



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

04-02-31

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ
до вивчення та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни "Вища математика"
(розділи: "Елементи лінійної алгебри та аналітичної
геометрії. Вступ до математичного аналізу.
Диференціальне та інтегральне числення функції
однієї змінної")

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" всіх форм
навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією за спеціальністю 192
"Будівництво та цивільна інженерія"
Протокол № 7 від 31.05.2018 р.

Рівне — 2018



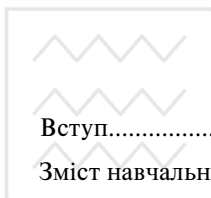
Методичні вказівки та завдання до вивчення та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділів: "Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної" для студентів спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" всіх форм навчання / Брушковський О.Л., Дубчак І.В. — Рівне: НУВГП, 2018. — 120 с.

Укладачі:

Брушковський О. Л., канд. техн. наук, доцент;

Дубчак І.В., асистент.

Відповідальна за випуск: С.П. Цецик, кандидат педагогічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри вищої математики.



ЗМІСТ

1	Вступ.....	3
2	Зміст навчальної дисципліни.....	3
3	Методичні рекомендації до виконання самостійної роботи.....	7
4	Навчальний варіант завдань для самостійної роботи та рекомендації по її виконанню.....	8
5	Варіанти завдань для самостійної роботи (30 варіантів).....	31
6	Теоретичні питання і завдання для підготовки до складання іспиту за білетами.....	91
7	Особливості тестової форми складання модулів.....	109
8	Зразок білета з тестовими завданнями для складання іспиту....	109
9	Довідковий матеріал.....	117
10	Рекомендована література	120



1. Вступ

Мета методичних вказівок — максимально допомогти здобувачам вищої освіти заочної форм навчання у вивченні важливих розділів вищої математики “Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної”, що відносяться до I семестру навчання, та полегшити їх підготовку до складання модулів, заліку або іспиту. Для цієї категорії студентів основним методом навчання є самостійна робота, так як аудиторні заняття носять переважно оглядовий характер. Здобувач вищої освіти повинен вивчити відповідні терміни, теореми і опанувати методи розв’язання відповідних прикладів і задач всього курсу [1-7]. В умовах обмеженої кількості аудиторних годин активна самостійна робота студентів денної форми навчання теж набуває великого значення.

Відповідно до робочої програми, пропонуються методичні рекомендації до самостійної роботи по розв’язуванню задач і прикладів вказаного курсу та 30 варіантів завдань для самостійної роботи, що повністю охоплюють розділи “Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної” та зразок виконання навчального віріанту такої роботи з методичними рекомендаціями. Методичні вказівки призначені для студентів I курсу заочної форми навчання спеціальності 192 “Будівництво та цивільна інженерія”, мають універсальну структуру і можуть бути використані для студентів різних форм навчання всіх технічних спеціальностей.

2. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

Тема 1. Визначники і системи лінійних рівнянь

Визначники 2-го і 3-го порядків, їх властивості. Мінор і алгебраїчне доповнення. Розклад визначника. Поняття про визначники вищих порядків.

Застосування визначників до розв’язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь з двома і трьома невідомими. Формули Крамера. Однорідні системи двох і трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.



Тема 2. Матриці

Матриці і їх види. Дії над матрицями. Обернена матриця. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом.

Тема 3. Вектори

Основні поняття. Лінійні операції над векторами. Базис на площині і в просторі. Розклад вектора по базису. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів, їх властивості та застосування.

Тема 4. Аналітична геометрія

Найпростіші задачі аналітичної геометрії. Поняття про рівняння лінії на площині. Полярна система координат. Пряма лінія на площині, різні види її рівнянь. Перетин прямих. Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

Поняття про рівняння поверхні і лінії у просторі. Площина у просторі, різні види її рівнянь. Перетин площин. Відстань від точки до площини. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин. Пряма лінія у просторі. Пряма і площина у просторі. Перетин прямої і площини.

Лінії другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола, парабола; їх канонічні рівняння та основні характеристики. Поверхні другого порядку і їх канонічні рівняння.

Розділ 2. Вступ до математичного аналізу

Тема 5. Вступ до математичного аналізу

Поняття функції однієї змінної. Область визначення, множина значень, способи задання і характеристики поведінки. Складна функція. Основні елементарні функції. Границя змінної величини. Границя функції. Границя послідовності. Односторонні границі. Необхідна і достатня умови існування границі функції. Нескінченно малі функції і їх властивості. Основні теореми про границі. Нескінченно великі функції, їх властивості і зв'язок з нескінченно малими функціями. Порівняння нескінченно малих функцій. Перша і друга визначні границі. Неперервність функції в точці. Властивості функцій, неперервних в точці. Одностороння неперервність. Точки розриву і їх класифікація. Неперервність функції на відріжку. Властивості функцій, неперервних на відріжку.



Розділ 3. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Тема 6. Похідна і диференціал. Основні теореми диференціального числення. Поняття про функції декількох змінних і частинні похідні

Поняття похідної, її геометричний і механічний зміст. Рівняння дотичної і нормалі. Поняття диференційованості функції. Диференційованість і неперервність. Основні правила диференціювання функції однієї змінної. Похідна складної функції. Таблиця похідних.

Похідні тригонометричних функцій. Похідна логарифмічної функції. Похідна оберненої функції. Логарифмічна похідна. Гіперболічні функції та їх похідні. Похідні неявно і параметрично заданих функцій.

Похідні вищих порядків. Механічний зміст другої похідної. Похідні другого порядку від функцій, заданих параметрично і неявно. Поняття про функції декількох змінних і частинні похідні.

Диференціал функції. Інваріантність форми першого диференціалу. Застосування диференціала до наближених обчислень. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші. Правило Лопіталя і його застосування.

Тема 7. Дослідження функцій за допомогою похідних

Умови зростання і спадання функції. Екстремум функції. Необхідна і достатня умови екстремуму функції. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції. Дослідження функції на опуклість і угнутість. Точки перегину. Асимптоти графіка функції і їх знаходження. Загальна схема дослідження функції і побудови її графіка.

Тема 8. Векторна функція скалярного аргументу

Векторна функція скалярного аргументу. Годограф. Похідна векторної функції скалярного аргументу. Її геометричний і механічний зміст. Рівняння дотичної прямої і нормальної площини до просторової кривої.

Довжина дуги, її похідна і диференціал. Кривина дуги. Радіус і круг кривини. Еволюта і евольвента

Розділ 4. Невизначений інтеграл

Тема 9. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування.



Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Означення невизначеного інтеграла, теорема існування, геометричний зміст, основні властивості. Таблиця основних невизначених інтегралів. Приклади інтегралів, що не являються елементарними функціями. Безпосереднє інтегрування. Інтегрування підведенням під знак диференціала.

Інтегрування підстановкою. Інтегрування частинами. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен.

Тема 10. Інтегрування раціональних, тригонометричних та ірраціональних функцій.

Поняття комплексних чисел; дії над ними. Розв'язування квадратного рівняння в комплексній області. Поняття про тригонометричну і показникову форми комплексного числа. Формули Ейлера.

Многочлени. Ділення многочленів. Основна теорема алгебри про розклад многочлена на множники. Теорема Безу. Раціональні дроби, їх види. Розклад правильного раціонального дроби на суму найпростіших. Методи знаходження коефіцієнтів розкладу. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтегрування дробово-раціональних функцій.

Інтегрування деяких тригонометричних виразів за допомогою універсальної та інших тригонометричних підстановок. Інтегрування добутків тригонометричних функцій.

Інтегрування ірраціональних виразів, які виражаються через аргумент, лінійну або дробово-лінійну функцію з дробовими показниками. Раціоналізація інтегралів за допомогою тригонометричних підстановок.

Розділ 5. Визначений інтеграл

Тема 11. Означення, властивості та обчислення визначеного інтеграла. Невласні інтеграли.

Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення, теорема існування, геометричний і фізичний зміст та основні властивості визначеного інтеграла. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею, теорема про похідну такого інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца. Заміна змінної і інтегрування частинами у визначеному інтегралі.



Невласні інтеграли першого і другого роду. Дослідження збіжності невластних інтегралів.

Тема 12. Геометричні та деякі фізичні застосування визначеного інтеграла.

Довжина дуги кривої. Обчислення довжини дуги кривої в декартових і полярних координатах.

Площа криволінійної трапеції в декартових координатах. Площа плоскої фігури при параметричному заданні границі. Обчислення площі плоскої фігури в полярних координатах.

Обчислення об'ємів тіл. Обчислення площі поверхні тіла обертання. Деякі фізичні застосування визначеного інтеграла (обчислення шляху, роботи, сили тиску).

3. Методичні рекомендації до виконання самостійної роботи

В даній методичній розробці відповідно до робочої програми, пропонуються спеціально підібрані індивідуальні завдання для самостійної роботи (30 варіантів), що охоплюють всі теми розділів “Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної”, що вивчаються у I семестрі. Наведено зразок розв’язування аналогічного навчального варіанту з методичними порадами. Це дозволяє здобувачу вищої освіти першого (бакалаврського) рівня виконати індивідуальний варіант роботи самостійно. Виконання такої роботи дає змогу закріпити практичні навички по застосуванню математичних методів вказаних розділів. Ці завдання також можуть використовуватись як збірник для практичних занять, домашніх завдань, контрольних робіт, виконання індивідуальних робіт та підготовки до складання контрольних заходів. В роботі наведено зразок білету до іспиту при застосуванні традиційної форми оцінки знань студентів, розглядаються особливості тестової форми оцінки знань і наведено зразок білету для іспиту, що проводиться у тестовій формі з тестами I, II і III рівнів, які охоплюють всі розділи “Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної”, що вивчаються у I семестрі, та список рекомендованої літератури.



4. Навчальний варіант завдань для самостійної роботи та рекомендації по її виконанню

Варіант №31

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 7x - 4y + 2z = -7; \\ 3x - 4y + 5z = 3; \\ 2x + 3y - 2z = -3. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Довести, що чотири точки лежать в одній площині:

$A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$.

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 - 8x - y^2 - 4y + 3 = 0$ перпендикулярно до прямої $x + 3y + 5 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину: $A_1(2; -1; 2)$, $A_2(1; 2; -1)$, $A_3(3; 2; 1)$, $A_4(-4; 2; 5)$.

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{7x^3 + x^2 + 1}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^{3x + 2}$;

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

а) $y = x^2 \cdot e^{\operatorname{tg}(x^2 + 1)} + \frac{x^2 + \ln x}{x^4 + 1}$; б) $y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3$;



в) $y = \ln \operatorname{arctg}(x^6 + 8)$; г) $y = (1 + x^8)^{\operatorname{arcsin} x}$;

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (5x^2 + 2) \cdot e^{3x}$; б) $x = 5 \cos^3 t$; $y = 5 \sin^3 t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = \frac{4}{3}x^3 - 4x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{5 + 3x + \operatorname{arctg}^8 x}{1 + x^2} dx$;

б) $\int \frac{2x + 5}{\sqrt{9x^2 + 6x + 2}} dx$;

в) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$;

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли :

а) $\int_{-1}^0 (2x + 3) \cdot e^{-2x} dx$;

б) $\int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx$.

Завдання 8. Застосування визначеного інтеграла

Обчислити площу одного пелюстка рози $r = 6 \sin 3\varphi$.



Розв'язання

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 7x - 4y + 2z = -7; \\ 3x - 4y + 5z = 3; \\ 2x + 3y - 2z = -3. \end{cases}$$

Розв'язання. а) Знаходимо визначник системи:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 7(8 - 15) + 4(-6 - 10) + 2(9 + 8) = -49 - 64 + 34 = -79. \end{aligned}$$

Знаходимо допоміжні визначники:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -7 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= -7(8 - 15) + 4(-6 + 15) + 2(9 - 12) = 49 + 36 - 6 = 79. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 7 & -7 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 7(-6 + 15) + 7(-6 - 10) + 2(-9 - 6) = 63 - 112 - 30 = -79. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 7 & -4 & -7 \\ 3 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} - (-4) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 7(12 - 9) + 4(-9 - 6) - 7(9 + 8) = 21 - 60 - 119 = -158. \end{aligned}$$

Визначник системи відмінний від нуля. Система має єдиний



розв'язок. Невідомі знаходимо за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{79}{-79} = -1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-79}{-79} = 1;$$

$$z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-158}{-79} = 2.$$

Щоб впевнитись, що розв'язок знайдено вірно, робимо перевірку:

$$7(-1) - 4(1) + 2(2) = -7;$$

$$3(-1) - 4(1) + 5(2) = 3;$$

$$2(-1) + 3(1) - 2(2) = -3.$$

Всі рівняння системи — вірні рівності. Відповідь: $(-1; 1; 2)$.

б) Матричний спосіб. Розглянемо матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тоді задана система лінійних алгебраїчних рівнянь та її розв'язок запишуться у матричному вигляді:

$$AX = B; \quad X = A^{-1}B,$$

де A^{-1} обернена матриця до матриці A , яка існує при умові, що визначник матриці відмінний від нуля.

Визначник матриці було знайдено раніше: $\det A = -79$.

Алгебраїчні доповнення:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 16;$$



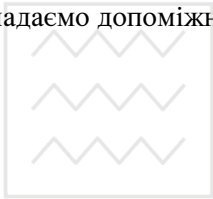
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{21} = - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -18; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -29;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -29;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -16.$$

Складаємо допоміжну матрицю з алгебраїчних доповнень:



$$A_{\theta} = \begin{pmatrix} -7 & 16 & 17 \\ -2 & -18 & -29 \\ -12 & -29 & -16 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо її, одержуємо приєднану матрицю:

$$A_{np} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -12 \\ 16 & -18 & -29 \\ 17 & -29 & -16 \end{pmatrix}.$$

Обернена матриця:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{np} = \frac{1}{-79} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 & -12 \\ 16 & -18 & -29 \\ 17 & -29 & -16 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи:



$$X = A^{-1} B = \frac{1}{\det A} \cdot A_{np} B = \frac{1}{-79} \cdot \begin{pmatrix} -7 & -2 & -12 \\ 16 & -18 & -29 \\ 17 & -29 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{-79} \cdot \begin{pmatrix} -7(-7) - 2(3) - 12(-3) \\ 16(-7) - 18(3) - 29(-3) \\ 17(-7) - 29(3) - 16(-3) \end{pmatrix} = \frac{1}{-79} \cdot \begin{pmatrix} 79 \\ -79 \\ -158 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $(-1; 1; 2)$.

Завдання 2. Елементи векторної алгебри

Довести, що чотири точки лежать в одній площині:

$$A(1; 2; -1), B(0; 1; 5), C(-1; 2; 1), D(2; 1; 3).$$

Розв'язання. Знаходимо координати векторів $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$:

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-1; -1; 6),$$

$$\vec{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (-2; 0; 2),$$

$$\vec{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (1; -1; 4).$$

Знаходимо мішаний добуток цих векторів:

$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} +$$
$$+ 6 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1(0+2) + 1(-8-2) + 6(2-0) = -2 - 10 + 12 = 0.$$

Вектори компланарні, бо їх мішаний добуток дорівнює нулю.
Отже задані чотири точки лежать в одній площині.



Завдання 3. Аналітична геометрія

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 - 8x - y^2 - 4y + 3 = 0$ перпендикулярно до прямої $x + 3y + 5 = 0$.

Розв'язання.

Щоб знайти координати центра гіперболи, зводимо її рівняння шляхом виділення повних квадратів до канонічного виду:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1;$$

$$(x^2 - 2 \cdot 4x + 16) - 16 - (y^2 + 2 \cdot 2y + 4) + 4 + 3 + 0;$$

$$(x-4)^2 - (y+2)^2 = 9;$$

Канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Центр гіперболи знаходиться в точці $M_0(4; -2)$.

Нормальний вектор заданої прямої: $\vec{n} = (A; B) = (1; 3)$.

При знаходженні рівняння прямої, що перпендикулярна даній, приймаємо нормальний вектор \vec{n} за напрямний вектор

$\vec{q} = (l; m) = \vec{n} = (1; 3)$; шуканої прямої. Отже $l=1, m=3$.

Параметричні рівняння прямої:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 + t; \\ y = -2 + 3t; \end{cases} \quad \text{де } (t \in \mathbb{R}).$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) рівняння площини, що проходить через точки ; б) $A_1 A_2 A_3$ рівняння та довжину висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$

$$A_1(2; -1; 2), \quad A_2(1; 2; -1), \quad A_3(3; 2; 1), \quad A_4(-4; 2; 5).$$

Розв'язання. Знаходимо вектори:



$$\overrightarrow{A_1 A_2} = (-1; 3; -3), \quad \overrightarrow{A_1 A_3} = (1; 3; -1).$$

а) рівняння площини, що проходить через точки $A_1 A_2 A_3$
Знаходимо векторний добуток

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = \\ &= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}. \end{aligned}$$

Нормальний вектор площини:

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_3} = 6\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}.$$

Рівняння площини: $A(x - x_{A_1}) + B(y - y_{A_1}) + C(z - z_{A_1}) = 0;$

$$6(x - 2) - 4(y + 1) - 6(z - 2) = 0;$$

$$6x - 12 - 4y - 4 - 6z + 12 = 0; \quad 6x - 4y - 6z - 4 = 0.$$

$$3x - 2y - 3z - 2 = 0.$$

б) Рівняння висоти, проведеної з вершини A_4 до грані :

З $A_1 A_2 A_3$ а напрямний вектор висоти приймаємо нормальний вектор площини $A_1 A_2 A_3$: $\vec{q} = (l; m; n) = \vec{n} = (6; -4; -6);$

$$l = 6; \quad m = -4; \quad n = -6.$$

Параметричні рівняння висоти:

$$\begin{cases} x = x_{A_4} + lt; \\ y = y_{A_4} + mt; \\ z = z_{A_4} + nt. \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 + 6t; \\ y = 2 - 4t; \\ z = 5 - 6t. \end{cases} \quad \text{де } (t \in \mathbb{R}).$$



Довжину висоти знаходимо як відстань від точки $A_4(-4; 2; 5)$ до площини, що проходить через точки $A_1 A_2 A_3$, рівняння якої

$$3x - 2y - 3z - 2 = 0 \text{ було знайдено вище.}$$

Як відомо, відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до площини, заданої загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$ знаходиться за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Отже довжина висоти:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = \frac{33}{\sqrt{22}} \approx 7,04.$$

Завдання 4. Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя :

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{7x^3 + x^2 + 1};$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12};$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^{3x+2};$

Розв'язання.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{7x^3 + x^2 + 1}.$

Розглядається відношення двох многочленів. Має місце не визначеність типу ∞/∞ при $x \rightarrow \infty$.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 5}{7x^3 + x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \cdot \left(3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x^3 \cdot \left(7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{x \cdot \left(7 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = 0.$$

б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12}$.

Розглядається відношення двох многочленів. Має місце невизначеність типу $0/0$ при $x \rightarrow a$. Щоб розкрити таку невизначеність потрібно в чисельнику і знаменнику виділити множник $(x-a)$ і на нього скоротити.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3) \cdot (x+2)}{(x-3) \cdot (x+4)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x+4} = \frac{5}{7}.$$

Зауваження. В деяких варіантах розглядаються границі різниці або відношення функцій, що містять ірраціональності (невизначеності

типу $\infty - \infty$; ∞/∞ ; $0/0$). Щоб знайти границі таких функцій потрібно або звести їх до раціонального виду шляхом заміни змінної, або перевести ірраціональність з чисельника в знаменник чи навпаки.

Приклад. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{20+x} - \sqrt{30-x}}{x^2 - 6x + 5}$.

Має місце невизначеність $0/0$. Щоб її розкрити, переводимо ірраціональність з чисельника в знаменник.



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{20+x} - \sqrt{30-x}}{x^2 - 6x + 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{20+x} - \sqrt{30-x}) \cdot (\sqrt{20+x} + \sqrt{30-x})}{(x^2 - 6x + 5) \cdot (\sqrt{20+x} + \sqrt{30-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{20+x-30+x}{(x^2 - 6x + 5) \cdot (\sqrt{20+x} + \sqrt{30-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2 \cdot (x-5)}{(x-5) \cdot (x-1) \cdot (\sqrt{20+x} + \sqrt{30-x})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2}{(x-1) \cdot (\sqrt{20+x} + \sqrt{30-x})} = \frac{2}{4 \cdot (5+5)} = \frac{1}{20}.\end{aligned}$$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2};$

Має місце невизначеність $0/0$ при $x \rightarrow 0$. Для розв'язання прикладу використаємо формулу $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$ і наслідок з першої визначної границі $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(mx)}{x} = m$.

Отже:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+5} \right)^{3x+2};$

При розв'язуванні цього прикладу буде використано наслідок з другої визначної границі: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{x} \right)^{nx} = (e^m)^n = e^{mn}$.



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+5} \right)^{3x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3/2}{x}}{1 + \frac{5/2}{x}} \right)^{3x+2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3/2}{x}}{1 + \frac{5/2}{x}} \right)^{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{3/2}{x}}{1 + \frac{5/2}{x}} \right)^2 = \left(\frac{e^{3/2}}{e^{5/2}} \right)^3 \cdot 1 = (e^{-1})^3 = e^{-3}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ функцій:

а) $y = x^2 \cdot e^{\operatorname{tg}(x^2+1)} + \frac{x^2 + \ln x}{x^4 + 1}$; б) $y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3$;

в) $y = \ln \operatorname{arctg}(x^6 + 8)$; г) $y = (1 + x^8)^{\operatorname{arcsin} x}$;

Розв'язання.

а) $y = x^2 \cdot e^{\operatorname{tg}(x^2+1)} + \frac{x^2 + \ln x}{x^4 + 1}$;

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot e^{\operatorname{tg}(x^2+1)} + x^2 \cdot e^{\operatorname{tg}(x^2+1)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2+1)} \cdot 2x +$$

$$+ \frac{(2x + 1/x) \cdot (x^4 + 1) - (x^2 + \ln x) \cdot 4x^3}{(x^4 + 1)^2}.$$

б) $y = (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^3$. Похідна складної функції.



$$\frac{dy}{dx} = 3 \cdot (3^{\sin 2x} - \cos^2 2x)^2 \cdot (3^{\sin 2x} \cdot \ln 3 \cdot \cos 2x \cdot 2 - 2 \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot 2).$$

в) $y = \ln \operatorname{arctg}(x^6 + 8)$. Використаємо формулу похідної складної функції:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{arctg}(x^6 + 8)} \cdot \frac{1}{1 + (x^6 + 8)^2} \cdot 6x^5.$$

г) $y = (1 + x^8)^{\arcsin x}$; При розв'язанні цього приклада можна використати логарифмічну похідну або поступити таким чином. Логарифмуємо обидві частини цього виразу.

$$\ln y = \ln(1 + x^8)^{\arcsin x} = \arcsin x \cdot \ln(1 + x^8).$$

Вважаючи y функцією від x знаходимо похідні від обох частин цієї рівності.

$$\frac{1}{y} \cdot y' = (\arcsin x)' \cdot \ln(1 + x^8) + \arcsin x \cdot (\ln(1 + x^8))'.$$

$$y' = y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \ln(1 + x^8) + \frac{\arcsin x \cdot 8x^7}{1 + x^8} \right);$$

$$y' = (1 + x^8)^{\arcsin x} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \ln(1 + x^8) + \frac{\arcsin x \cdot 8x^7}{1 + x^8} \right);$$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (5x^2 + 2) \cdot e^{3x}$; б) $x = 5\cos^3 t$; $y = 5\sin^3 t$.

Розв'язання.



$$а) \quad y = (5x^2 + 2) \cdot e^{3x};$$

$$\frac{dy}{dx} = 10x \cdot e^{3x} + (5x^2 + 2) \cdot 3e^{3x} = (10x + 15x^2 + 6) \cdot e^{3x};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (10 + 30x) \cdot e^{3x} + (10x + 15x^2 + 6) \cdot 3e^{3x}.$$

б) $x = 5 \cos^3 t$; $y = 5 \sin^3 t$. Функція задана параметрично.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{15 \sin^2 t \cdot \cos t}{-15 \cos^2 t \cdot \sin t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{-1}{\cos^2 t}}{-15 \cos^2 t \cdot \sin t} = \frac{1}{15 \cos^4 t \cdot \sin t}.$$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \frac{x^2 - 1}{x}; \quad x_0 = 2.$$

Розв'язання.

Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 відповідно мають вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0); \quad y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

В даному випадку:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}; \quad f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2};$$



$$x_0=2; \quad f(x_0)=f(2)=3/2; \quad f'(x_0)=f'(2)=5/4.$$

Тоді рівняння дотичної: $y = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}(x-2); \quad y = \frac{5}{4}x - 1.$

Рівняння нормалі: $y = \frac{3}{2} - \frac{4}{5}(x-2); \quad y = -\frac{4}{5}x + \frac{31}{10}.$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на

вказаному відрізку. $y = \frac{4}{3}x^3 - 4x; [0; 2].$

Зауваження. При знаходженні найбільшого та найменшого значень диференційованої на відрізку функції потрібно:

1. Знайти першу похідну.
2. Знайти критичні точки першої похідної (нагадаємо, що критичні точки, це точки з області визначення функції, в яких її перша похідна дорівнює нулю або не існує).
3. Відібрати з критичних точок лише ті, які належать відрізку.
4. Обчислити значення функції на кінцях відрізка і у відібраних критичних точках (що є внутрішніми для відрізка).
5. Вибрати з одержаних значень найбільше та найменше.

Знаходимо першу похідну: $y' = \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 4 = 4x^2 - 4.$

Знаходимо критичні точки:

$$y' = 0; \quad 4x^2 - 4 = 0; \quad 4(x^2 - 1) = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1.$$

Відбираємо з критичних точок ті, що належать відрізку $[0; 2]$:

$$x_1 \notin [0; 2], \quad x_2 \in [0; 2].$$

Обчислюємо значення функції на кінцях відрізка і у відібраних критичних точках:



$$y(0) = -4; \quad y(2) = \frac{4}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{32 - 24}{3} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}.$$

$$y(1) = \frac{4}{3} \cdot 1 - 4 \cdot 1 = \frac{4}{3} - 4 = \frac{4 - 12}{3} = \frac{-8}{3} = -2 \frac{2}{3}.$$

Вибираємо з одержаних значень найбільше та найменше:

$$\max_{x \in [0; 2]} y(x) = y(2) = 2 \frac{2}{3}; \quad \min_{x \in [0; 2]} y(x) = y(1) = -2 \frac{2}{3};$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік :

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Зауваження. Завдання №5 виконується за загальною схемою дослідження функції.

1. Знайти область визначення функції; вказати властивості функції: парність, непарність, періодичність.
2. Знайти вертикальні і похилі асимптоти.
3. Знайти першу похідну, критичні точки першої похідної, інтервали зростання спадання та точки екстремуму.
4. Знайти другу похідну, критичні точки другої похідної, інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції.
5. Побудувати графік.

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функція неперервна в області визначення, неперіодична. Область визначення симетрична відносно початку координат, а так як для всіх x з цієї області виконується умова

$$y(-x) = -x + \frac{1}{(-x)} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -y(x),$$

то функція непарна і її графік симетричний відносно початку координат. Нульових значень функція не приймає, бо



$y = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2 + 1}{x}$, а рівняння $\frac{x^2 + 1}{x} = 0$ не має дійсних коренів.

Отже графік заданої функції не перетинає вісь Ox . Він також не перетинає і вісь Oy , бо в області визначення функції $x \neq 0$.

Вертикальні асимптоти.

Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(x + \frac{1}{x} \right) = +\infty;$$

отже пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

Похилі асимптоти.

$x \rightarrow \infty$: Рівняння похилої асимптоти шукаємо у вигляді:



Національний університет

водного господарства

та природокористування

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0.$$

Отже похила асимптота при $x \rightarrow \infty$: $y = 1 \cdot x + 0$, або $y = x$.

Така сама асимптота і при $x \rightarrow -\infty$, бо границі будуть ті самі.

Знаходимо похідну функції $y = x + \frac{1}{x}$. $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

Критичні точки першої похідної:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1. \quad \text{Точка } x = 0, \text{ в якій перша}$$

похідна не існує, не є критичною, бо ця точка не входить в область визначення функції. Отже критичними точками є дві: $x_1 = -1$



$$i \rightarrow x_2 = 1.$$

Будуємо таблицю:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	+	0	-	-	0	+
$y(x)$	\nearrow	-2	\searrow	\searrow	2	\nearrow
		max			min	

Функція зростає при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ і спадає при $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

При $x = -1$ має місце максимум, при $x = +1$ має місце мінімум.

Знаходимо другу похідну: $y'' = \frac{1}{x^4} \cdot 2x = \frac{2}{x^3}$.

Критичних точок не має, бо $x = 0$ не входить в область визначення функції.

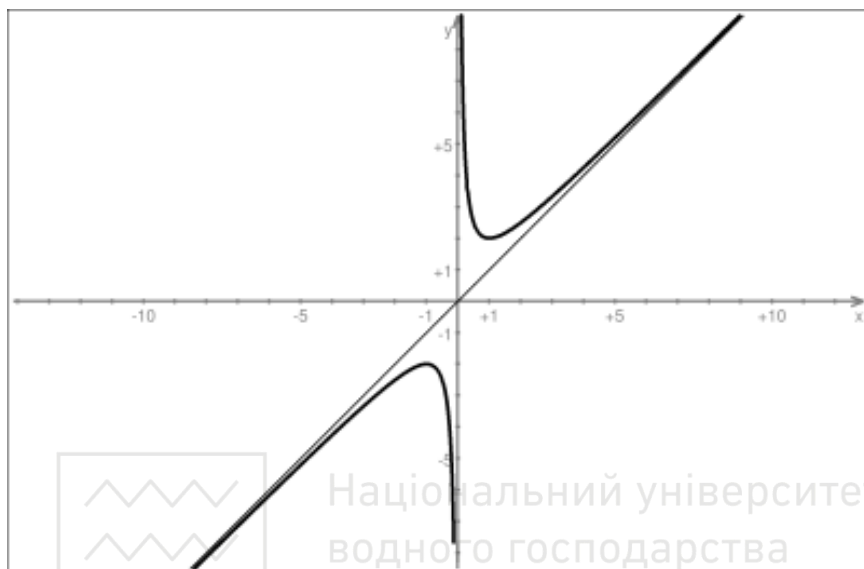
Будуємо таблицю:

x	$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$
$y''(x)$	-	+
$y(x)$	\cap	\cup

На проміжку $(-\infty; 0)$ графік функції опуклий, а на проміжку $(0; +\infty)$ угнутий. Точок перегину не має.

Проведене дослідження дозволяє перейти до побудови графіка функції.

Будуємо графік:



Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{5+3x+\operatorname{arctg}^8 x}{1+x^2} dx;$

б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx;$

в) $\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1} dx;$

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx.$

Розв'язання

а)



$$\begin{aligned} \int \frac{5+3x+\operatorname{arctg}^8 x}{1+x^2} dx &= \int \frac{5}{1+x^2} dx + \int \frac{3x}{1+x^2} dx + \int \frac{\operatorname{arctg}^8 x}{1+x^2} dx = \\ &= 5 \int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{3}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int \frac{\operatorname{arctg}^8 x}{1+x^2} dx = \\ &= 5 \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{9} \operatorname{arctg}^9 x + C. \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{9x^2+6x+2}} = \int \frac{\frac{1}{9}(18x+6)+5-\frac{6}{9}}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx = \\ &= \frac{1}{9} \int \frac{18x+6}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx + \frac{13}{9} \int \frac{d(3x+1)}{\sqrt{(3x+1)^2+1}} = \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9} \ln|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}| + C. \end{aligned}$$

в) Знайти $I(x) = \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^4-x^3-x+1} dx.$

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{x^3(x-1)-(x-1)} dx = \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)(x^3-1)} dx = \\ &= \int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx = \int \left(\frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1} \right) dx. \end{aligned}$$

Знаходимо коефіцієнти розкладу:

$$\begin{aligned} B_1(x-1)(x^2+x+1) + B_2(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2 &= \\ &= 2x^3+4x^2+x+2. \end{aligned}$$

Або

$$B_1(x^3-1) + B_2(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2 = 2x^3+4x^2+x+2.$$

Представимо цей вираз і в такій формі, яка зручна для



використання методу порівнювання коефіцієнтів:

$$(B_1 + M)x^3 + (B_2 - 2M + N)x^2 + (B_2 + M - 2N)x + (-B_1 + B_2 + N) = 2x^3 + 4x^2 + x + 2.$$

Методом часткових значень знаходимо коефіцієнт B_2 :

$$x=1: \quad 3B_2=9; \quad B_2=3.$$

Інші коефіцієнти знаходимо методом порівнювання коефіцієнтів при однакових степенях x многочленів.

$$x^3: \quad B_1 + M = 2.$$

$$x^2: \quad B_2 - 2M + N = 4; \quad -2M + N = 1.$$

$$x: \quad B_2 + M - 2N = 1; \quad M - 2N = -2.$$

З двох останніх рівнянь знаходимо $M=0$ і $N=1$. Тоді з першого рівняння випливає, що $B_1=2$. Отже:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \left(\frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx = \\ &= 2 \int \frac{d(x-1)}{x-1} + 3 \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} + \int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/4)^2} = \\ &= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{3}/4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x+1/2}{\sqrt{3}/4} + C = \\ &= 2 \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

г) Знайти $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx;$

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^4 x} \cos x dx.$$



Робимо підстановку: $\sin x = t$; $\cos x dx = dt$. Одержимо

$$I = \int \frac{1-t^2}{t^4} dt = \int \left(t^{-4} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{-1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C.$$

Щоб повернутись до змінної x , робимо підстановку $t = \sin x$.

$$I = -\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли :

а) $\int_{-1}^0 (2x+3) \cdot e^{-2x} dx$; б) $\int_0^1 x^2 \cdot (\sqrt{x+1})^3 dx$.

Розв'язання

а) Для обчислення цього інтеграла потрібно використати формулу інтегрування частинами.

$$\int_a^b u dv = \left(u \cdot v \right) \Big|_a^b - \int_a^b v du \quad ,$$

де функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ повинні мати неперервні похідні на відрізку $[a; b]$.

Приймаємо: $u = 2x + 3$; $dv = e^{-2x} dx$;

Тоді: $du = u' dx = 2 dx$; $v = \int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}$.

Нагадаємо, що при знаходженні функції $v(x)$ по її диференціалу dv стало C можна вибирати довільно, так як в кінцевий результат при застосуванні формули інтегрування частинами вона не входить. В даному випадку прийнято $C = 0$.



$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (2x+3)e^{-2x} dx &= (2x+3) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_{-1}^0 e^{-2x} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot (2x+3) \cdot e^{-2x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_{-1}^0 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^2 = e^2 - 2. \end{aligned}$$

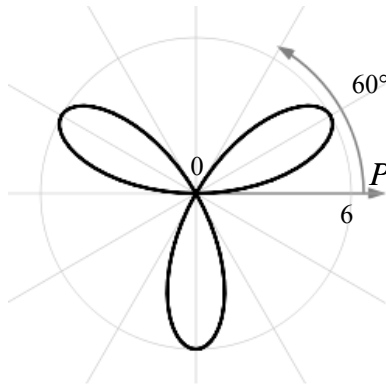
б)

$$\int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \left(\frac{x^4}{4} + \arctg x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4}.$$

4. Знайти площу одного пелюстка рози $r = 6 \sin 3\varphi$.

Знайдемо, як змінюється полярний кут φ , коли радіус-вектор описує площу одного пелюстка. Для цього в рівнянні $r = 6 \sin 3\varphi$ покладемо $r = 0$. Отже $\sin 3\varphi = 0$. Звідки

$$3\varphi = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \varphi = \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \alpha = 0; \quad \beta = \pi/3.$$



Знаходимо площу:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} 36 \sin^2 3\varphi d\varphi = \frac{36}{2 \cdot 2} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= 9 \left(\varphi - \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_0^{\pi/3} = 9 \cdot \frac{\pi}{3} = 3\pi. \end{aligned}$$



5. Варіанти завдань для самостійної роботи (30 варіантів) Варіант №1

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -7; \\ x + 2y - z = 4; \\ 3x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти скалярний добуток векторів та косинус кута між векторами:

$$\vec{a} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $x^2 - 2x + 2y^2 - 8y + 7 = 0$ паралельно прямій $2x + 6y + 3 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(1; 3; 6), \quad A_2(2; 2; 1), \quad A_3(-1; 0; 1), \quad A_4(-4; 6; -3).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{7x^2 + 4x + 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{3x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{5x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-8}{2x+3} \right)^{4x+3}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x^3 \cdot e^{2x} + \frac{x^2 + 5}{\sin x}; \quad \text{б) } y = (5^{\cos 2x} - \operatorname{ctg}^2 3x)^6;$$



в) $y = \ln \arccos \sqrt{x}$; г) $y = (4 + x^9)^{\arctg x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^3 \cdot e^{2x}$; б) $x = t^3 - 3t + 1$; $y = t^2 - 2t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^4 + 3x + 1; \quad x_0 = 1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{6}{x^2 + 3}$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(x^2 + \frac{4}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{8^{\lg x}}{\cos^2 x} \right) dx$; б) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+5x+7}} dx$;

в) $\int \frac{5x+3}{(x-1)(x^2+4)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x + 3 \cos x + 3}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 x \arctg x dx$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 4 - x^2; \quad y = 4 - 2x.$$



Варіант №2

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь .
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x - 3y - z = -4; \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти векторний добуток векторів:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $x^2 + 6x + 4y^2 - 8y + 9 = 0$ перпендикулярно до прямої $5x + 4y + 6 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(-4; 2; 6), \quad A_2(2; -3; 0), \quad A_3(-10; 5; 8), \quad A_4(-5; 2; -4).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x + 1}{3x^2 + 2x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4+x} - 3}{x-5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{3x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{x+4}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x^7 \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\cos 3x}{5x+1}; \quad \text{б) } y = \left(3^{\arcsin 2x} + \ln(1+3x^2) \right)^5;$$



в) $y = \ln(\operatorname{ctg}(x^3 + 3\sqrt{x}));$ г) $y = (x^4 + 9)^{\sin 5x}.$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x \cdot \operatorname{arctg} x;$ б) $x = \cos t; y = \sin^2 t.$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^3 + 1; x_0 = -1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку:

$$y = x^3 - 12x + 5; [-1; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^3 + 16}{x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{5+x+\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2} dx;$

б) $\int \frac{3x+2}{9x^2+6x+2} dx;$

в) $\int \frac{dx}{(x^2-4x)(x+5)};$

г) $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x} dx.$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/2} (3x^2+1) \sin x dx;$

б) $\int_0^5 \frac{3 dx}{\sqrt{3x+1} + \sqrt[4]{(3x+1)}}.$

Завдання 8. Обчислити довжину астроида:

$$x = 2 \cos^3 t; y = 2 \sin^3 t.$$



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь .
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = 0; \\ x - 2y + z = 6; \\ 2x + y + 2z = 2. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса

$$4x^2 - 32x + y^2 - 4y + 5 = 0$$

$$3x + 4y - 8 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(7; 2; 4), \quad A_2(7; -1; -2), \quad A_3(3; 3; 1), \quad A_4(-4; 2; 1).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 7x - 5}{2x^2 + 3x - 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 11x + 15}{3 - 2x - x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 8x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 1}{5x} \right)^{3x - 4}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x^5 \cdot e^{3x} + \frac{x^2}{8 + \sin x}; \quad \text{б) } y = \left(7^{\arctg \sqrt{x}} - \ln^3 x \right)^9;$$



в)

$$y = \sqrt{\cos^2 x + 8};$$

г) $y = (2 + 5x)^{\arcsin 4x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^3 + \sin^2 x$; б) $x = 5 \cos t$; $y = 8 \sin t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

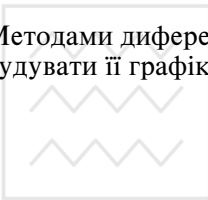
$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 8 - x^2; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 4x; \quad [0; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:



$$y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{2+x+\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx;$

в) $\int \frac{6x^4-6x^3-2x^2+9x+4}{x^3-4x^2+3x} dx;$

г) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \ln(x^2+4) dx;$

б) $\int_1^{64} \frac{2+\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x+2}\sqrt[3]{x}} dx.$

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою:

$$r = 4(1 + \cos \varphi).$$



Варіант №4

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 1; \\ 2x - 3y - z = 3; \\ x + y + 3z = -2. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Довести, що три вектори компланарні:

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}; \quad \vec{c} = 8\vec{i} - 3\vec{j} + 10\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 - 2x - 2y^2 + 8y - 9 = 0$ паралельно прямій $3x + 5y + 9 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(2; 1; 4), \quad A_2(-1; 5; 2), \quad A_3(-7; -3; 2), \quad A_4(-6; -3; 6).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x + 4}{x^3 + 2x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 5x - 22}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 7x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{2/x}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \sin x \cdot \sqrt[5]{x} + \frac{x}{9 + \cos x}; \quad \text{б) } y = (4^{\operatorname{tg} 5x} + \arccos 2x)^6;$$

$$\text{в) } y = \ln \arcsin \sqrt{x}; \quad \text{г) } y = (\arctg^4 x + 1)^{1/x}.$$



2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x^3 + 1) \cdot \cos 2x$; б) $x = e^{2t}$; $y = \cos t$.

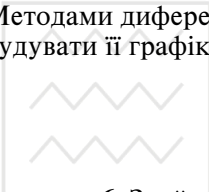
3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 5x^2 + 1; \quad x_0 = -1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^3 - 27x + 1; \quad [-1; 4].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік :



$$y = \frac{x}{(x+1)^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1 + \sqrt{x + \ln^5 x}}{x} dx$;

б) $\int \frac{3x-1}{2x^2-2x+1} dx$;

в) $\int \frac{dx}{x(x-1)(x+2)}$;

г) $\int \cos^4 2x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/4} x^2 \cos 2x dx$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}$.

Завдання 8. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

$$y = 2x - x^2; \quad y = x.$$



Варіант №5

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1; \\ 2x - 3y - 2z = -3; \\ 2x + y + z = 2. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри .

Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія .

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 + 6x - 4y^2 + 8y + 1 = 0 \text{ паралельно прямій } 3x + 2y + 1 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину. в) висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(-1; -5; 2), \quad A_2(-6; 0; -3), \quad A_3(3; 6; -3), \quad A_4(-10; 6; 7).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x - 7}{3 - 2x - 5x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x - x^2 - 6}{x^2 - 2x - 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{8x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{3x+2};$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x^2 \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2 + 1}; \quad \text{б) } y = (6^{\cos 5x} - \operatorname{tg}^3 x)^4;$$



в)

$$y = \arcsin \ln x;$$

г) $y = (5x + 2)^{\arctg x}.$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x + 1) \cdot e^{3x};$ б) $x = 6 \cos t; y = 3 \sin t.$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 5 + \sin x; x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x; [0; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік :

$$y = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{x^3 + x}{\sqrt{1 - x^4}} dx;$

б) $\int \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 + 3x - 1}} dx;$

в) $\int \frac{(x - 1) dx}{(x + 2)^2 \cdot (x + 1)};$

г) $\int \frac{dx}{4 + 5 \cos x}.$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{1/2} \arcsin 2x dx;$ б) $\int_0^4 \frac{(x - 1) dx}{\sqrt[3]{(3x - 4)^2} - \sqrt[3]{3x - 4} + 1}.$

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом:

$$x = 3 \cos t; y = 2 \sin t.$$



Варіант №6

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 6z = 17; \\ 3x + 4y - z = -3; \\ x - 5y + 2z = 10. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Обчислити роботу сили $\vec{F} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки від положення $A(-1; 2; 1)$ в положення $B(2; 2; 3)$.

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 - 4x - y^2 + 6y - 42 = 0$ перпендикулярно до прямої $2x + 5y + 1 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(0; -1; -1), \quad A_2(-2; 3; 5), \quad A_3(1; -5; -9), \quad A_4(-1; -6; 3).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 + 2x + 9x^4}{3x^4 - 11x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{4x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 3} \right)^{2x + 3};$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = e^x \cdot \arcsin x + \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 9}; \quad \text{б) } y = (5^{\cos 2x} - \operatorname{tg}^2 x)^6;$$



в)

$$y = \ln \sin(x^4 + 2);$$

г)

$$y = (2x + \arctg x)^{x^3}.$$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = e^{3x} \cdot \sin 2x$; б) $x = 4 \cos t$; $y = 5 \sin^2 t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x \cdot e^x; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 3}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\sqrt{x} + 2^x + \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x + 1}} \right) dx$; б) $\int \frac{x+3}{2x^2+6x+17} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 - 3x - 8}{(x-3)(x^2+1)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^4 x \cdot \sin^2 x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/6} x \sin 3x dx$; б) $\int_1^{27} \frac{(x+1) dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x+1}}$.

Завдання 8. Знайти довжину дуги кардіоїди:

$$r = 4(1 - \cos \varphi).$$



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь .
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 6; \\ 2x - y + z = 5; \\ 3x + y + 2z = 7. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти векторний добуток векторів:

$$\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 + 8x - 2y^2 + 4y + 1 = 0$ перпендикулярно до прямої $3x + 4y + 2 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(5; 2; 0), \quad A_2(2; 5; 0), \quad A_3(1; 2; 4), \quad A_4(-1; 1; 1).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 9x + 4}{3x^2 - 2x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\operatorname{tg} 5x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3)(\ln(x - 4) - \ln x).$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної .

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\ln x}{x^6 + 5}; \quad \text{б) } y = (5^{\operatorname{ctg} 4x} - \cos^7 2x)^8;$$



в) $y = \ln(\arccos \sqrt{x})$; г) $y = (1 + \arctg x)^{\sin x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x \cdot \sin 3x$; б) $x = \cos t$; $y = t^2 + 1$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$y = 2 + x + 2x^2$; $x_0 = 2$.

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x$; $[0; 3]$.

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$y = \ln(1 + x^2)$.

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1 + \tg x}} \right) dx$; б) $\int \frac{3x + 5}{\sqrt{-x^2 - 10x - 9}} dx$;

в) $\int \frac{6x^2 - 7x + 7}{x^3 - 3x + 2} dx$; г) $\int \tg^4 x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^2 \arctg \frac{x}{2} dx$; б) $\int_0^3 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$.

Завдання 8. Знайти силу тиску рідини на вертикальну стінку у формі півкруга, діаметр якого 4 м і знаходиться на поверхні рідини.



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом .

$$\begin{cases} x + 4y - 2z = 8; \\ -x + 5y + 3z = -1; \\ 4x - 6y - z = -4. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти площу трикутника, з вершинами у точках:

$$A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр кола

$$2x^2 - 4x + 2y^2 - 8y + 1 = 0 \text{ паралельно прямій } 3x + 2y + 1 = 0.$$

0.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(2; -1; -2), \quad A_2(1; 2; 1), \quad A_3(5; 0; -6), \quad A_4(-10; 9; -7).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - 6x^2}{3x^2 + x + 5};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 5x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+4} \right)^{5-2x}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \sqrt{x} \cdot \sin^4 x + \arccos^5 x; \quad \text{б) } y = (3^{\arctg x} + \operatorname{ctg}^6 x)^9;$$



в) $y = \frac{e^{3x} + 5x^2 + 2}{\operatorname{tg} x + \ln^3 x};$

г) $y = (9 + \arcsin x)^{\sqrt{x}}.$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^2 + x + \cos^2 x;$ б) $x = \cos^3 t; y = \sin^3 t.$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = (x^2 + 3) \cdot e^x; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^3 - 9x^2; \quad [-1; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 4}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\ln^2 x + \sin(\ln x) + 7}{x} dx;$

б) $\int \frac{2x - 3}{9x^2 - 6x + 5} dx;$

в) $\int \frac{x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 9x + 15}{x^3 + x^2 - 5x + 3} dx;$

г) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx;$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/4} \frac{xdx}{\cos^2 x};$

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+8x} + \sqrt[4]{1+8x}}.$

Завдання 8. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди:

$$x = 2(t - \sin t); \quad y = 2(1 - \cos t).$$



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера ; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 3x + y + 2z = -3; \\ 4x - y - 3z = 5; \\ 3x - 3y - 2z = 1. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри .

Довести, що чотири точки не лежать в одній площині:

$$A(1; 3; 0), B(1; 2; 6), C(0; 3; 2), D(3; 2; 4).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 - 8x - y^2 - 16y + 3 = 0 \text{ перпендикулярно до прямої } x + 4y + 5 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(2; 0; -4), \quad A_2(-1; 7; 1), \quad A_3(4; -8; -4), \quad A_4(1; -4; -6).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 7x + 5}{9x^3 + x^2 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^2 + 3x - 18};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 2}{3x + 5} \right)^{2x + 4}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = e^{\sin x} \cdot \ln x;$$

$$\text{б) } y = (5^{\cos 2x} - \sin^8 2x)^5;$$



в) $y = \frac{2x^3 + \operatorname{tg} x}{x^6 + 9}$;

г) $y = (1 + x^8)^{\operatorname{arctg} x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (5x^2 + 2) \cdot e^{3x}$; б) $x = t^2 + 1$; $y = e^{t^2}$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^2 - 1; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 7x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік :

$$y = \frac{x^2}{x-1}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x} dx$;

б) $\int \frac{5x-1}{2x^2+2x+5} dx$;

в) $\int \frac{5x^2+21x+40}{x^2(x+8)} dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 x \cdot \ln x dx$;

б) $\int_1^{16} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} dx$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією:

$$r = 3 \cos 2\varphi.$$



Варіант №10

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = 4; \\ 3x - 2y + z = 11; \\ 3x - 4y - z = 7. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти об'єм піраміди, з вершинами у точках:

$$A(3; -2; 6), B(1; 3; 2), C(-1; -1; 4), D(4; 3; 5).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину параболу $x^2 - 6x - y + 15 = 0$ паралельно прямій $8x + 5y + 9 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(14; 4; 5), \quad A_2(-5; -3; 2), \quad A_3(-2; -6; -3), \quad A_4(-2; 2; -1).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 + 5x + 7}{4x^2 + 7x + 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 5x - 8}{7x^2 + x - 8};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{9x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x + 5} \right)^{3x + 7}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \sin 3x \cdot \sqrt{x^4 + 1}; \quad \text{б) } y = (7^{\arccos 2x} - \operatorname{ctg}^4 5x)^8;$$



в) $y = \frac{\operatorname{tg}(2x+3)}{x^6+2}$; г) $y = (x^5+1)^{\operatorname{arctg}6x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = \sin^2 x + \ln x$; б) $x = \operatorname{tg} t$; $y = \cos^2 t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \operatorname{tg} 4x; \quad x_0 = \frac{\pi}{4}.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$; $[-2; 1]$.

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = e^{-x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\operatorname{arctg}^5 x + x^3}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$;

в) $\int \frac{3x^2-2x+4}{(x-1)(x^2+4)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x - 1}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^0 (2x+3) \cdot e^{-2x} dx$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(x^2+9) \cdot \sqrt{x^2+9}}$.

Завдання 8. Знайти силу тиску рідини на вертикальну трикутну пластинку, що має основу 6 м і висоту 4 м, якщо її вершина знаходиться на поверхні рідини.



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь .
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - 2y + z = -6; \\ 4x + 3y - z = 3; \\ x - 4y + 2z = -9. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти скалярний добуток векторів та косинус кута між векторами:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія .

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $x^2 - 2x + 2y^2 - 8y - 1 = 0$ паралельно прямій $6x + 3y + 5 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1 (1; 2; 0), \quad A_2 (3; 0; -3), \quad A_3 (5; 2; 6), \quad A_4 (8; 4; -9).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x + 1}{3x^2 + 7x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{5x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{8x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5} \right)^{x-1}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot e^{\operatorname{ctg} x} + \ln(\cos x); \quad \text{б) } y = (4^{\sin 5x} - \operatorname{tg}^2 2x)^8;$$



в) $y = \frac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{x^6 + 1};$ г) $y = (9 + x^5)^{\operatorname{arccos} x}.$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^2 \cdot \ln x;$ б) $x = 2 - \sin t; y = 1 - \cos t.$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$y = x^5 + 2x + 3; x_0 = 1.$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5; [-1; 3].$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2}.$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{9 + \cos^2 x}};$

б) $\int \frac{3x + 10}{\sqrt{x^2 + 10x + 16}} dx;$

в) $\int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} dx;$

г) $\int \cos x \cdot \cos 11x dx.$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x \cdot \cos x}{\sin^3 x} dx;$

б) $\int_{-1}^2 \frac{\sqrt{x+2}}{1 + \sqrt{x+2}} dx;$

Завдання 8. Обчислити площу одного пелюстка 4-пелюсткової рози:

$r = 2 \sin 2\varphi.$



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера ; б) матричним способом .

$$\begin{cases} x+3y+z=-2; \\ x+4y+2z=-3; \\ -x+5y+3z=-10. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти векторний добуток векторів:

$$\vec{a} = \vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{b} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $x^2 + 6x + 4y^2 - 8y - 3 = 0$ перпендикулярно до прямої $x + 4y + 3 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(2; -1; 2), \quad A_2(1; 2; -1), \quad A_3(3; 2; 1), \quad A_4(-4; 2; 5).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x^2 + x - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{5x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{x+1}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної .

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot \operatorname{tg} 5x + \frac{8x}{x^4 + 5}; \quad \text{б) } y = \left(6^{\arcsin 2x} + \ln(1+x^3) \right)^5;$$



в) $y = \ln(\sin(x^4 + 7x))$; г) $y = (x^4 + 2)^{\cos 2x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = e^x \cdot \sin x$; б) $x = 2t - t^3$; $y = 2t^2$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^4 + 1; \quad x_0 = 1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^3 - 12x^2 + 21x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік :

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{4x + \arcsin^9 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

б) $\int \frac{x dx}{3-2x-x^2}$;

в) $\int \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+9)} dx$;

г) $\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$;

б) $\int_0^7 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 3x^2 + 1; \quad y = 3x + 7.$$



Варіант №13

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4z = 2; \\ -x + 2y + 3z = -1; \\ x - 2y - 5z = 3. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $4x^2 - 16x + y^2 - 8y - 6 = 0$ перпендикулярно до прямої $5x + y + 8 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(1; 1; 2), \quad A_2(-1; 1; 3), \quad A_3(2; -2; 4), \quad A_4(-1; 0; -2).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 6x - 5}{5x^2 - x - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 12x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x} \right)^{2x-3}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{4+x^3}{9+\sin x}; \quad \text{б) } y = \left(8^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} - \ln^4 x \right)^6;$$



в) $y = \sqrt[7]{\cos^4 x + 9}$; г) $y = (5x^2 + 2x + 1)^{\arcsin 2x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (2x + 3) \cdot \cos x$; б) $x = \sin t$; $y = t^2 + 2$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 9 - x^4; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}; \quad [-5; -1].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^3 - 8}{2x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (3 \operatorname{ctg}^2 x + 6 \sin x \cdot \cos^5 x) dx$;

б) $\int \frac{3 - 4x}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} dx$;

в) $\int \frac{3x + 6}{(x - 1) \cdot (x^2 + 4)} dx$;

г) $\int \sin^3 x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 (2x + 3) \cdot e^x dx$;

б) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}-1}{2+\sqrt{x-1}} dx$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 2x - x^2; \quad y = 2^x; \quad x = 0; \quad x = 2.$$



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом .

$$\begin{cases} 3x + 5z = -1; \\ -4y - 2z = 2; \\ x - 3y + z = 2. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Довести, що три вектори компланарні:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 - 2x - 4y^2 + 8y - 9 = 0 \quad \text{паралельно прямій} \quad 4x + 3y + 6 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(2; 3; 1), \quad A_2(4; 1; 2), \quad A_3(6; 3; 7), \quad A_4(7; 5; -3).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x + 4}{x^3 - x + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 8x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{3/x}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = e^x \cdot \sqrt{x + \frac{\ln x}{x+5}};$$

$$\text{б) } y = (6^{\arcsin 2x} + \operatorname{arctg} 3x)^9;$$



в)

$$y = \ln \operatorname{tg}(6x + 9);$$

г) $y = (\sin^4 x + 1)^{1/x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x \cdot \cos(2x + 5)$; б) $x = t^2 + 5$; $y = 2t + 3$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 5x^3 + 2; \quad x_0 = 1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^4 - 2x^2 + 3; \quad [-2; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{4x}{4 + x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (3 \operatorname{tg}^2 x + \sqrt[5]{x} + \sin x \cdot \cos^2 x) dx$;

б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$;

в) $\int \frac{x^2+1}{x \cdot (x-1)^2} dx$;

г) $\int \sin^3 x \cdot \cos^3 x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/6} x \cdot \cos 3x dx$;

б) $\int_{-3}^1 \frac{dx}{4 + \sqrt{x+3}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, однією аркою циклоїди $x = 6(t - \sin t)$; $y = 6(1 - \cos t)$ і віссю Ox .



Варіант №15

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2; \\ 2x + y + 3z = 3; \\ 2x - y - 2z = 8. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 + 4x - 4y^2 + 16y - 1 = 0 \quad \text{паралельно прямій} \quad x + 5y + 1 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(1; 1; -1), \quad A_2(2; 3; 1), \quad A_3(3; 2; 1), \quad A_4(5; 9; -8).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 7}{3 - x - 4x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5x - x^2 - 4}{x^2 - 2x - 8};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{6x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+4} \right)^{2x+1}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \ln^4 x \cdot \cos 2x;$$

$$\text{б) } y = (4^{\operatorname{ctg} 5x} - \sin^6 x)^7;$$



в) $y = \frac{\operatorname{arctg}^2 x + 5}{x^3 + 1};$ г) $y = (5x + 8)^{\operatorname{ctg} x}.$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x + 1) \cdot e^{3x};$ б) $x = 6 \cos t; \quad y = 3 \sin t.$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 2x + \cos x; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3; \quad [-1; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = x \cdot e^{x-1};$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(x^2 + 5^x + \frac{\cos x}{2 + 3 \sin x} \right) dx;$ б) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}};$

в) $\int \frac{x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 7x + 2}{x^3 + 3x^2 - 9x + 5} dx;$ г) $\int \sin 9x \cdot \sin 5x dx.$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли :

а) $\int_0^1 x \cdot 3^x dx;$ б) $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{x + 5 + 2}}.$

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox синусоїди $y = \sin x$ на відрізку $[0; \pi].$



Варіант №16

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8; \\ 2x - 3y - z = 3; \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри .

Обчислити роботу сили $\vec{F} = \vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки від положення $A(-3; 2; 0)$ в положення $B(2; 5; 3)$.

Завдання 3. Аналітична геометрія .

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 - 4x - y^2 + 4y - 42 = 0$ перпендикулярно до прямої $7x + 3y + 1 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(4; 4; 10), \quad A_2(4; 10; 2), \quad A_3(2; 8; 4), \quad A_4(9; 6; 4).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + x - 8x^4}{2x^4 + 9x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 2}{5x + 4} \right)^{2x + 9}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = e^x \cdot \arcsin x + \frac{\sqrt{x}}{x + 2}; \quad \text{б) } y = (5^{\sin 2x} - \arctg^2 x)^4;$$



в) $y = \ln \operatorname{ctg}(x^6 + 2)$; г) $y = (x + \operatorname{tg} x)^{x^3}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^4 \cdot e^{3x}$; б) $x = t^2 + 4t + 1$; $y = t^2 - 2$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x \cdot e^{2x}; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2; \quad [-1; 1].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = e^{\frac{1}{2}(1-x^2)};$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (9^{\cos x} \cdot \sin x + x^5 \cdot \sqrt{1+x^6}) dx$;

б) $\int \frac{(2-x) dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$;

в) $\int \frac{x^4 + 6x^3 + 13x^2 + 14x + 4}{x^3 + 4x^2 + 5x + 2} dx$;

г) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$;

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 \arcsin x dx$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}$.

Завдання 8. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями: $y = 2x - x^2$; $y = 0$.



Варіант №17

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2; \\ 2x - 3y - 2z = -14; \\ 2x + y + z = -3. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти векторний добуток векторів:

$$\vec{a} = 5\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 + 8x - 2y^2 + 8y + 1 = 0$ перпендикулярно до прямої $2x + 5y + 2 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(1; 8; 2), \quad A_2(5; 2; 6), \quad A_3(5; 7; 4), \quad A_4(4; 10; 9).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 7x + 4}{4x^2 - x + 2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^2 - 5x - 1}{4x^2 - 7x + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (5x + 2)(\ln(x + 4) - \ln x).$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \operatorname{ctg} 2x \cdot \sqrt{x} + \frac{x}{\sin x}; \quad \text{б) } y = (5^{\operatorname{tg} 4x} - \cos^6 2x)^4;$$



в) $y = \ln(\arctg 2x)$; г) $y = (2 + \arcsin x)^{\sqrt{x}}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x \cdot \sin(3x + 9)$; б) $x = \cos^2 t$; $y = \sin t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 5 + x + x^2; \quad x_0 = 3.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку $y = x^3 - 3x + 1$; $[0; 3]$.

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = x \cdot e^{2-x}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{2+x+\arctg x}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{4x+5}{x^2+2x-8} dx$;

в) $\int \frac{6x^2+26x+26}{x^3+6x^2+11x+6} dx$; г) $\int \frac{dx}{8-2\sin x+5\cos x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/2} x \cdot \sin x \cdot \cos x dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+\sqrt{x}}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою:

$$r = 8(1 - \cos \varphi).$$



Варіант №18

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x - 2y + z = 7; \\ 2x + y - 3z = 4; \\ 3x + 2y - 2z = 8. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти площу трикутника, з вершинами у точках:

$$A(3; 3; 3), B(4; 5; 6), C(6; 5; 4).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр кола $2x^2 - 4x + 2y^2 - 8y + 1 = 0$ паралельно прямій $5x + 2y + 1 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(7; 2; 2), A_2(5; 7; 7), A_3(5; 3; 1), A_4(2; 3; 7).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - 5x^2}{3x^2 + 4x + 3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x^4 - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 7x \cdot \operatorname{ctg} 3x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+5} \right)^{6-x}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ функцій:

$$\text{а) } y = 3x \cdot \operatorname{tg}^5 x + \ln \arcsin 4x; \quad \text{б) } y = (5^{\arccos x} + \operatorname{ctg}^6 x)^4;$$



в) $y = \frac{e^{5x} + 1}{\sin x + 8}$;

г) $y = (9 + \arctg x)^x$;

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x^2 + 3) \cdot \sin 4x$; б) $x = 9 \sin t$; $y = 6 \cos t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = (x^4 + 5) \cdot e^x; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку



$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(7^{3x} + \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}} \right) dx$;

б) $\int \frac{5x - 1}{4x^2 + 4x + 2} dx$;

в) $\int \frac{7x^2 + 11x + 6}{x^3 + 2x^2 + 2x} dx$;

г) $\int \frac{dx}{7 \cos^2 x + 2 \sin^2 x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 (x + 5) \cdot e^{2x} dx$;

б) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою:

$$r = 4 \sqrt{\cos 2\varphi}.$$



Варіант №19

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5; \\ 2x + 3y + z = 6; \\ 2x + y + 3z = -2. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Довести, що чотири точки лежать в одній площині:

$$A(3; 4; 1), B(2; 3; 7), C(1; 4; 3), D(4; 3; 5).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 - 8x - y^2 - 16y + 3 = 0 \text{ перпендикулярно до прямої } x + 4y + 5 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(0; -4; 6), A_2(-5; 6; 7), A_3(1; 3; 4), A_4(-2; 1; 6).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 3x + 5}{5x^3 + 7x^2 + 1};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 10x + 3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 3}{4x + 5} \right)^{8x + 5}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot e^{\cos x} + \ln(\operatorname{arctg} x); \quad \text{б) } y = (5^{\sin 4x} - \operatorname{tg}^2 6x)^5;$$



в) $y = \frac{x^2 + \operatorname{ctg} x}{x^8 + 1}$; г) $y = (1 + x^6)^{\arccos x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x^4 + 2) \cdot \sin 2x$; б) $x = 3t^2 + 1$; $y = \sin t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^5 - 1; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 3; \quad [0; 4].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^3}{2 - x}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{1 + \sin x + \operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx$;

б) $\int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx$;

в) $\int \frac{2x - 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 x^2 \cdot \operatorname{arctg} x dx$;

б) $\int_4^9 \frac{2 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx$.

Завдання 8. Знайти довжину частини півкубічної параболи

$y^2 = x^3$, що знаходиться між точками $A(1; 1)$ і $B(4; 8)$.



Варіант №20

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5; \\ 2x - y + 2z = -1; \\ 4x + y + 4z = 7. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти об'єм піраміди, з вершинами у точках:

$$A(4; 1; 3), B(5; 5; 4), C(2; -1; 1), D(3; 2; -1).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину параболу $2x^2 - 6x - y - 15 = 0$ паралельно прямій $2x + 5y + 5 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(0; 1; 3), \quad A_2(-4; 7; 8), \quad A_3(6; -2; 4), \quad A_4(-1; 5; 4).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталія:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x + 8}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{5x^2 - x - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 2x}{6x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{4x + 3} \right)^{2x+7}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \operatorname{tg} x \cdot \sqrt{x} + \frac{e^x}{x^4 + 9}; \quad \text{б) } y = (8^{\arcsin \sqrt{x}} - \cos^2 5x)^6;$$



в) $y = \ln \operatorname{ctg}(x^2 + 1) + 3^x$; г) $y = (x^4 + \operatorname{arctg} x)^{\sin 5x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^2 \cdot e^{2x}$; б) $x = \cos 4t$; $y = 2 \sin 4t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \operatorname{tg} 8x; \quad x_0 = \frac{\pi}{8}.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x; \quad [0; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \frac{\cos x}{8 + \cos^2 x} \right) dx$; б) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+6x+92}} dx$;

в) $\int \frac{x+5}{(x+2) \cdot (x^2+1)} dx$; г) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{e^x} dx$; б) $\int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$.

Завдання 8. Знайти довжину кардіоїди: $r = 6(1 + \cos \varphi)$.



Варіант №21

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} -x + 4y + 2z = 7; \\ 3x + y + z = -8; \\ -3x + 5y + 6z = 14. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти скалярний добуток векторів та косинус кута між векторами:

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $x^2 - 2x + 2y^2 - 10y - 7 = 0$ паралельно прямій $3x + 6y + 5 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(-1; 6; 4), \quad A_2(3; -1; 1), \quad A_3(5; 7; 3), \quad A_4(1; 7; 0).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталя:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 3x + 4}{2x^2 + x + 9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{2x};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-3}{6x+5} \right)^{12x-1}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot e^{\arctg x} + \ln(\cos x); \quad \text{б) } y = (5^{\lg 2x} - \text{ctg}^2 4x)^5;$$



в) $y = \frac{x^2 + \sin 3x}{x^5 + 1}$; г) $y = (1 + x^2 + x^6)^{\arctg x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (2x + 3) \cdot e^{5x}$; б) $x = 5 \sin 6t$; $y = 2 \cos^2 6t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^3 + 5x; \quad x_0 = 1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^3 - 15x^2; \quad [-1; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\ln^5 x + \cos(\ln x) + \sqrt{x}}{x} dx$; б) $\int \frac{x+1}{\sqrt{12+6x-x^2}} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + 3x + 4}{(x-1)(x^2+9)} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/2} (x^2 + 3x + 1) \cdot \cos x dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{3 + \sqrt[3]{x-1}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \frac{x^2}{2}; \quad y = 4 - x.$$



Варіант №22

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} -3x + 5y + 2z = -5; \\ 4x - 7y + 5z = 22; \\ 2x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти векторний добуток векторів:

$$\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $x^2 + 8x + 4y^2 - 16y - 9 = 0$ перпендикулярно до прямої $x + 3y + 9 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(3; 3; 9), \quad A_2(6; 9; 1), \quad A_3(1; 7; 3), \quad A_4(8; 5; 8).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x + 1}{5x^2 + x - 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{7+x} - 4}{x-9};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{4x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{2x+1}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot \operatorname{tg} 2x + \frac{5x+9}{x^2+1}; \quad \text{б) } y = \left(5^{\operatorname{arctg} 2x} + \ln(1+7x^2) \right)^8;$$



в) $y = \ln(\cos(x^6 + 5x));$ г) $y = (x^8 + 4)^{\arcsin \sqrt{x}}.$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x \cdot \cos 5x;$ б) $x = \sin t; y = t^2 + 8.$

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^4 + \frac{1}{x}; x_0 = 1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x; [-2; 2].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{2^{\arctg x} + x + 5}{1 + x^2} dx;$

б) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 10}} dx;$

в) $\int \frac{2x + 7}{x(x + 1)(x + 3)} dx;$

г) $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}.$

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/2} e^x \cdot \cos x dx;$

б) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$3x^2 = 25y; 5y^2 = 9x.$$



Варіант №23

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -2; \\ x + 2y - z = 9; \\ -3x + 3y + 2z = 1. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{k}; \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса $4x^2 - 32x + y^2 - 4y + 5 = 0$ перпендикулярно до прямої $7x + 3y - 9 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(9; 5; 5), \quad A_2(-3; 7; 1), \quad A_3(5; 7; 8), \quad A_4(6; 9; 2).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 2x - 9}{3x^2 - x - 4};$

б) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 5x - 25}{10 - 3x - x^2};$

в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1-x)}{x^2 - 1};$

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x} \right)^{4x-3}.$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

а) $y = x^3 \cdot \sin x + \frac{1+x^4}{8 + \cos 4x};$ б) $y = (2^{\arcsin \sqrt{x}} - \ln^6 x)^7;$

в) $y = \sqrt[7]{\operatorname{tg}^2 x + 9};$

г) $y = (1 + 4x)^{\operatorname{arctg} 2x};$



2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = x^4 + x^2 + \operatorname{tg} x$; б) $x = \sin^3 t$; $y = \cos^3 t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 2 + \sqrt{x+7}; x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = x^3 - 6x + 4; [0; 4].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^3 + 16}{x^2}$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{2 + x + \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

б) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$;

в) $\int \frac{4x^2+x-8}{(x-2)(x^2+1)} dx$;

г) $\int \sin^4 x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/2} (5x^2 + 3x + 1) \cdot \sin x dx$;

б) $\int_9^{16} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x-1}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \frac{x^2}{9}; y = \frac{x}{3} + 2.$$



Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 3x + y + z = -5; \\ -x + 4y + 2z = 6; \\ -3x + 5y + 6z = 11. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Довести, що три вектори компланарні:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 - 12x - 2y^2 + 8y - 9 = 0 \text{ паралельно прямій } 3x + 2y + 5 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(3; 5; 4), \quad A_2(8; 7; 4), \quad A_3(5; 10; 4), \quad A_4(4; 7; 8).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x + 4}{2x^3 - x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9x + 18};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x}{\operatorname{tg} 3x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{2/x}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ функцій:

$$\text{а) } y = x^3 \cdot \operatorname{ctg} x + \frac{2^x}{9 + x^6}; \quad \text{б) } y = (8^{\arcsin 2x} + \operatorname{arctg} 3x)^5;$$



в) $y = \ln \cos(5x + 7)$; г) $y = (x^2 + 1)^{1/\sin x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (3x^2 + 4)e^{2x}$; б) $x = t^3 + 2$; $y = e^{t^3}$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 7x^2 + 4; \quad x_0 = -1.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = \frac{x^3}{3} + 4x^2 + 7x; \quad [-2; 1].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{36x}{(x-2)^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{16-x^2} - \frac{1}{\cos^2 x \cdot \sqrt{1+\operatorname{tg} x}} \right) dx$; б) $\int \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+3x+8}} dx$;

в) $\int \frac{5x^2+11x+2}{x \cdot (x+1)^2} dx$; г) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_{-1}^2 3x^2 \cdot \ln(x+2) dx$; б) $\int_3^8 \frac{x dx}{5+\sqrt{1+x}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 2 - x; \quad y^2 = 4x - 4.$$



Варіант №25

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 5x - 7y + 4z = -4; \\ 3x - 4y + 5z = 3; \\ 2x + 3y - 2z = -3. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}; \quad \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 + 16x - 4y^2 + 8y + 1 = 0 \quad \text{паралельно прямій} \quad 4x + 3y + 6 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(1; 2; 3), \quad A_2(0; -1; 2), \quad A_3(3; 2; -1), \quad A_4(2; 5; -1).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{25x^2 + x - 3}{7 - x - 5x^2}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{8x - x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{4x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x - 1}{9x + 4} \right)^{3x+1}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot \operatorname{tg}^4 x + \ln \sin x; \quad \text{б) } y = (4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} - \cos^2 3x)^5;$$



в) $y = \frac{\arcsin 2x}{x^4 + 1}$; г) $y = (5x + 2)^{\operatorname{ctg} x}$;

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = \cos^2 x + \operatorname{arctg} x$; б) $x = \operatorname{tg} 3t$; $y = \cos^2 3t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^3 + \sin x; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^5 - 80x; \quad [0; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} \right) dx$; б) $\int \frac{1-2x}{4x^2+4x+17} dx$;

в) $\int \frac{9x^2-21x+15}{(x+1)(x-2)^2} dx$; г) $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cdot \cos x dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x = y^2 - 2y; \quad x + y = 0.$$



Варіант №26

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 3; \\ x + y + 2z = 9; \\ x + 2y + z = 8. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Обчислити роботу сили $\vec{F} = 5\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ при переміщенні матеріальної точки від положення $A(-2; 5; 0)$ в положення $B(2; 4; 3)$.

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 - 6x - y^2 + 4y - 42 = 0$ перпендикулярно до прямої $5x + 2y + 1 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(3; 5; 4), \quad A_2(5; 8; 3), \quad A_3(1; 9; 9), \quad A_4(6; 4; 8).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + x - 5x^4}{2x^4 - 3x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^3}}{x^3};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{8x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x - 1}{7x + 4} \right)^{14x + 2}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = e^x \cdot \arcsin x + \frac{\sqrt{x}}{\sin 5x}; \quad \text{б) } y = (6^{\operatorname{ctg} 2x} - \operatorname{arctg}^2 x)^3;$$



в) $y = \ln \cos(x^2 + 3)$; г) $y = (5 + \operatorname{tg}^5 x)^{x^3}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x^3 + 1) \cdot \ln x$; б) $x = 4 - \sin t$; $y = 2 - \cos t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x \cdot e^{4x}; \quad x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 10x; \quad [0; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt{\arctg x + 5x + 8}}{1 + x^2} dx$;

б) $\int \frac{2x + 6}{x^2 + 10x - 11} dx$;

в) $\int \frac{2x^2 + 3x + 3}{x(x+1)(x-3)} dx$;

г) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли :

а) $\int_0^{\pi/2} x^3 \cdot \sin x dx$;

б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+4}} dx$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \frac{6}{x}; \quad y = 7 - x.$$



Варіант №27

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - 3y - 2z = -14; \\ x + 2y + z = 2; \\ 2x + y + z = -3. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти векторний добуток векторів:

$$\vec{a} = 4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}.$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи $x^2 + 8x - 2y^2 + 4y + 1 = 0$ перпендикулярно до прямої $9x + 3y + 2 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(0; 7; 1), \quad A_2(4; 1; 5), \quad A_3(4; 6; 3), \quad A_4(3; 9; 8).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопіталю:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 8x + 4}{3x^2 - x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x^2 - 7x + 6};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x}{\operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} (3x + 5)(\ln(x - 4) - \ln x).$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \operatorname{ctg}(x^4 + 8) \cdot \sqrt{\ln x}; \quad \text{б) } y = (2^{\operatorname{tg} 2x} - \sin^3 4x)^6;$$



в) $y = \ln(\arcsin x) + \frac{x}{2 + \cos x}$; г) $y = (\arctg 2x)^{\sqrt{x}}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = e^{2x} \cdot \sin 3x$; б) $x = t^5 + 1$; $y = 2t + 3$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 2x + 3x^2; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^5 - 20x^2 + 1; \quad [1; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік :

$$y = \frac{32}{x^2 + 12}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x} + \ln^4 x + \sin(\ln x)}{x} dx$; б) $\int \frac{5x - 1}{x^2 + 10x - 24} dx$;

в) $\int \frac{4x^2 + 17x - 5}{(x-1)(x+3)^2} dx$; г) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_1^2 (2x+3) \ln x dx$; б) $\int_0^{16} \frac{dx}{1 + \sqrt{x+9}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = \frac{x^2}{4}; \quad y = \frac{3x}{2}.$$



Варіант №28

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 11; \\ 2x + y - 3z = 4; \\ 3x + 2y - 2z = 8. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти площу трикутника, з вершинами у точках:

$$A(4; 5; 3), B(5; 6; 7), C(7; 6; 5).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр кола $2x^2 - 8x + 2y^2 - 4y - 1 = 0$ паралельно прямій $5x + y + 1 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(7; 5; 3), \quad A_2(9; 4; 4), \quad A_3(4; 5; 7), \quad A_4(7; 9; 6).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 4x^2}{2x^2 + x + 9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 - 1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \sin 4x \cdot \operatorname{ctg} 7x;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right)^{9-x}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x^6 \cdot e^x + \frac{4x}{x^3 + 8}; \quad \text{б) } y = (5^{\operatorname{arctg} 4x} + \sin^6 x)^8;$$



в) $y = \ln \cos(3x + 5)$; г) $y = (8 + x^5)^{\arcsin x}$;

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (4x^2 + 2x + 5) \cdot \sin x$; б) $x = \cos t$; $y = t^3 + 6t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = (x^2 + 2) \cdot e^x; x_0 = 0.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відрізку

$$y = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}; [1; 6].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{12x}{x^2 + 3}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{\sin 2x}{1 + \sin 2x} \right) dx$; б) $\int \frac{2x - 3}{\sqrt{8 - x^2 + 2x}} dx$;

в) $\int \frac{11x^2 - 33x + 10}{x(x-1)(x-5)} dx$; г) $\int \frac{dx}{9 \cos x - 5 \sin x + 10}$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^1 (x^2 + 12x + 5) \cdot e^x dx$; б) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$;

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = 6 - x^2; y = 6 - 3x.$$



Варіант №29

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 3; \\ 2x + 3y + z = 6; \\ 2x + y + 3z = -2. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Довести, що чотири точки не лежать в одній площині:

$$A(3; 5; 2), B(3; 4; 8), C(2; 5; 4), D(5; 4; 6).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через центр гіперболи

$$x^2 - 8x - y^2 - 4y - 3 = 0 \text{ перпендикулярно до прямої } x + 6y + 8 = 0.$$

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(6; 6; 2), \quad A_2(5; 4; 7), \quad A_3(2; 4; 7), \quad A_4(7; 3; 0).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{15x^2 + 2x + 1}{5x^3 + x^2 + 9};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x - 24};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 10x}{x^2};$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 7}{2x + 3} \right)^{4x + 3}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = x \cdot e^{\sin x} + \ln(\arctg x); \quad \text{б) } y = (3^{\lg 2x} - \arccos^2 2x)^4;$$



в)

$$y = \frac{x^4 + \ln^3 x}{x^2 + 1};$$

г)

$$y = (1 + x^4)^{\arcsin 4x}.$$

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (4x + 1) \cdot e^x$; б) $x = t^4 + 8$; $y = \sin t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції

$y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = x^2 + 6; \quad x_0 = 2.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x + 2\sqrt{x+1}; \quad [0; 4].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = \frac{x^3 - 4}{4x^2}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int (3^{\sin x} \cdot \cos x + \sqrt[5]{x}) dx$;

б) $\int \frac{2x-9}{15-x^2-2x} dx$;

в) $\int \frac{9x+1}{(x-1)(x^2+9)} dx$;

г) $\int \sin 6x \cdot \sin 16x dx$.

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^4 \arctg \frac{x}{4} dx$;

б) $\int_0^1 \frac{x \cdot \sqrt[6]{x} dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y = x^2 - 3x; \quad y = 4 - 3x.$$



Варіант №30

Завдання 1. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими двома способами:

а) за формулами Крамера; б) матричним способом.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = -1; \\ x + y + 2z = 5; \\ 4x + y + 4z = 7. \end{cases}$$

Завдання 2. Елементи векторної алгебри.

Знайти об'єм піраміди, з вершинами у точках:

$$A(5; 0; 8), B(3; 5; 4), C(1; 1; 6), D(6; 5; 7).$$

Завдання 3. Аналітична геометрія.

1) Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину параболу $2x^2 - 4x - y + 15 = 0$ паралельно прямій $3x + 2y + 5 = 0$.

2) Дано координати вершин піраміди: а) написати рівняння площини, що проходить через точки A_1, A_2, A_3 ; б) написати рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$ і знайти її довжину.

$$A_1(9; 5; 5), \quad A_2(-3; 7; 1), \quad A_3(5; 7; 8), \quad A_4(6; 9; 2).$$

Завдання 4. Вступ до математичного аналізу.

Знайти границі функцій, не користуючись правилом Лопітала:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 9x + 7}{4x^2 + 5x + 4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^2 + x - 6}{3x^2 + 2x - 5};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 4x}{3x^2}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 2}{4x + 3} \right)^{6x + 2}.$$

Завдання 5. Диференціальне числення функції однієї змінної.

1) Знайти похідні функцій:

$$\text{а) } y = \operatorname{arctg} x \cdot \sqrt{x} + \frac{x}{\operatorname{tg} x + 6}; \quad \text{б) } y = (8^{\sin 2x} - \cos^2 4x)^5;$$



в) $y = \ln \operatorname{ctg}(x^4 + 8)$; г) $y = (x^6 + 1)^{\arcsin 3x}$.

2) Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функцій:

а) $y = (x^2 + 5) \cdot e^{2x}$; б) $x = 8 \sin t$; $y = 4 \cos t$.

3) Записати рівняння дотичної прямої і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \operatorname{tg} 9x; \quad x_0 = \frac{\pi}{9}.$$

4) Визначити найбільше та найменше значення функції на відріжку

$$y = x^3 - 6x^2; \quad [-1; 3].$$

5) Методами диференціального числення дослідити функцію і побудувати її графік:

$$y = e^{\frac{1}{8}(4-x^2)}.$$

Завдання 6. Знайти невизначені інтеграли:

а) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x+4}} + \frac{\sin x}{15 + \sin^2 x} \right) dx$; б) $\int \frac{4x-9}{\sqrt{29+x^2+4x}} dx$;

в) $\int \frac{3x^2 + 11x + 15}{(x+2)(x^2+1)} dx$; г) $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx$;

Завдання 7. Обчислити визначені інтеграли:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (5x^2 + 1) \cdot \sin x dx$; б) $\int_0^1 x^2 \cdot (\sqrt{x} + 1)^3 dx$.

Завдання 8. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$x = \frac{y^2 + 4}{4}; \quad x = \frac{y^2 + 64}{16}.$$



6. Теоретичні питання і завдання для підготовки до складання іспиту за білетами

6.1. Теоретичні питання до іспиту

Розділ I. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії

1. Визначники II і III порядків. Основні властивості. Мінори і алгебраїчні доповнення. Розклад визначників III порядку по елементам стовпчика або рядка.
2. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Формули Крамера.
3. Однорідна система двох лінійних рівнянь з трьома невідомими.
4. Однорідна система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими.
5. Матриці і дії над ними.
6. Обернена матриця. Розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь матричним методом. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.
7. Вектори. Лінійні операції над векторами і їх властивості.
8. Скалярний добуток векторів; його властивості, обчислення і застосування.
9. Векторний добуток векторів; його властивості, обчислення і застосування.
10. Мішаний добуток векторів; його властивості, обчислення і застосування.
11. Найпростіші задачі аналітичної геометрії (відстань між двома точками, поділ відрізка у даному відношенні, паралельний перенос системи координат).
12. Пряма лінія на площині. Нормальний вектор прямої. Векторне і загальне рівняння прямої. Рівняння прямої у відрізках і з кутовим коефіцієнтом.
13. Пряма лінія на площині. Напряений вектор прямої. Векторне рівняння прямої. Канонічне і параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві точки.
14. Кут між двома прямими. Умови паралельності і перпендикулярності. Відстань від точки до прямої. Перетин двох прямих.
15. Площина у просторі. Нормальний вектор площини. Векторне і загальне рівняння площини. Рівняння площини у відрізках. Рівняння площини, що проходить через три задані точки.
16. Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності двох площин. Відстань від точки до площини. Знаходження координат точки перетину трьох площин.



17. Пряма лінія у просторі. Напрямний вектор прямої. Векторне, канонічні і параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Загальне рівняння прямої.
18. Кут між прямими у просторі. Умови паралельності і перпендикулярності.
19. Пряма і площина. Перетин прямої і площини. Кут між прямою і площиною. Умови паралельності і перпендикулярності прямої і площини.
20. Еліпс і коло. Канонічні і параметричні рівняння. Ексцентриситет еліпса. Рівняння еліпса і кола із зміщеним центром.
21. Гіпербола. Канонічне рівняння. Ексцентриситет. Асимптоти.
22. Парабола. Канонічні рівняння.
23. Циліндричні поверхні. Еліпсоїд. Сфера.
24. Конус II-го порядку. Гіперболоїди. Параболоїди.

Розділ II. Вступ до математичного аналізу

1. Функція однієї змінної. Область визначення і множина значень. Способи завдання. Характеристики поведінки. Складна і обернена функція.
2. Основні елементарні функції, їх властивості і графіки.
3. Границя функції. Границя числової послідовності. Односторонні границі. Необхідна і достатні умови існування границі функції.
4. Нескінченно малі функції і їх властивості. Розклад функції, що має границю на сталу і нескінченно малу.
5. Основні теореми про границі.
6. Нескінченно великі функції і їх зв'язок з нескінченно малими. Порівняння нескінченно малих функцій. Порівняння нескінченно великих функцій.
7. Перша і друга визначні границі.
8. Неперервність функції в точці. Властивості функцій, неперервних в точці.
9. Одностороння неперервність. Точки розриву і їх класифікація.
10. Неперервність функції на відрізку. Властивості функцій, неперервних на відрізку.

Розділ III. Диференціальне числення функцій однієї змінної

1. Приріст функції. Означення похідної. Геометричний зміст похідної. Рівняння дотичної і нормалі. Механічний зміст похідної.
2. Поняття диференційованості функції. Різницєва форма умови неперервності. Залежність між неперервністю і диференційованістю функції. Основні правила диференціювання.



3. Похідна складної функції. Таблиця похідних.
4. Похідні тригонометричних і гіперболічних функцій.
5. Похідна логарифмічної функції.
6. Похідна оберненої функції. Похідна показникової і обернених тригонометричних функцій.
7. Логарифмічна похідна. Похідна степеневі і показникової функцій. Похідна степенево-показникової функції.
8. Похідна неявної функції і функції, заданої параметрично.
9. Диференціал функції, його геометричний зміст. Інваріантність форми першого диференціала. Застосування диференціала до наближених обчислень.
10. Похідні вищих порядків (від функцій, заданих явно, неявно, параметрично).
11. Теорема Ролля, Лагранжа, Коші.
12. Правило Лопітала і його застосування до розкриття невизначеностей $(0/0; \infty/\infty; 0 \times \infty; \infty - \infty; 0^0; \infty^0; 1^\infty$.
13. Умови зростання і спадання функції в точці і на інтервалі.
14. Точки екстремуму. Необхідна і достатні умови екстремуму.
15. Знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відріжку функції.
16. Дослідження функцій на опуклість і угнутість. Точки перегину.
17. Асимптоти графіка функції.
18. Дослідження функцій і побудова графіка.

Розділ IV. Невизначений інтеграл

1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Означення невизначеного інтеграла, теорема існування і геометричний зміст.
2. Основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця основних невизначених інтегралів. Приклади інтегралів від елементарних функцій, які не можуть бути вираженими через елементарні функції.
4. Безпосереднє інтегрування. Інтегрування підведенням під знак диференціала.
5. Інтегрування підстановкою (заміною змінної).
6. Інтегрування частинами.
7. Інтегрування деяких функцій, що містять квадратний тричлен.
8. Найпростіші раціональні дроби і їх інтегрування.
9. Розклад правильних раціональних дробів на найпростіші. Методи знаходження коефіцієнтів розкладу.
10. Інтегрування деяких тригонометричних виразів. Інтеграл виду:



$$\int R(\sin x; \cos x) dx.$$

11. Інтеграли виду: $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де $m, n \in \mathbb{Z}$.

12. Інтеграли виду: $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \sin nx dx$,
 $\int \sin mx \sin nx dx$.

13. Інтегрування деяких ірраціональних виразів. Інтеграл виду:

$$\int R\left(x; x^{\frac{m}{n}}; \dots; x^{\frac{r}{s}}\right) dx, \quad \int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx.$$

Інтегрування деяких ірраціональних функцій за допомогою тригонометричних підстановок.

14. Комплексні числа. Дії над ними. Розв'язування квадратного рівняння в комплексній області. Поняття про тригонометричну і показникову форму комплексного числа. Формули Ейлера.

Розділ V. Визначений інтеграл

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Означення визначеного інтеграла. Теорема існування. Геометричний і фізичний зміст.

2. Основні властивості визначеного інтеграла.

3. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування, теорема про похідну такого інтеграла.

4. Формула Ньютона-Лейбніца (вивести).

5. Заміна змінної у визначеному інтегралі.

6. Формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

7. Невласні інтеграли I роду.

8. Невласні інтеграли II роду.

9. Обчислення довжини дуги кривої в декартових і полярних координатах.

10. Обчислення площі криволінійної трапеції в декартових координатах і при параметрично заданій границі.

11. Обчислення площі плоскої фігури в полярних координатах.

12. Обчислення об'ємів тіл.

13. Обчислення площі поверхні тіла обертання.

14. Деякі фізичні застосування визначеного інтеграла (обчислення шляху, роботи, сили тиску).



6.2. Зразок екзаменаційного білета

Екзаменаційний білет № 31 (зразок)

1. Векторний добуток векторів; його властивості, обчислення і застосування.
2. Формула Ньютона-Лейбніца.
3. Дослідити функцію на екстремум:

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$$

4. Знайти невизначений інтеграл:

$$\int \frac{7+6x+e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$$

До екзаменаційного білета за I семестр, в якому розглядаються розділи: "Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної" входять чотири питання: два теоретичних і два практичних. Кожне питання оцінюється у 10 балів. Всього на іспиті можна одержати 40 балів максимально. Студенти денної форми навчання можуть здавати іспит при умові, що здано всі змістові модулі і загальна сума основних балів не менше 36.

6.3. Тренінгові та тестові завдання для підготовки до іспиту

Розділ I. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії

1. Знайти визначник:
$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}.$$

- а) -14; б) 14; в) 5.



2. Знайти визначник:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 11 & 2 & 10 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

а) 132; б) 112; в) 144.

3. Знайти всі розв'язки системи рівнянь:

$$\begin{cases} x-3y+z=0; \\ 2x-9y+3z=0. \end{cases}$$

а) $x=2t; y=3t; z=0, t \in \mathbb{R}$. б) $x=-2t; y=5t; z=4t, t \in \mathbb{R}$.

в) $x=0; y=-t; z=-3t, t \in \mathbb{R}$.

4. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 2x-4y+9z=28; \\ 7x+3y-6z=-1; \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$$

а) $x=-1; y=-5; z=1$. б) $x=2; y=3; z=4$. в) $x=-4; y=0; z=4$.

5. Знайти добуток матриць $A \cdot B$, якщо

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

а) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ -11 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Дано вектори: $\vec{a}=4\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$; $\vec{b}=6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

Знайти вектор $\vec{c}=2\vec{a}-3\vec{b}$.



а) $\vec{c} = 10\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$; б) $\vec{c} = -10\vec{i} + 5\vec{j} - 14\vec{k}$.

7. Дано $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$; $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Знайти скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

а) 10; б) 14; в) 12.

8. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ на вісь вектора $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

а) 3; б) 2; в) 4.

9. Знайти косинус кута, утвореного векторами

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} \quad \text{і} \quad \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}.$$

а) 8/21; б) 5/21; в) -4/17.

10. Визначити, при якому значенні p вектори $\vec{a} = p\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - p\vec{k}$ перпендикулярні.

а) -2; б) -6; в) 8.

11. Дано вектори: $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$. Обчислити векторний добуток цих векторів.

а) $\vec{a} \times \vec{b} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}$; б) $\vec{a} \times \vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

12. Знайти площу трикутника, з вершинами в точках: $A(1; 2; 0)$, $B(5; 2; 6)$, $C(3; 0; -3)$.

а) 14; б) 18; в) 28.

13. Знайти мішаний добуток векторів:

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

а) 4; б) 8; в) 16.



14. Встановити, чи вектори компланарні:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \vec{c} = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}.$$

а) так; б) ні; в) встановити неможливо.

15. Довести, що чотири точки $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ лежать в одній площині.

16. Знайти об'єм трикутної піраміди, з вершинами у точках: $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$, $D(3; 7; 2)$.

а) 10; б) 20; в) 30.

17. Дано три послідовні вершини паралелограма: $A(11; 4)$, $B(-1; -1)$, $C(5; 7)$. Визначити координати четвертої вершини D .

а) $D(15; 18)$; б) $D(17; 12)$; в) $D(14; 16)$.

18. Дано координати вершин трикутника: $A(-1; -1)$, $B(0; -6)$, $C(-10; -2)$. Знайти довжину медіани, проведеної з вершини A .

а) 5; б) 10; в) 15.

19. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A(1, 2)$, $B(3, 5)$.

а) $4x + 5y - 14 = 0$; б) $3x - 2y + 1 = 0$.

20. Скласти рівняння прямої, що проходять через точку $M(-2; -5)$ паралельно прямій $3x + 4y + 2 = 0$.

а) $3x + 4y + 26 = 0$; б) $x + y - 7 = 0$.

21. Скласти рівняння прямої, що проходять через точку $M(-2; -5)$ перпендикулярно прямій $3x + 4y + 2 = 0$.

а) $3x - 4y + 5 = 0$; б) $4x - 3y - 7 = 0$.

22. Дано координати вершин трикутника: $A(2; 2)$, $B(-2; -8)$, $C(-6; -2)$. Знайти рівняння медіани трикутника, проведеної з вершини C . Як знайти рівняння бісектриси внутрішнього кута при вершині C ? Як знайти рівняння висоти, проведеної з вершини C на сторону AB ? Як визначити їх довжини?



а) $x + 6y + 18 = 0$; б) $7x - 6y - 2 = 0$.

23. Знайти проекцію точки $P(-8; 12)$ на пряму, що проходить через точки $A(2; -3), B(-5; 1)$.

а) $P(-12; 5)$; б) $P(6; 8)$; в) $P(-3; 4)$.

23. Встановити, що три площини

$$3x + 2y + 2z - 1 = 0; \quad 2x - 3y - z - 3 = 0; \quad x + y + 3z + 2 = 0$$

мають одну спільну точку P і знайти її координати.

а) $P(1; -1; 0)$; б) $P(1; 0; -1)$; в) $P(-3; 4; 2)$.

24. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 3; 5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

а) $4x + 3y + 2z - 27 = 0$; б) $x + y + 2z - 15 = 0$.

25. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(2; 3; 0), M_2(2; 0; -5), M_3(0; 3; -5)$.

а) $5x + 3y + z - 19 = 0$; б) $15x + 10y - 6z - 60 = 0$.

26. Знайти відстань від точки $M_0(1; 2; 0)$ до площини $3x - 6y + 2z + 2 = 0$.

а) 1; б) 2; в) 3.

27. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку

$$M_0(5; 3; 4), \text{ паралельно вектору: } \vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 8\vec{k};$$

а) $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-8}$; б) $\frac{x-2}{5} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+8}{4}$.



28. Знайти гострий кут між прямими: $\frac{x+8}{1} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$ і

$$\frac{x+5}{1} = \frac{y-9}{1} = \frac{z+3}{\sqrt{2}}.$$

а) 30° ; б) 60° ; в) 90° .

29. Знайти точку P перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ і

площини $2x+3y-z-4=0$.

а) $P(1;0;-1)$; б) $P(8/7; 3/14; -15/14)$; в) $P(1;2;4)$.

30. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку

$M_0(1; 2; 3)$ перпендикулярно до площини

$$2x+5y+3z+2=0.$$

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{3}$; б) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-3}{3}$.

31. Скласти рівняння кола, центр якого співпадає з точкою

$C(1;1)$, а пряма $5x+12y+22=0$ є дотичною до кола.

а) $(x-1)^2+(y-1)^2=9$; б) $(x+1)^2+(y+1)^2=4$.

32. Скласти рівняння прямої, що проходить через центр еліпса

$$4x^2 - 32x + y^2 - 4y + 5 = 0$$
 перпендикулярно до прямої

$$2x + 4y - 9 = 0.$$

а) $2x-y+8=0$; б) $2x-y-6=0$.

33. Скласти рівняння прямої, що проходить через вершину

параболи $x^2-4x-y+5=0$ паралельно прямій $4x+5y+7=0$.

а) $4x+5y-13=0$; б) $4x+5y-9=0$.



34. Знайти координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0.$$

- а) $C(1;2;3)$, $R=3$; б) $C(3;2;1)$, $R=5$.

Розділ III. Вступ до математичного аналізу

1. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{\frac{(x-1)(x-4)}{x-8}}$.

2. Знайти границю: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}$ без використання і з використанням правила Лопітала.

- а) $3/5$; б) $5/3$; в) 1 .

3. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 + 3x + 1})$.

- а) $1/2$; б) $-1/2$; в) 0 .

4. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x}$.

- а) 1 ; б) $1/2$; в) 0 .

5. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

- а) $3/5$; б) $5/3$; в) 1 .

6. Знайти границю $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\text{tg } x}$.

- а) 1 ; б) ∞ ; в) 0 .



7. Знайти границю функції

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{3x+9}.$$

а) e^{-5} ; б) e^5 ; в) e^{-3} .

8. Довести, що при $x \rightarrow 0$ функції $\sin^2 x$ і $1 - \cos x$ є нескінченно малими функціями однакового порядку.

9. Функція задана різними аналітичними виразами:



$$y(x) = \begin{cases} x+1, & \text{при } x < -1; \\ 1-x^2, & \text{при } -1 \leq x \leq 1; \\ 5-x, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти точки розриву функції та односторонні границі в них і зробити малюнок.

10. Дослідити на неперервність функцію $f(x) = \frac{1}{4+3^{\frac{1}{x}}}$.

В точці $x = 0$ має місце:

а) усувний розрив; б) розрив I роду; в) розрив II роду.

Розділ III. Диференціальне числення функцій однієї змінної

1. Знайти похідну функції $y = x^2 \cdot \sin 3x + \frac{(x^4+1)}{\arctg x}$.

2. Знайти похідну функції $y = (5^{\arctg \sqrt{x}} + \sin^3 4x)^8$.



3. Знайти похідну функції $y = (x^4 + 2)^{\lg x}$.

4. Знайти y'' , якщо $y = x^3 + \operatorname{arctg} x + \sin^2 x + x \cdot e^x$.

5. Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{d^2y}{dx^2}$ функції, заданої параметрично $x = \operatorname{arctg} 3t$; $y = \ln(1 + 9t^2)$.

6. Знайти диференціал функції: $y = (8^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + \sin^5 x)^4$;

7. Знайти наближене значення функції $y = \sqrt[4]{15,8}$.

а) 1,9938; б) 1,8234; в) 1,7546.

8. В яких точках дотичні до кривої $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - x + 1$, паралельні прямій $y = 2x - 1$?

а) $M_1(-1; 2/3); M_2(3; -2)$; б) $M_1(1; 2); M_2(3; 1)$.

9. Знайти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

а) $y - 5 = 0; x + 2 = 0$. б) $x + y - 4 = 0; x - y - 2 = 0$.

10. Дослідити на екстремум функцію:

$$y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$$

а) $y_{\min} = y(1) = -1$; б) $y_{\min} = y(-1) = 15$.

11. Знайти найбільше та найменше значення функції

$$y = x^4 - 2x^2 + 3 \text{ на відрізку } [-3; 2].$$



а) $y_{\text{найм}} = 2$; $y_{\text{найб}} = 66$; б) $y_{\text{найм}} = 4$; $y_{\text{найб}} = 68$.

12. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x^2 + 5x - 6}{x}$.

Вертикальні: а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) не існує.

Похили: а) $y = x + 5$; б) $y = x$; в) $y = x - 6$.

13. Знайти інтервали опуклості, угнутості та точки перегину графіка функції $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

Точки перегину: а) $P(0;1)$; б) $P(1;2)$; в) $P(-1;-6)$.

14. Дослідити функцію $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ та побудувати її графік.

Розділ IV. Невизначений інтеграл [2-5]

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{3+2x+e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$.

2. $\int \frac{8+3x+\arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

3. $\int \frac{4+6x}{49+x^2} dx$.

4. $\int \frac{x^3+x^7}{1+x^8} dx$.

5. $\int \frac{\cos 4x}{\cos^2 2x \cdot \sin^2 2x} dx$.

6. $\int \cos^2 6x dx$.

7. $\int \cos^3 x dx$.

8. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.



9. $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx.$

10. $\int \ln^3 x \, dx.$

11. $\int (3x+5)\cos x \, dx.$

12. $\int x \cdot e^{4x} \, dx.$

13. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}.$

14. $\int \frac{6x+7}{x^2+6x+10} \, dx.$

15. $\int \frac{(x+5)dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$

16. $\int \frac{x-6}{(x-1)(x^2+1)} \, dx.$

17. $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}.$

18. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}.$

19. $\int \cos(15x) \cdot \cos(3x) \, dx.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+9}+\sqrt{(x+9)^3}}.$

Розділ V. Визначений інтеграл

1. $\int_0^1 \left(x^5 + \frac{1}{1+x^2} \right) dx.$ 2. $\int_0^1 \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx.$ 3. $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x \, dx.$

4. $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx.$ 5. $\int_0^{728} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{(x+1)^2}}.$

6. Обчислити невластний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$$

7. Обчислити невластний інтеграл або довести його розбіжність:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

8. Обчислити довжину частини півкубичної параболи



$y^2 = x^3$, що знаходиться між точками $A(0;0)$, $B(4;8)$.

9. Обчислити довжину кардіоїди $r = 2(1 - \cos \varphi)$.

10. Обчислити довжину першого витка гвинтової лінії

$$x = 4 \cos t; \quad y = 4 \sin t; \quad z = 3t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

11. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ і

$$y = -x - 2.$$

12. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою

$$r = 2(1 - \cos \varphi).$$

13. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої параболою $y = 4 - x^2$ на відрізку $[-2;2]$.

14. Знайти силу тиску рідини на вертикальну трикутну пластину, що має основу 4 м, висоту 3 м, якщо її вершина знаходиться на поверхні рідини.

15. Знайти силу тиску рідини на вертикальну трикутну пластину, що має основу 4 м, висоту 3 м, якщо її основа знаходиться на поверхні рідини.

16. Знайти силу тиску рідини на вертикальну стінку, що має форму півкруга, діаметр якого 4 м і знаходиться на поверхні рідини.

6.4. Додаткові тестові завдання до іспиту

1. Знайти інтеграл $\int e^{-x^2} dx$.

Відп. а) $e^{-x^2} + C$; б) $xe^{-x^2} + x + C$; в) не може бути виражений через елементарні функції.

2. Чи можливо знайти інтеграл $\int (\sqrt{x} + \sin x + \frac{1}{\sqrt{-x}} + 3) dx$?

Відповідь обґрунтуйте.



Відп. а) так ; б) ні.

3. Чи можна знаходити інтеграли, які беруться підведенням під знак диференціала, методом підстановки? Наведіть приклад.

Відп. а) так ; б) ні.

4. При інтегруванні частинами по формулі $\int u dv = uv - \int v du$ інтеграла виду $\int (x^3 + 4x + 5) \sin x dx$ скільки разів потрібно застосовувати цю формулу?

Відп. а) 1 ; б) 2; в) 3.

5. Що кожний раз потрібно приймати за u в передньому прикладі?

Відп. а) многочлен ; б) тригонометричну функцію; в) байдуже яку.

6. Чи правильно розкладено раціональний дріб на найпростіші:

$$\frac{x^5 + 3x^2 + 1}{(x-1)(x-5)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} + \frac{Cx+D}{x^2+4} ?$$

Відп. а) так ; б) ні.

7. Знайдіть величину інтеграла $I = \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$, використавши його геометричний зміст.

Відп. а) π ; б) 2π ; в) $\pi/2$.

8. Оцінити інтеграл $I = \int_0^3 \sqrt{16+x^2} dx$.

Відп. а) $12 \leq I \leq 15$; б) $0 \leq I \leq 3$; в) $4 \leq I \leq 5$.

9. Встановити, який з двох інтегралів $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$ чи

$I_2 = \int_0^1 \sqrt{x} dx$ більший.



Відп. а) $I_1 > I_2$; б) $I_1 = I_2$; в) $I_1 < I_2$.

10. Знайти помилку, допущену при обчисленні інтеграла:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -(1 - (-1)) = -2.$$

(інтеграл від додатної функції виявився від'ємним!).

11. Скільки пелюсток має крива $r = 2 \sin 5\varphi$?

Відп. а) 10; б) 2; в) 5.

12. Скільки пелюсток має крива $r = 2 \sin 4\varphi$?

Відп. а) 2; б) 4; в) 8.

13. Дано рівняння кривих:

$$x = 2 \cos^3 t; \quad y = 2 \sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (1) \quad y^2 = x^3. \quad (2)$$

$$r = 2(1 + \cos \varphi); \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3) \quad r = 2\varphi. \quad (4)$$

$$x = 2(t - \sin t); \quad y = 2(1 - \cos t). \quad (5)$$

$$r = 2\sqrt{\cos 2\varphi}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (6) \quad r = 2 \sin(3\varphi); \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (7)$$

Вкажіть рівняння рози. Скільки вона має пелюсток ? Намалуйте її. Запишіть формулу для знаходження площі одного пелюстка.

Вкажіть рівняння півкубічної параболи. Намалуйте її. Запишіть формулу для знаходження її довжини від точки $A(0;0)$ до точки $B(1;1)$.

Вкажіть рівняння астроїди. Намалуйте її. Запишіть формули для обчислення довжини астроїди і площі фігури, обмеженої астроїдою.

Вкажіть рівняння кардіоїди. Намалуйте її. Запишіть формули для обчислення довжини кардіоїди і площі фігури, обмеженої кардіоїдою.

Вкажіть рівняння спіралі Архімеда. Намалуйте її. Запишіть



формулу для обчислення довжини першого витка цієї спіралі.

Вкажіть рівняння циклоїди. Намалюйте її. Запишіть формулу для обчислення площі фігури, обмеженої віссю Ox і однією аркою циклоїди. Запишіть формулу для обчислення площі поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди.

Вкажіть рівняння лемніскати. Намалюйте її. Запишіть формулу для обчислення площі фігури, обмеженої лемніскатою.

7. Особливості тестової форми складання модулів

Теоретичні тестові завдання суттєво відрізняються від традиційної форми контролю знань. Наприклад, в тестовому варіанті не можна задати питання: “Векторний добуток векторів; його властивості, обчислення і застосування” або “Основні властивості невизначеного інтеграла” тому що відповідь на такі питання потребує досить тривалого часу і займає багато місця. При застосуванні тестової форми оцінки знань і вмінь питання дроблять так, щоб і питання і відповіді були лаконічними, хоча кількість питань стає значно більшою.

Тестові завдання з вищої математики розбито на три рівні. Кількість питань і їх оцінювання може бути різним. Наприклад, питання першого рівня оцінюються в 1 бал кожне, другого — у 2 бали, третього — у 4 бали. Всього при складанні змістового модуля на комп’ютері можна заробити 15 балів. До складу білету, наприклад, вводять 5 питань першого рівня, 3 питання другого рівня і 1 питання третього рівня. В кожному білеті до кожного питання вказано по 5 відповідей, вірною з них є лише одна. При складанні підсумкової модульної роботи (іспиту) до білету вводять, наприклад, 30 питань: 22 питання I рівня по 1 балу кожне, 7 питань II рівня по 2 бали кожне і 1 питання III рівня, яке оцінюється у 4 бали. Всього можна заробити 40 балів.

8. Зразок білета з тестовими завданнями для складання іспиту за I семестр (30 тестів)

I рівень

1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.



а) 13; б) 12; в) 30; г) 28; д) 38.

2. ... добутком двох векторів $\vec{a} \cdot \vec{b}$ називається **число**, рівне добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$ Про який добуток двох векторів йде мова у цьому означенні?

а) Векторний. б) Мішаний. в) Скалярний. г) Нормальний.
д) Тригонометричний.

3. Як в аналітичній геометрії називається наступне рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad ?$$

а) Рівняння площини, що проходить через задану точку

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

б) Загальне рівняння площини.

в) Рівняння площини у відрізках.

г) Нормальне рівняння площини.

д) Рівняння площини, що проходить через задану точку

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ паралельно вектору $\vec{n} = (A; B; C)$.

4. Геометричне місце точок площини, для яких сума відстаней до двох фіксованих точок цієї площини, що називаються фокусами, є величина стала, називається...

а) гіперболою; б) параболою; в) еліпсом; г) колом; д) еліпсоїдом.

5. Поверхня, канонічне рівняння якої має вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, називається...

а) еліптичним циліндром;

б) еліпсоїдом;

в) однорозжнинним гіперболоїдом;

г) дворозжнинним гіперболоїдом;

д) еліптичним параболоїдом.



6. Якщо функція $y=f(x)$ задана аналітично і область визначення не вказана, то за неї приймають...

- а) довільну область;
- б) область існування функції;
- в) область $(-1; 1)$;
- г) область $(0;1)$;
- д) всю числову пряму.

7. Чи є функція $y=|x|$ елементарною?

- а) так; б) ні; в) тільки для додатних x ; г) тільки для від'ємних x ;
- д) тільки для $|x|<1$.

8. Знайти границю функції $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

- а) $3/5$; б) $5/3$; в) 1 ; г) 3 ; д) 5 .

9. Будь-яка елементарна функція неперервна у кожній точці, в якій вона...

- а) визначена б) не визначена; в) досліджується; г) менша за 1 ;
- д) в якій вона додатна.

10. Знайти похідну функції: $y=2x^3+3x^2+4x+5$;

- а) $y'=6x^2+6x+4$;
- б) $y'=2x^2+3x+4$;
- в) $y'=3x^2+2x+4$;
- г) $y'=6x^2+6x$;
- д) $y'=6x^2+6x+5$.

11. Знайти похідну функції: $y=tg x$;

- а) $y'=ctg x$; б) $y'=-ctg x$; в) $y'=-tg x$;



Г) $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$; Д) $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$.

12. Похідна від логарифма функції називається...

а) логарифмічною похідною; б) тригонометричною похідною; в) символічною похідною; г) визначною похідною; д) комплексною похідною.

13. Графік якої кривої другого порядку має асимптоти?

а) еліпса; б) гіперболи; в) параболи; г) кола; д) жодної.

14) Чому дорівнює похідна сталої?

а) x ; б) $2x$; в) 1 ; г) -1 ; д) 0 .

15. Як називається функція $F(x)$ для функції $f(x)$ на проміжку (a, b) , якщо: 1) функція $F(x)$ неперервна на проміжку (a, b) ; 2) в усіх внутрішніх точках x проміжку (a, b) функція $F(x)$ має похідну і $F'(x) = f(x)$?

а) Первісною функцією.

б) Невизначеним інтегралом від функції $f(x)$.

в) Визначеним інтегралом від функції $f(x)$.

г) Похідною для функції $f(x)$.

д) Диференціалом для функції $f(x)$.

16. Сукупність всіх первісних для даної функції $f(x)$ на проміжку (a, b) називається на цьому проміжку...

а) невизначеним інтегралом від функції $f(x)$.

б) особливим інтегралом від функції $f(x)$.

в) визначеним інтегралом від функції $f(x)$.

г) загальним інтегралом від функції $f(x)$.

д) елементарним інтегралом від функції $f(x)$.

17. Похідна від невизначеного інтеграла $\int f(x) dx$ дорівнює...



- а) підінтегральній функції $f(x)$.
- б) підінтегральному виразу $f(x) dx$.
- в) визначником невизначеного інтеграла.
- г) первісній для функції $f(x)$.
- д) нулю.

18. Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні на деякому проміжку, диференційовані у його внутрішніх точках, і на цьому проміжку існує інтеграл $\int v du$, то на ньому існує також інтеграл $\int u dv$, причому $\int u dv = uv - \int v du$. Як називається цей метод інтегрування?

- а) Інтегрування частинами.
- б) Інтегрування добутку функцій.
- в) Інтегрування заміною змінної.
- г) Інтегрування підведенням під знак диференціала.
- д) Інтегрування неперервних функцій.

19. Знайти $\int (4x^2 + 5x + 6) dx$.

- а) $\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x + C$.
- б) $\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6 + C$.
- в) $4x^3 + 5x^2 + 6x + C$.
- г) $\frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x$.
- д) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x + C$.



20. Як називається інтеграл виду $\int_1^{\infty} f(x) dx$?

- а) Невласний інтеграл I роду.
- б) Невласний інтеграл II роду.
- в) Невизначений інтеграл.
- г) Нескінченний інтеграл.
- д) Особливий інтеграл.

21. Скільки пелюсток має крива, що визначається рівнянням:
 $y = 8 \sin(2\varphi)$?

- а) 4. б) 2. в) 8. г) 1. д) 10.

22. Обчислити $\int_0^1 (x^5 - x + 1) dx$.

- а) 2/3. б) 1/3. в) 4/3. г) 5/6. д) 1/6.

II рівень

23. Знайти мішаний добуток векторів:

$$\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

- а) 4; б) 8; в) 16; г) 14; д) 2.

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 7}{9x^3 + x^2 + 1}$.

- а) 1/3; б) 1/9; в) 0; г) 3; д) 7.

25. Знайти похідну функції $y = x^8 \cdot \ln^3 x$.

- а) $y' = 8x^7 + 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.
- б) $y' = x^7 \cdot \ln^3 x + x^8 \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.



в) $y' = 8x^7 + 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

г) $y' = 8x^7 \cdot \ln^3 x + x^8 \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$.

д) $y' = 8x^7 \cdot \ln^3 x + x^8 \cdot 3 \ln^2 x$.

26. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $y = 1 + x^2$; $y = 0$;
 $x = 0$; $x = 1$.

- а) 4/3; б) 1; в) 2; г) 3/4; д) 5/3.

27. Знайти $\int \frac{\arcsin^5 x + 1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

а) $\frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + \arcsin x + C$

б) $\frac{1}{6}(\arcsin x)^6 - \arcsin x + C$

в) $6(\arcsin x)^6 + \arcsin x + C$

г) $6(\arcsin x)^6 - \arcsin x + C$

д) $\frac{1}{6}(\arcsin x)^6 + \arcsin x$

28. Знайти $\int \frac{dx}{x \cdot \sin^2(\ln x)}$.

а) $-\operatorname{ctg}(\ln x) + C$

б) $\operatorname{ctg}(\ln x) + C$



в) $-tg(\ln x) + C$

г) $tg(\ln x) + C$

д) $ctg(\ln x)$

29. Знайти $\int x \cos x dx$.

а) $x \sin x + \cos x + C$.

б) $x \sin x - \cos x + C$.

в) $-x \sin x + \cos x + C$.

г) $-x \sin x - \cos x + C$.

д) $x \sin x + \cos x$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

III рівень

30. Знайти $\int \arcsin x dx$.

а) $x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.

б) $x \cdot \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$.

в) $x \cdot \arcsin x + 2 \cdot \sqrt{1-x^2} + C$.

г) $x \cdot \arcsin x + 2 \cdot \sqrt{1-x^2}$.

д) $x \cdot \arcsin x + 4 \cdot \sqrt{1-x^2} + C$.



Довідковий матеріал. Основні правила диференціювання

1. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані функції, то:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x);$$
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$; $(C \cdot v)' = C \cdot v'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, при умові, що $v(x) \neq 0$;
4. Якщо $y = y(u)$, де $u = u(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. (при умові, що $y(u)$ і $u(x)$ диференційовані функції).

Таблиця похідних. Нехай $u(x)$ – диференційована функція.

1	$(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$;	9	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
2	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;	10	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
3	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;	11	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$;	12	$(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
5	$(e^u)' = e^u \cdot u'$;	13	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
6	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$;	14	$(\arccos u)' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
7	$(\lg u)' = \frac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u'$;	15	$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
8	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;	16	$(\operatorname{arcctg} u)' = \frac{-1}{1+u^2} \cdot u'$;



Таблиця інтегралів

Нехай $u(x)$ – диференційована функція. Тоді:

№ п/п	Невизначений інтеграл
1	2
1	$\int du = u + C;$
2	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; (\alpha \neq -1);$
3	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$
4	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
5	$\int \frac{du}{u} = \ln u + C;$
6	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \text{ де } 0 < a \neq 1;$
7	$\int e^u du = e^u + C;$
8	$\int \sin u du = -\cos u + C;$
9	$\int \cos u du = \sin u + C;$
10	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} \right) \right + C;$
11	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C;$



1	2
12	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$
13	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$
14	$\int \operatorname{tg} u \, du = -\ln \cos u + C;$
15	$\int \operatorname{ctg} u \, du = \ln \sin u + C;$
16	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
17	$\int \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} u + C;$
18	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C;$
19	$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \operatorname{arcsin} u + C;$
20	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+u}{a-u} \right + C;$
21	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a-u}{a+u} \right + C;$
22	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln u + \sqrt{u^2 \pm a} + C;$



10. Рекомендована література

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу.-К.: Вища школа, 1978. Ч.1,2.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.:Наука., 1985. Т.1.2.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. –М.: Высшая школа, 1980. Ч.1,2
4. Задачи и упражнения по математическому анализу /Под редакцией Демидовича Б.П./.-М.:Наука, 1978.
5. Брушковський О.Л. Вища математика. Частина II. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Звичайні диференціальні рівняння : [навчальний посібник] /О.Л. Брушковський . – Рівне: НУВГП. 2008. – 266 с.
6. Брушковський О.Л. Вища математика. Для студентів I курсу заочної форми навчання напрямів підготовки “Економіка підприємства”, “Облік і аудит”, “Фінанси і кредит”: [навчальний посібник] / О.Л. Брушковський., І.В. Дубчак. – Рівне, НУВГП, 2010. 144 с.
7. Мізюк В.Г. Вища математика: [навчальний посібник] / В.Г.Мізюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 245 с.