quad i = \overline{1, 2n+1}), \quad V_{j,k}^*, \quad B_{1,1,j,k}^*, \quad B_{1,2,j,k}^*, \quad B_{2,1,j,k}^* \quad \text{і} \quad B_{2,2,j,k}^* \end{aligned}$$

($j = 1, 2$) – коефіцієнти при k -их степенях $\sqrt{\varepsilon}$ розкладу відповідно функцій $\widetilde{v}^2(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{1,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$, $b_{2,1}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ і $b_{2,2}(\varphi, \sqrt{\varepsilon}\psi, \eta)$ в

ряд Тейлора в околі $\psi = 0$. Задачі для знаходження функцій $\hat{P}_{j,i}(\varphi, \tilde{\psi}, \eta, t)$, $\tilde{H}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$, $\hat{H}_{j,i}(\varphi, \psi, \tilde{\eta}, t)$ ($j = 1, 2$, $i = \overline{0, 2n+1}$) отримуються аналогічно. У відповідних задачах рівняння виду $\alpha(\varphi, \xi) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} - \delta(\varphi, \xi) \frac{\partial F}{\partial \varphi} = \sigma \frac{\partial F}{\partial t} + q(\varphi, \xi, \mu, t)$ розв'язуються шляхом їх зведення за допомогою заміни $F(s) = F(\varphi, \xi) - t$ до рівнянь із сталими коефіцієнтами $\tilde{\alpha}(s) \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} = \sigma \frac{\partial F}{\partial t} + q_0(s, \mu, t)$, де s – параметр.

Числові розрахунки. Для комп'ютерного моделювання процесу масопереносу забруднюючих речовин у двошаровому кусково-однорідному пористому середовищі, що характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії, проведено два числові експерименти. Для проведення першого використано ідеальний фільтраційний фон для області G_z , обмеженої поверхнями $f_1(x, y, z) = (x + 20.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_2(x, y, z) = (x - 420.9582786)^2 + y^2 + z^2 - 8822.56088033$, $f_3(x, y, z) = (x - 200)^2 + z^2 + (y - 615.536707)^2 - 418885.4382$, $f_4(x, y, z) = (x - 200)^2 + (y + 615.53670744)^2 + z^2 - 418885.4382$, $f_5(x, y, z) = f_6(x, y, z) = (x(x - 400) + y^2 + z^2)^2 + 160000y^2 - 932548.33996z^2$, вибрано положення поверхні розділу EFF_*E_* : $f_*(x, y, z) = (x + 2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098$ і розглянуто три випадки різного задання відповідних коефіцієнтів:

- 1) $\kappa_1 = 0,45$ м/добу, $\kappa_2 = 0,3$ м/добу, $\sigma_1 = 0,7$, $\sigma_2 = 0,5$, $D_1 = 0,008$ м²/добу, $D_2 = 0,005$ м²/добу;
- 2) $\kappa_1 = 0,375$ м/добу, $\kappa_2 = 0,3$ м/добу, $\sigma_1 = 0,6$, $\sigma_2 = 0,5$, $D_1 = 0,007$ м²/добу, $D_2 = 0,005$ м²/добу;
- 3) $\kappa_1 = 0,45$ м/добу, $\kappa_2 = 0,375$ м/добу, $\sigma_1 = 0,7$, $\sigma_2 = 0,6$, $D_1 = 0,008$ м²/добу, $D_2 = 0,007$ м²/добу.

Відповідно до них побудовано розрахункові динамічні сітки G_z^l при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 47.6$ (рис. 2), G_z^2 при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 60.3$, G_z^3 при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 42.16$ (мають схожий вигляд), які отримані залежно від вибору задання відповідних коефіцієнтів (див. вище) при $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = n_2 = 10$, $m = 7$, $l = 7$ (параметри n_1 , n_2 , m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної). Значення φ_* та φ^* вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища $v_{сеп}$ була приблизно рівною 1 м/добу. Також для областей G_z^j ($j = 1, 3$) знай-

дено фільтраційні витрати, які відповідно становлять: $Q_1 = 1,91 \text{ м}^3/\text{добу}$, $Q_2 = 3,02 \text{ м}^3/\text{добу}$, $Q_3 = 2,38 \text{ м}^3/\text{добу}$, потенціали на поверхнях розділу: $\Phi_{*1}^* = 26,88$, $\Phi_{*2}^* = 34,05$, $\Phi_{*3}^* = 21,47$ та обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ (рис. 3).

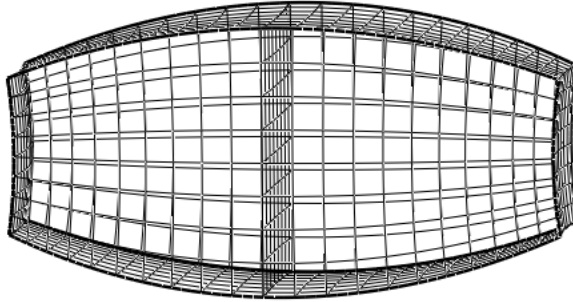


Рис. 2. Розрахована сіткова область G_z^1

На рис. 2, 3 зображено розподіли середніх величин концентрацій забруднюючих речовин $c_{сеп}(\varphi, t)$ для областей G_z^j ($j = \overline{1,3}$) при $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$, $c(\psi, \eta, t) = 0,017 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0,1(\psi^2 + \eta^2)}$.

Для проведення другого числового експерименту використано цей же ж ідеальний фільтраційний фон, але вибрано три положення поверхні розділу $EFF_*E_*: f_{*4}(x, y, z) = (x + 232.79068275)^2 + y^2 + z^2 - 147307.775073$, $f_{*5}(x, y, z) = (x + 2604.7602859)^2 + y^2 + z^2 - 7826680.261098$, $f_{*6}(x, y, z) = (x - 632.79068275)^2 + y^2 + z^2 - 147307.775073$. При $\kappa_1 = 0,45 \text{ м}/\text{добу}$, $\kappa_2 = 0,3 \text{ м}/\text{добу}$, $\sigma_1 = 0,7$, $\sigma_2 = 0,5$, $D_1 = 0,008 \text{ м}^2/\text{добу}$, $D_2 = 0,005 \text{ м}^2/\text{добу}$ було побудовано розрахункові динамічні сітки G_z^4 при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 47,4$, $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = 7$, $n_2 = 13$, $m = 7$, $l = 7$, G_z^5 при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 49$, $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = n_2 = 10$, $m = 7$, $l = 7$, G_z^6 при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 48,7$, $n = n_1 + n_2 = 20$, $n_1 = 14$, $n_2 = 6$, $m = 7$, $l = 7$, (рис. 5), які отримані залежно від вибраної поверхні розділу $f_{*j}(x, y, z)$ ($j = \overline{1,3}$). Значення φ_* та φ^* , як і в першому експерименті, вибиралися так, щоб середня швидкість фільтрації вздовж двошарового пористого середовища $v_{сеп}$ становила $1 \text{ м}/\text{добу}$. Для областей G_z^j ($j = \overline{4,6}$) знайдено фільтраційні витрати, які відповідно становлять: $Q_4 = 2,01 \text{ м}^3/\text{добу}$, $Q_5 = 1,83 \text{ м}^3/\text{добу}$, $Q_6 = 1,9 \text{ м}^3/\text{добу}$, потенціали на поверхнях розділу: $\Phi_{*4}^* = 19,74$, $\Phi_{*5}^* = 26,88$, $\Phi_{*6}^* = 36,08$, та обчислено величини швидкостей фільтрації $|v|$ (рис. 6).

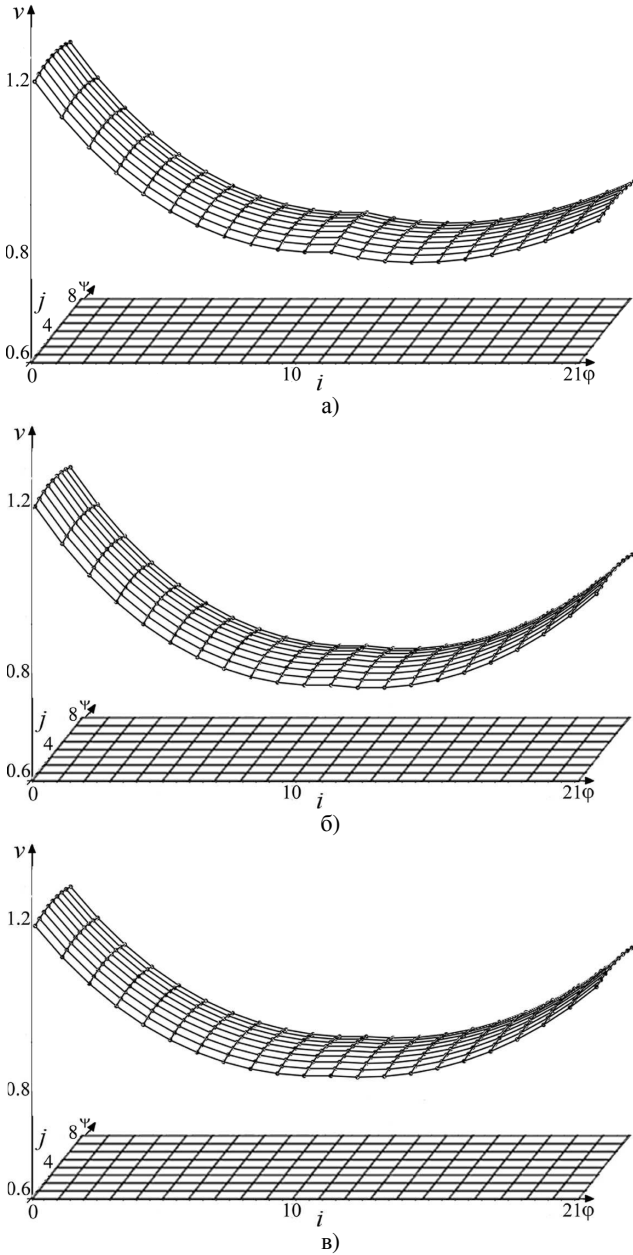


Рис. 3. Розподіл величин швидкостей фільтрації вздовж поверхонь течій $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для областей G_z^1 (а), G_z^2 (б), G_z^3 (в)

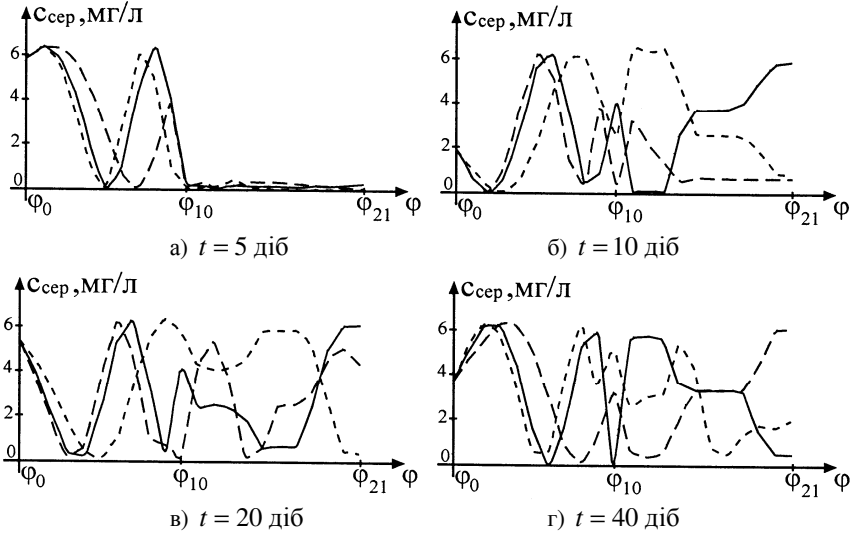
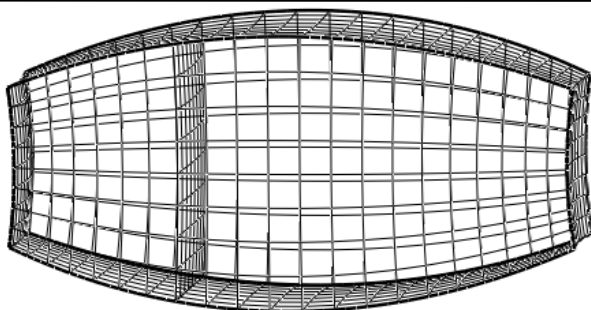


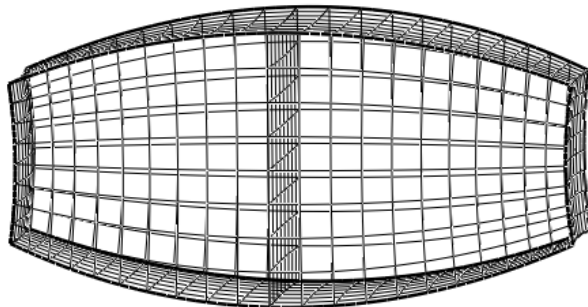
Рис. 4. Розподіли середніх величин концентрацій забруднюючої речовини вздовж двошарових пористих середовищ (суцільна лінія — та штрихові --- і ---- відповідають відповідно модельним областям G_z^j ($j = \overline{1,3}$))

На рис. 7 зображено розподіли середніх величин концентрацій забруднюючих речовин $c_{сеп}(\varphi, t)$ для областей G_z^j ($j = \overline{4,6}$) при $c_0^0(\varphi, \psi, \eta) = 0$, $c_*(\psi, \eta, t) = c^*(\psi, \eta, t) = 0.017 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1(\psi^2 + \eta^2)}$, $c_{**}(\varphi, \eta, t) = 0.017 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1(\eta^2 + 8)}$, $c^{**}(\varphi, \eta, t) = 0.017 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1(\eta^2 + 12)}$, $c_{***}(\varphi, \psi, t) = c^{***}(\varphi, \psi, t) = 0.017 \cdot \sin(t) \cdot e^{-0.1(\psi^2 - 0.15)}$.

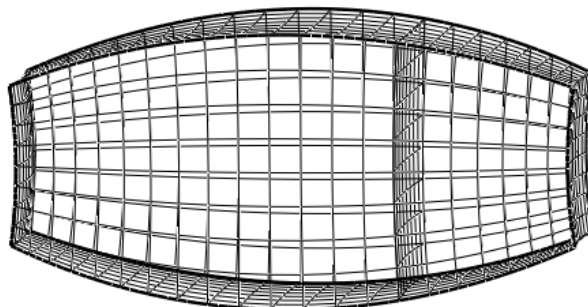
Висновки. Завдяки застосованій нами методиці “розщеплення” вихідної задачі та конструкції побудови розв’язку шляхом доповнення розв’язку відповідної виродженої задачі різними поправками вперше отримано розв’язки просторових сингулярно збурених задач типу «фільтрація – конвекція – дифузія», що описують процес масопереносу у двошарових середовищах, де кожен шар характеризується різними коефіцієнтами фільтрації, пористості і дифузії, в аналітичному виді. При цьому отримано нового типу поправки в асимптотичних розкладах розв’язків відповідних сингулярно збурених задач з розривними коефіцієнтами, що характеризують механізм конвективно-дифузійного перерозподілу концентрацій в околах ділянок розділу шарів.



а)



б)



в)

Рис. 5. Розраховані сіткові області G_z^4 (а), G_z^5 (б), G_z^6 (в)
при різних положеннях поверхні розділу

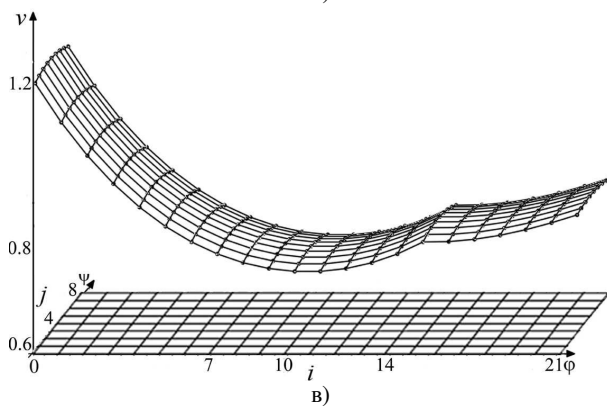
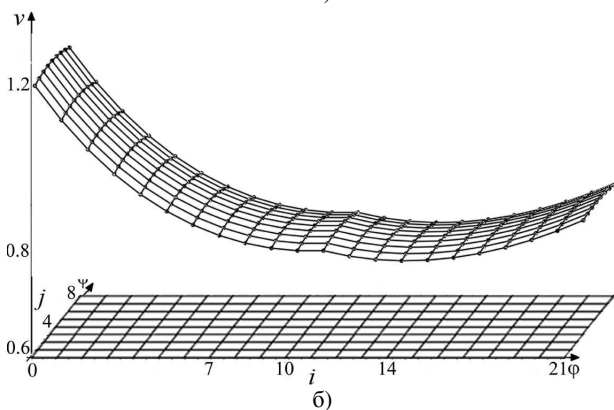
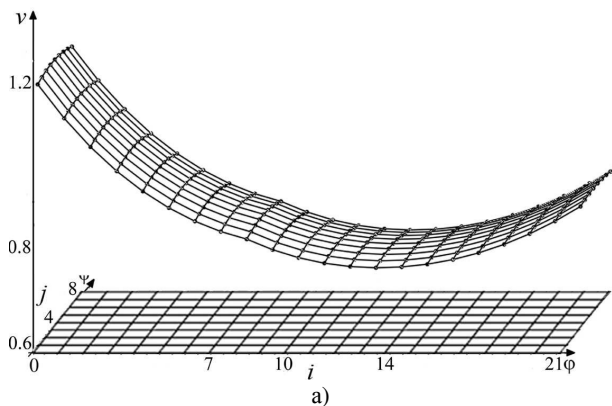


Рис. 6. Розподіл величин швидкостей фільтрації вздовж поверхонь течій $\eta(x, y, z) = \bar{\eta}_4$ для областей G_z^4 (а), G_z^5 (б), G_z^6 (в)

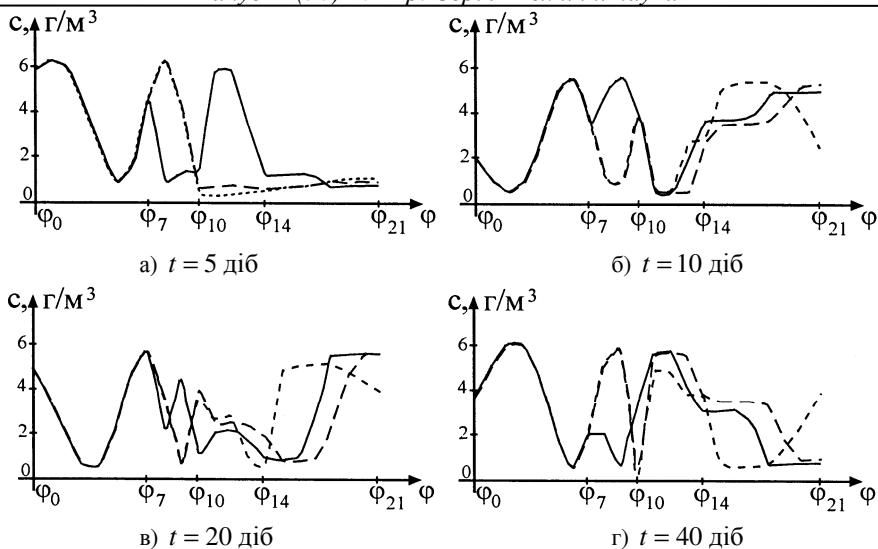


Рис. 7. Розподіли середніх величин концентрацій забруднюючої речовини вздовж двошарового пористого середовища (суцільна лінія — та штрихові --- і ---- відповідають відповідно модельним областям G_2^j ($j = \overline{4, 6}$))

Проведені числові дослідження свідчать про важливість врахування багатшаровості при прогнозуванні поширення різного роду забруднень у пористих середовищах і необхідності більш точного знаходження не лише значень коефіцієнтів фільтрації, пористості і дифузії в кожному шарі, але й більш точного визначення розміщення поверхонь розділу шарів.

Отримані результати знаходять своє застосування при прогнозуванні конвективно-дифузійного поширення нерозчинних забруднень, розповсюдження захоронених ядерних відходів в земляних пластах тощо.

Такий підхід знаходить своє вагоме застосування при прогнозуванні роботи і проектуванні двошарових засипних фільтрів з однорідним завантаження кожного шару.

Також, у перспективі планується застосування запропонованої методики для розв'язання відповідних просторових сингулярно збурених задач на основі [8] аналогічно [5] для багатозв'язних областей, задач з післядією [6].

1. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція – дифузія” / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с.
2. Бомба А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція – дифузія” / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк, В. В. Скопечкий // Доп. НАН України. – 2007. – № 8. – С. 37-44.
3. Бомба А. Я. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу “конвекція – дифузія” в анізотропних середовищах / А. Я. Бомба,

- Ю. Є. Климяк, В. В. Скопечкий // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – № 2. – С. 105-113. **4.** Бомба А. Я. Просторові сингулярно збудені задачі типу “фільтрація – дифузія” у двошарових середовищах / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климяк, І. М. Присяжнюк // Вісник Харк. нац. ун-ту. Сер. “Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління”. – 2008. – № 833, вип. 10. – С. 47-58. **5.** Бомба А. Я. Решение задач типа “конвекция-фильтрация” в многосвязных областях / А. Я. Бомба, Д. А. Пригорницький, І. М. Присяжнюк // Компьютерная математика. – 2004. – № 1. – С. 152-159. **6.** Бомба А. Я. Численно-асимптотическое приближение решений одного класса модельных нелинейных сингулярно возмущенных краевых задач конвективной диффузии с последствием / А. Я. Бомба, Ю. Е. Климяк, И. М. Присяжнюк // Компьютерная математика. – 2005. – №3. – С. 3-12. **7.** Климяк Ю. Є. Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 5 (14). – Рівне : РДГУ, 2008. – С. 104-143. **8.** Климяк Ю. Є. Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення двоз’язних областей із розрізом на прямокутні паралелепіпеди / Ю. Є. Климяк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 6 (15). – Рівне : РДГУ, 2009. – С. 59-71. **9.** Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной среде: препринт / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк / АН УССР. Ин-т математики; 85-72. – Киев: 1985. – 16 с. **10.** Рауз. Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат, 1967. – 390 с.

Рецензент: д.т.н., проф. Власюк А. П. (НУВГП)