УДК 539.3

УТОЧНЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ЗГИНУ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ БУБНОВА-ГАЛЬОРКІНА

М. В. Мотруніч
студент 5 курсу, група ПЦБ-51м, навчально-науковий інститут будівництва та архітектури
Науковий керівник – к.т.н., доцент О. Г. Гуртовий

Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне, Україна

За уточненою теорією О.Ф. Рябова з використанням методу Бубнова-Гальоркіна отримано аналітичний розв’язок задачі згину жорстко затисненої по контуру багатошарової пластини. Дано оцінку уточнень.
Ключові слова: пластина, уточнена модель, поперечний зсув, прогин.

По уточнённой теории А.Ф. Рябова с использованием метода Бубнова-Гальоркина получено аналитическое решение задачи изгиба жестко защемленной по контуру многослойной пластины. Дана оценка уточнений.
Ключевые слова: пластина, уточненная модель, поперечный сдвиг, прогиб.

According to some theory O.F. Ryabova using Bubnov-Galerkin the analytical solution of the bend tightly pinched by a multilayer circuit plate. The estimate revisions.
Keywords: plate, improved model, transverse shear, deflection.

В розрахунках напружено-деформованого стану (НДС) товстих плит, а також шаруватих конструкцій, в яких різниця жорсткостей (модулів пружності) шарів значна, застосування класичної теорії пластин може призвести до суттєвих похибок [1; 2; 3]. Тому необхідно застосовувати уточнені теорії, які враховують вплив на НДС деформацій поперечного зсуву, а іноді і поперечного обтиснення [2].

Одним з варіантів уточненої теорії, що враховує поперечний зсув, є теорія А.Ф. Рябова [1; 3], особливістю якої є відносно низький загальний порядок диференціювання розрахункових рівнянь. Актуальним являється отримання аналітичних та числових розв’язків конкретних задач із застосуванням уточненої теорії [3].

В даній статті досліджується поперечний згин однорідних та багатошарових пластин, які жорстко закріплені по контуру. При такому закріпленні посилюється влив деформацій поперечного зсуву на НДС пластини.

Методом дослідження є метод Бубнова-Гальоркіна.

Уточнений розв’язок задачі згину багатошарової пластини.

Розглянемо уточнену модель:

$$u_3(x,y,z) = w,\ u_i(x,y,z) = -w_{,i}z - \Psi_k(z)\mathrm{X}_{,i}\ , \tag{1}$$

де $i=\overline{1,2}$ *w(x,y)* – функція прогинів, а X(x,y) – функція прогинів зсуву; ; x_1=x, x_2=y – координати в площині пластини.

Функції w, x – невідомі, а функція $\Psi_k(z)$ має вигляд:

$$\Psi_k(z) = \int_0^z \frac{1}{G_k^{/}} \int_z^{\delta} \frac{E_k}{1-\upsilon_k^2} zdz$$

$$\delta_2 = h - \delta_1; \ \delta_1 = \frac{\int\limits_{a0}^{an} \frac{E_k}{1-\upsilon_n^2} zdz}{\int\limits_{a0}^{an} \frac{E_k}{1-\upsilon_n^2} dz}, \tag{2}$$

де $E_k, \Psi_k(z)$ – модуль пружності та коефіцієнт Пуассона.

Система розрахункових рівнянь, що враховує (1), має вигляд:

$$D_{11}\nabla^2\nabla^2 w + D_{12}\nabla^2\nabla^2 x = q; \quad D_{12}\nabla^2\nabla^2 w + D_{22}\nabla^2\nabla^2 x - D_{21}\nabla^2 x = 0. \tag{3}$$

Оскільки $\frac{D_{22}}{D_{12}} \approx \frac{D_{12}}{D_{11}}$ за[1, 3], зводиться до простішої системи:

$$D_{11}\nabla^2\nabla^2 \varPhi = q; \quad D_{11}\nabla^2 x = q, \tag{4}$$

де $\varPhi = w + \frac{D_{12}}{D_{11}} X$ (5) – узагальнена функція, а

$$D_{11} = \int\limits_{a0}^{an} \frac{E_k}{1-\upsilon_n^2} z^2 dz; \quad D_{12} = \int\limits_{a0}^{an} \frac{E_k}{1-\upsilon_n^2} z\Psi_k(z) dz. \tag{6}$$

Для жорсткого затиснення пластини граничні умови на краю x_i=0,a_i пластини:

$$\hat{O} = \hat{O}_{,з} = 0; \tilde{o} = 0. \tag{7}$$

Розглянемо квадратну пластину яка жорстко затиснена по контуру під дією рівномірно – розподіленого навантаження. Знайдемо розв’язок системи (4) методом Бубнова-Гальоркіна. Варіаційні рівняння матимуть вигляд:

$$\iint\limits_S \left(D_{11}\nabla^2\nabla^2\varPhi - q\right)\delta\varPhi dS = 0; \quad \iint\limits_S \left(D_{11}\nabla^2 X - q\right)\delta X dS = 0. \tag{8}$$

Задовольнимо кінематичні умови (7) на краях пластини, прийнявши функції Ф і Х у вигляді одного члену ряду:

$$\varPhi(x,y) = \frac{C_{11}}{4}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{a}\right); \quad X(x,y) = \frac{d_{11}}{4}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{a}\right). \tag{9}$$

Тоді отримуємо з (8) два рівняння:

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^a \left[D_{11}c_{11}\nabla^2\nabla^2\varphi(x,y) - q\right]\varphi(x,y)dxdy = 0; \quad \int\limits_0^a\int\limits_0^a \left[D_{11}d_{11}\nabla^2\varphi(x,y) - q\right]\varphi(x,y)dxdy = 0; \tag{10}$$

де

$$\varphi = \frac{1}{4}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{a}\right);$$

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = \frac{4\pi^4}{a^4}\left[\left(1-\cos\frac{2\pi y}{a}\right)\cos\frac{2\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi x}{a}\cos\frac{2\pi y}{a} + \left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\frac{2\pi y}{a}\right];$$

$$\nabla^2 y = \frac{\pi^2}{a^2}\left[\left(1-\cos\frac{2\pi y}{a}\right)\cos\frac{2\pi x}{a} + \left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\frac{2\pi y}{a}\right].$$

Взявши інтеграл (10), знайдемо:

$$c_{11} = \frac{qa^4}{8\pi^4 D_{11}}; \quad d_{11} = \frac{qa^3}{6D_{11}\pi^2}. \tag{11}$$

Тоді функція прогинів матиме вигляд:

$$w = \hat{O} - \frac{D_{12}}{D_{11}} X = \left(\frac{qa^4}{32\pi^4 D_{11}}\right)\left(1 - \frac{D_{12}\pi^2 \cdot 4}{D_{11} a \cdot 3}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{a}\right).$$

Зокрема, прогин у центрі пластини при $x = y = \frac{a}{2}$ становить

$$w_{\max} = \frac{qa^4}{32\pi^4 D_{11}}\left(1 - \frac{4D_{12}\pi^2}{3D_{11}a}\right). \tag{12}$$

Таким чином, уточнений розв'язок (12) відрізняється від розв'язку за класичною теорією пластини появою множника у дужках. Так, для ізотропної пластини $\frac{a}{h} = 3, \upsilon = 0$ прогин відрізняється в 1,5 рази.

Розглянемо також тришарову пластину, для якої $a = 25h = 100\text{мм};\ h_1 = h_3 = 2\text{мм};$ $h_2 = 36\text{мм};\quad E_1 = E_3 = 7 \cdot 10^4\,\text{МПа};\quad E_2 = 70\text{МПа};\ \upsilon_1 = \upsilon_2 = \upsilon_3 = 0{,}3.$ Навантаження рівномірно розподілене. Для жорсткої діафрагми на торці і для випадку відсутності жорсткості діафрагми максимальний прогин відрізнятиметься в 0,7852 рази, а від класичного розв'язку в 2,11 рази.

Отже, розв'язок за уточненою теорією суттєво відрізняється від розв'язку за класичною теорією. Ця відмінність значно зростає для трьохшарових пластин з легким заповнювачем.

Список використаних джерел:

1. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Кн. 3. Опір дво- і тривимірних тіл : підручник / В. Г. Піскунов, В. С. Сінетов, В. Д. Шевченко, Ю. М. Федоренко, за ред. В. Г. Піскунова. – К. : Вища школа, 1995. – 271 с. **2.** Пискунов В. Г. Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций / В. Г. Пискунов, В. Е. Вериженко – К. : Будівельник, 1986. – 176 с. **3.** Справочник по теории упругости / под ред. П. М. Варвака, А. Ф. Рябова. – К. : Будівельник, 1971. – 418 с.