Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

04-02-32

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до вивчення та виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни "Вища математика"
(розділи: "Звичайні диференціальні рівняння.
Диференціальне та інтегральне числення функції
кількох змінних. Ряди. Теорія імовірностей")

для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" всіх форм
навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією за спеціальністю 192
"Будівництво та цивільна інженерія"
Протокол № 7 від 31.05.2018 р.

Рівне – 2018

Методичні вказівки та завдання до вивчення та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділів:"Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Ряди. Теорія імовірностей" для студентів спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" всіх форм навчання / Брушковський О.Л., Дубчак І.В. ─ Рівне: НУВГП, 2018. ─ 109 с.

Укладачі:
Брушковський О. Л., канд. техн. наук, доцент;
Дубчак І.В., асистент.

Відповідальна за випуск: С.П. Цецик, кандидат педагогічних наук, доцент, в.о. завідувача кафедри вищої математики.

ЗМІСТ

1. Вступ

В умовах обмеженої кількості аудиторних годин, внаслідок чого лекції і практичні заняття з вищої математики набувають переважно оглядового характеру, активна самостійна робота студента має велике значення. Час, який відводиться на вивчення вищої математики для студентів спеціальності 192 “Будівництво та цивільна інженерія” всіх форм навчання скорочено з чотирьох семестрів до двох. Згідно робочої програми у I семестрі вивчаються розділи: "Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної", а у II семестрі — "Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Ряди. Теорія імовірностей". Такий поділ курсу “Вищої математики” на дві частини є універсальним і використовується для всіх форм навчання. Для випускників відповідних коледжів матеріал I частини може бути перезарахований і студенти таких інтегрованих груп вивчають тільки матеріал II частини.

Мета даних методичних вказівок — допомогти здобувачам вищої освіти всіх форм навчання у вивченні важливих розділів вищої математики: "Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Ряди. Теорія імовірностей" та полегшити їх підготовку до складання модулів, заліків або іспитів.

Здобувач вищої освіти повинен вивчити важливі терміни, теореми і методи розв’зання прикладів і задач кожного розділу.

Відповідно до робочої програми, пропонуються методичні рекомендації до вивчення курсу та 30 варіантів завдань для самостійної роботи, що охоплюють розділи "Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Ряди. Теорія імовірностей", наведено навчальний варіант завдань і його розв’язання з методичними порадами. Методичні вказівки призначені для студентів I курсу спеціальності 192 “Будівництво та цивільна інженерія” всіх форм навчання, мають універсальну структуру і можуть бути використані для студентів всіх технічних спеціальностей.

2. Зміст навчальної дисципліни

Розділ 1. Диференціальні рівняння

Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремленими змінними. Рівняння із змінними, які можна відокремити. Однорідні і лінійні диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння Бернуллі.

Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку. Елементи теорії лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку за допомогою характеристичного рівняння. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами. Знаходження загального розв'язку.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння. Знаходження часткового і загального розв'язку лінійних неоднорідних рівнянь з сталими коефіцієнтами другого і вищих порядків у випадку, коли права частина має спеціальний вид. Принцип суперпозиції часткових розв'язків для лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

Поняття про систему диференціальних рівнянь та її розв'язки. Задача Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язування задачі Коші методом виключення.

Розділ 2. Диференціальне числення функції кількох змінних

Функція двох змінних: означення, способи задання, область існування, графічне зображення. Поняття функції багатьох змінних. Частинний і повний прирости функції двох змінних. Поняття границі. Неперервність функції двох змінних в точці і в області. Частинні похідні функції кількох змінних. Диференційованість функції двох змінних в точці. Повний диференціал. Диференціювання складної функції кількох змінних. Диференціювання неявно заданих функцій однієї і кількох змінних. Частинні похідні вищих порядків.

Застосування диференціального числення функції кількох змінних. Похідна по напрямку. Градієнт скалярного поля. Звичайні і особливі точки поверхні. Рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні. Геометричний зміст повного диференціала. Екстремум функції кількох змінних. Необхідні умови екстремуму. Достатні умови екстремуму функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції двох змінних в обмеженій замкненій області.

Розділ 3. Інтегральне числення функцій кількох змінних

а) Подвійні та потрійні інтеграли

Поняття подвійного інтеграла, його геометричний зміст і властивості. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах. Подвійний інтеграл в полярних координатах і його обчислення. Перехід в подвійному інтегралі від декартових координат до полярних. Обчислення об'єму тіл і площ плоских фігур за допомогою подвійного інтеграла.

Поняття потрійного інтеграла, його основні властивості. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах. Обчислення об'єму тіла за допомогою потрійного інтеграла. Циліндричні і сферичні координати, їх зв'язок з декартовими. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних і сферичних координатах.

Обчислення з допомогою кратних інтегралів маси, статичних моментів, моментів інерції та координат центра мас плоскої фігури і тіла.

б) Криволінійні інтеграли I і II роду. Формула Гріна

Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла по довжині дуги, означення, теорема існування, властивості та обчислення. Застосування криволінійного інтеграла I роду (довжина дуги, маса, моменти інерції та координати центра мас матеріальної кривої).

Поняття криволінійного інтеграла по координатах, основні властивості, фізичний зміст та обчислення. Формула Гріна про зв'язок між криволінійним інтегралом по замкнутому контуру і подвійним інтегралом по області, яка обмежена цим контуром. Обчислення за допомогою криволінійного інтеграла роботи і площі плоскої фігури.

в) Поверхневі інтеграли І і ІІ роду

Поняття поверхневого інтеграла по площі поверхні, його існування , основні властивості, обчислення та застосування (площа, маса, моменти інерції та координати центра мас поверхні).

Поняття поверхневого інтеграла від векторної функції по вибраній стороні поверхні, його існування та основні властивості. Поверхневий інтеграл як потік векторної функції через сторону поверхні. Обчислення поверхневого інтеграла ІІ роду.

г) Елементи теорії векторного поля

Поняття векторного поля. Потік векторного поля через замкнуту поверхню, джерела і стоки поля, поняття про дивергенцію. Поняття про теорему Гаусса-Остроградського. Соленоїдне поле.

Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля, ротор. Поняття про теорему Стокса. Умови незалежності лінійного інтеграла від форми контуру.

Поняття потенціального поля. Знаходження потенціалу векторного поля та обчислення лінійного інтеграла у потенціальному полі.

Розділ 4. Ряди

Поняття числового ряду. Збіжність і сума ряду. Основні теореми про збіжні числові ряди. Необхідна ознака збіжності числових рядів, її недостатність. Достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами. Ознаки порівняння, Даламбера, радикальна ознака Коші, інтегральна ознака Коші.

Знакозмінні та знакопереміжні числові ряди. Абсолютна і умовна збіжність. Теорема Лейбніца.

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Їх знаходження у найпростіших випадках. Основні властивості степеневих рядів. Ряди Тейлора і Маклорена. Необхідна і достатня умови розкладу функції в ряд Тейлора. Розклад в степеневий ряд функцій e^x , e^{-x} , sin (x), cos (x), ln (1+x), *arctg x*. Біноміальний ряд. Застосування степеневих рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів і до наближеного інтегрування диференціальних рівнянь.

Розділ 5. Теорія імовірностей

Масові випадкові явища. Предмет теорії ймовірностей. Події та їх класифікація. Алгебра подій. Частоти і їх властивості. Ймовірність події. Аксіоми теорії ймовірностей.

Класичний і статистичний методи визначення базових ймовірностей. Елементи комбінаторики. Властивості ймовірностей (ймовірність появи протилежної події, ймовірність появи неможливої події, теорема додавання ймовірностей будь яких двох подій, умовна ймовірність, теореми добутку ймовірностей для залежних і незалежних подій). Формула повної ймовірності і формули Бейєса.

Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі. Найімовірніша частота появи події в незалежних пробах. Граничні теореми Лапласа і Пуассона.

Поняття випадкової величини. Дискретні і неперервні випадкові величини. Функція розподілу і її властивості. Розподіл дискретних випадкових величин. Типові розподіли: біноміальний і пуассонівський.

Неперервний і абсолютно неперервний розподіли. Функція розподілу і щільність розподілу абсолютно неперервних випадкових величин. Типові розподіли неперервних випадкових величин: рівномірний, нормальний. Крива Гауса. Імовірність попадання в заданий інтервал і ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сигм.

Математичне сподівання і дисперсія випадкових величин та їх властивості. Математичне сподівання і дисперсія при типових розподілах випадкових величин : дискретних (біноміальному, пуассонівському), неперервних (рівномірному, нормальному).

3. Самостійна робота студента

Самостійна робота студента включає в себе опрацювання теоретичного матеріалу курсу “Вища математика”, що розглядається у п’яти розділах: “Звичайні диференціальні рівняння. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Ряди. Теорія імовірностей”, по підручникам, конспектам і навчальним посібникам, підготовку до практичних занять, виконання домашніх вправ, опрацювання окремих розділів робочої програми з навчальної дисципліни, які не виносяться на лекції, підготовку до написання самостійних робіт, до складання відповідного модуля, заліку, іспиту [1-10].

Великий обсяг складного матеріалу і суттєве скорочення аудиторних годин для його вивчення, особливо для заочної форми навчання та інтегрованих груп, роблять самостійне опрацювання матеріалу дуже важливим. Тому вимоги до якості методичних розробок суттєво підвищуються.

Методична розробка по даному курсу, що включає 5 розділів:

1) Звичайні диференціальні рівняння;
2) Диференціальне числення функції кількох змінних;
3) Інтегральне числення функції кількох змінних;
4) Ряди;
5) Теорія імовірностей;

буде мати величезний об'єм і розробляти такі методички для кожної спеціальності нераціонально, тим більше в умовах майже щорічних змін робочих програм для студентів технічних спеціальностей.

Краще колективом авторів розробити універсальні методички по кожному з вказаних розділів, які придатні для вивчення відповідного матеріалу студентами різних технічних спеціальностей всіх форм навчання у відповідності з робочими програмами. Таким вимогам відповідають роботи, що відносяться до першого з вказаних розділів:

1) Методичні вказівки та завдання до вивчення та виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділу "Звичайні диференціальні рівняння " для студентів спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" всіх форм навчання / Брушковський О.Л., Дубчак І.В. ─ Рівне: НУВГП, 2018. ─ 62 с. (04-02-26)

2) Методичні вказівки та завдання до виконання самостійної роботи та підготовки до складання за тестовою формою контрольних заходів з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділу "Звичайні диференціальні рівняння " для студентів спеціальності 192 "Будівництво та цивільна інженерія" всіх форм навчання / Брушковський О.Л., Дубчак І.В. ─ Рівне: НУВГП, 2018. ─ 36 с. (04-02-27)

Вони містять необхідний лекційний курс, завдання для практичних занять, домашні завдання, завдання для підготовки до контрольних заходів у звичайній і тестовій формах.

Для студентів заочної форми навчання і студентів з інтегрованих груп основним видом навчання є самостійна робота. Для таких студентів доцільною є розробка завдань для самостійної роботи, виконання яких дозволяє їм підготуватися до складання контрольних заходів. В даній роботі наведено навчальний варіант такого завдання, його розв’язання з методичними порадами і з посиланням на відповідні джерела та 30 варіантів таких завдань. Це дозволяє студенту виконати вказану роботу самостійно. Виконання такої роботи, її оформлення і захист, оцінюється у 60 балів.

4. Навчальний варіант завдань для самостійної роботи та методичні рекомендації по її виконанню

Варіант 31 (навчальний)

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'=(y+1)ctg\,x;\quad y(\pi/2)=4.$

б) $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}.$ в) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''+4y'+3y=0.$ б) $y''-4y'+4y=0.$

в) $y''-4y'+13y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-6y'+8y=6e^{x}$. б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=3x+y; \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М, якщо:

$$U=z^3+4\operatorname{arctg}(5x-2y); \quad \vec{s}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}; \quad M(1;2;-1).$$

Завдання 5. Дослідити функцію $z=f(x,y)$ на екстремум.

$$z=x^2+xy+y^2-4x-5y.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=6-x^2-y^2; \; z=0; \; x^2+y^2=4; \; (x^2+y^2\le 4).$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n^5}$; б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+4}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^1 x^2\cos\sqrt{x}\,dx.$$

Завдання 10. Задана таблиця розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини *X*. Побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання М(*X*), дисперсію

D(X) і середнє квадратичне відхилення σ (X).

x_i	3	4	6	7	10
p_i	0,20	0,10	0,30	0,10	0,30

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 220$; $\sigma = 3$; $\alpha = 213$; $\beta = 223$; $\delta = 5$.

Розв'язання

Приклад 1(а), [5]. Розв'язати диференціальне рівняння і знайти його частковий розв'язок, який задовольняє вказаній початковій умові:

$$y' = (y+1)\,ctg\,x; \quad y(\pi/2) = 4.$$

Розв'язування. Це диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. Запишемо його у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = (y+1)\,ctg\,x, \quad \text{звідки} \quad \frac{dy}{(y+1)} = ctg\,x\,dx,$$

при умові, що $y+1 \neq 0$.

Інтегруємо ліву і праву частини. Одержимо

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int ctg\,x\,dx.$$

Звідки

$$\ln|y+1| = \ln|\sin x| + \ln|C|,$$

або

$$y+1=C\sin x.$$

Розв’язок $y=C\sin x-1$ є загальним розв'язком даного диференціального рівняння. Окремо встановлюємо, що y= -1 є також розв'язком даного рівняння. Але він не є особливим, так як його можна одержати із загального при C=0.

Використовуючи початкову умову $y(\pi/2)=4$ знайдемо частковий розв'язок даного рівняння.

$C\sin(\pi/2)-1=4$, звідки C=5. Підставляючи C=5 в знайдений загальний розв'язок, одержимо частковий розв'язок рівняння:

$$y=5\sin x-1.$$

Приклад 1(б), [5]. Розв'язати рівняння: $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$.

Розв'язування. Це однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Робимо підстановку:

$$y=u\cdot x,\quad y'=u'x+u.$$

Тоді $u'x+u=\dfrac{1+u^2}{2u};\quad u'x=\dfrac{1+u^2}{2u}-u;\quad u'x=\dfrac{1-u^2}{2u};$

$$\frac{du}{dx}=\frac{1-u^2}{2ux};\quad \frac{2udu}{1-u^2}=\frac{dx}{x},$$

при умові, що $1-u^2\neq 0$, звідки $u^2\neq 1$.

Проводимо інтегрування:

$$\int\frac{2udu}{1-u^2}=\int\frac{dx}{x}.$$

$$\ln\left|u^2-1\right|=-\ln\left|x\right|+\ln\left|C\right|;\ \ u^2-1=\frac{C}{x};\ \ u^2=\frac{C}{x}+1;$$

$$\frac{y^2}{x^2}=\frac{C}{x}+1;\ \ y^2=Cx+x^2;\ \ y=\pm\sqrt{x(C+x)}.$$

При $u^2=1$ одержимо два розв'язки: u=1 і u= -1. Однак вони враховані у загальному інтегралі при C=0.

Приклад 1(в), [5]. Розв’язати рівняння $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$.

Розв'язування. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Робимо підстановку

$$y=u(x)\cdot v(x);\ \ y'=u'v+uv'.$$

Одержимо рівняння $u'v+uv'+uv\cos x=e^{-\sin x}$.

Звідки $u'v+u(v'+v\cos x)=e^{-\sin x}$.

Розв'язуємо систему рівнянь: $\begin{cases} v'+v\cos x=0; \\ u'v=e^{-\sin x}. \end{cases}$

З першого випливає, що $v'=-v\cos x;$ $\frac{dv}{dx}=-v\cos x;$

$$\frac{dv}{v}=-\cos x\,dx;\quad \int\frac{dv}{v}=\int-\cos x\,dx;\ \ \ln\left|v\right|=-\sin x+\ln\left|C_1\right|;$$

$$\ln\left|v\right|=\ln e^{-\sin x}+\ln\left|C_1\right|;\ \ v=C_1e^{-\sin x};\ \ C_1=1;\ \ v=e^{-\sin x}.$$

Тоді з другого

$$u'v=e^{-\sin x};\ \ u'e^{-\sin x}=e^{-\sin x};\ \ u'=1;u=\int 1\,dx;\ \ u=x+C.$$

Загальний розв'язок рівняння:

$$y=uv;\ \ y=(x+C)e^{-\sin x}.$$

Приклад 2(а). $y''+4y'+3y=0.$

$k^2+4k+3=0;\quad k_1=-1;\ k_2=-3;\quad y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}.$

Приклад 2 (б). $y''-4y'+4y=0.$

$k^2-4k+4=0;\quad k_1=k_2=2;\quad y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}.$

Приклад 2(в), [5]. $y''-4y'+13y=0.$

$k^2-4\mathrm{k}+13=0;\quad k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm3i;\quad \alpha=2;\quad \beta=3;$

$$y=C_1e^{2x}\cos3x+C_2e^{2x}\sin3x.$$

Приклад 3 (а), [5].
Знайти загальний розв’язок рівняння: $y''-6y'+8y=6e^x.$

Розв’язання.
Відповідне однорідне рівняння: $y''-6y'+8y=0.$

Характеристичне рівняння: $k^2-6k+8=0.$

Корені характеристичного рівняння:

$k_{1,2}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm1;\ k_1=4;\ k_2=2.$

Загальний розв’язок відповідного однорідного рівняння:

$y_o=C_1e^{4x}+C_2e^{2x}$.

Знайдемо частковий розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

$f(x)=6e^x;$ Порівнюємо її з правою частиною стандартного виду: $f(x)=P_n(x)e^{ax}$. Одержимо $n = 0$ і a=1. Частковий розв'язок шукаємо у вигляді

$y^{*}=x^{r}Q_{n}(x)e^{ax}$. Так як $a\notin\{k_{1,}k_{2}\}$, то $r=0$. Отже

$$y^{*}=x^{0}Q_{0}(x)e^{x}=Ae^{x}; \qquad y^{*\prime}=Ae^{x};$$

Підставляємо цю функцію в задане неоднорідне рівняння:

$$Ae^{x}(1-6+8)=6e^{x}; \qquad 3A=6;\ A=2.$$

Отже $y^{*}=2e^{x}$.

Загальний розв’язок заданого неоднорідного рівняння:

$$y=y_{o}+y^{*}\ ; \qquad y=C_{1}e^{4x}+C_{2}e^{2x}+2e^{x}.$$

Приклад 3(б), [5]. Методом виключення розв'язати систему диференціальних рівнянь і знайти її частковий розв'язок:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+y;\\ \dfrac{dy}{dt}=-x+y.\end{cases}$$

Розв'язування. З першого рівняння знаходимо

$$y=\frac{dx}{dt}-3x$$

і підставляємо в друге рівняння. Одержимо:

$$\frac{d^{2}x}{dt^{2}}-3\frac{dx}{dt}=-x+\frac{dx}{dt}-3x.$$

Звідки:

$$\frac{d^2x}{dt^2}-4\frac{dx}{dt}+4x=0.$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо його загальний розв'язок:

$$k^2-4k+4=0;\ \ k_1=k_2=2;\ \ x=C_1e^{2t}+C_2te^{2t}=e^{2t}(C_1+C_2t)$$

Тоді:

$$y=\frac{dx}{dt}-3x=2e^{2t}(C_1+C_2t)+e^{2t}C_2-3e^{2t}(C_1+C_2t).$$

Звідки після спрощення одержимо:

$$y=e^{2t}(-C_1+C_2(1-t)).$$

Отже, загальний розв'язок системи:

$$\begin{cases} x=e^{2t}(C_1+C_2t); \\ y=e^{2t}(-C_1+C_2(1-t)). \end{cases}$$

Завдання 4 , [6]. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М, якщо:

$$U=z^3+4\,\mathrm{arctg}(5x-2y);\quad \vec{s}=\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k};\quad M(1;2;-1).$$

Розв'язання. Знаходимо значення частинних похідних в точці М, модуль вектора $\vec{s}$ і його напрямні косинуси:

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_M=\left(\frac{20}{1+(5x-2y)^2}\right)\Big|_M=10;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_M=\left(\frac{-8}{1+(5x-2y)^2}\right)\Big|_M=-4;$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_M=\left(3z^2\right)\Big|_M=3;$$

$$s_x=1;\ s_y=3;\ s_z=-2;\ |\vec{s}|=\sqrt{s_x^2+s_y^2+s_z^2}=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}.$$

$$\cos\alpha=\frac{s_x}{|\vec{s}|}=\frac{1}{\sqrt{14}};\qquad \cos\beta=\frac{s_y}{|\vec{s}|}=\frac{3}{\sqrt{14}};$$

$$\cos\gamma=\frac{s_z}{|\vec{s}|}=\frac{-2}{\sqrt{14}}.$$

Градієнтом скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці M називається вектор

$$\vec{grad}\,U\big|_M=\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_M\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_M\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_M\vec{k}.$$

Отже $\vec{grad}\,U\big|_M=10\,\vec{i}-4\,\vec{j}+3\,\vec{k}.$

Похідна по напрямку

$$\frac{\partial U}{\partial s}\Big|_M=\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_M\cdot\cos\alpha+\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_M\cdot\cos\beta+\frac{\partial U}{\partial z}\Big|_M\cdot\cos\gamma.$$

Таким чином

$$\frac{\partial U}{\partial s}\Big|_M=10\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}-4\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}+3\cdot\frac{(-2)}{\sqrt{14}}=\frac{-8}{\sqrt{14}}.$$

Завдання 5, [6]. Дослідити функцію $z=f(x,y)$ на екстремум.

$$z=x^2+xy+y^2-4x-5y.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 4; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x - 5.$$

Дана функція і її похідні визначені всюди. Знаходимо критичні точки:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2x + y - 4 = 0; \\ 2y + x - 5 = 0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x=1; \quad y=2;$$

Точка $M_0(1;2)$ є критичною.

Знаходимо значення других похідних у критичній точці:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Big|_{M_0} = 2; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{M_0} = 1; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Big|_{M_0} = 2.$$

Знаходимо значення критерію:

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3. \qquad A = 2.$$

Якщо $\Delta > 0$ *то в критичній точці є екстремум (при* $A < 0$ $(C < 0)$ *максимум, при* $A > 0$ $(C > 0)$ *мінімум); якщо* $\Delta < 0$ *, то в критичній точці екстремуму немає; якщо* $\Delta = 0$ *, то питання про наявність екстремуму залишається відкритим і вимагає подальших досліджень.*

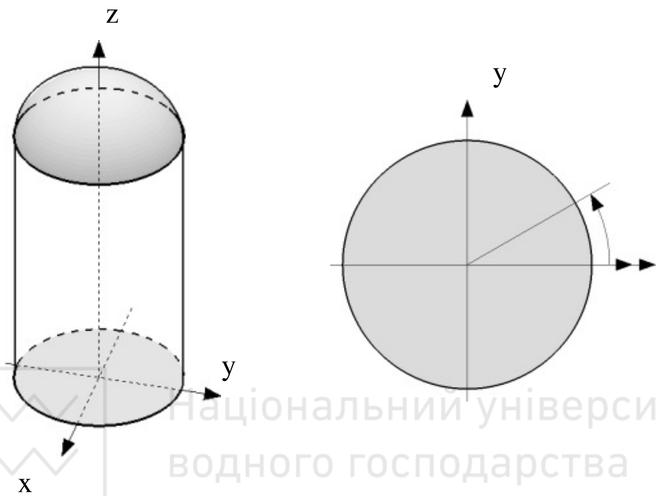
В точці $M_0(1;2)$ $\Delta = 3 > 0$ екстремум існує. Так як $A = 2 > 0$, то це мінімум.

$$z_{min} = z(1;2) = 1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2 - 4 \cdot 1 - 5 \cdot 2 = 1 + 2 + 4 - 4 - 10 = -7.$$

Завдання 6, [6]. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=6-x^2-y^2;\quad z=0;\quad x^2+y^2=4;\quad \left(x^2+y^2\le 4\right).$$

Розв’язання.



$$V=\iiint\limits_V dv=\iiint\limits_V dxdydz=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{6-x^2-y^2} dz=\iint\limits_D z\Big|_0^{6-x^2-y^2} dxdy=$$
$$=\iint\limits_D \left(6-x^2-y^2\right) dxdy.$$

Переходимо до полярних координат.

$$x=r\cos\varphi;\quad y=r\sin\varphi;\quad x^2+y^2=r^2;\quad dxdy=rdrd\varphi.$$
$$V=\iint\limits_D \left(6-r^2\right) r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{2}\left(6r-r^3\right)dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(3r^2-r^4/4\right)\Big|_0^2 d\varphi=$$
$$=\left(12-4\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=8\varphi\Big|_0^{2\pi}=16\pi.$$

Завдання 7(а), [7]. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$. Застосуємо ознаку Даламбера. $u_n=\frac{2^n}{n!}$; **Зауваження.** $n!$, де $(n\in\mathbb{N})$ читається "n-факторіал", це добуток перших n натуральних чисел, тобто:

$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Прийнято $0!=1$. Отже

$1!=1$; $2!=1\cdot2=2$; $3!=1\cdot2\cdot3=6$; $4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$ і т.д.

$$(n+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)=n!\cdot(n+1)\ .$$

$$u_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^n\cdot2}{n!\cdot(n+1)};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot2}{n!\cdot(n+1)}\cdot\frac{n!}{2^n}=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1\ .$$

Ряд збіжний.

Завдання 7(б), [7]. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$.

$u_n=\frac{1}{(n+1)\cdot\ln(n+1)}$. Застосуємо інтегральну ознаку Коші:

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)};$$

$$\int_1^{\infty}f(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x+1)\cdot\ln(x+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d\ln(x+1)}{\ln(x+1)}=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln(x+1)\right|\Big|_1^b=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln(b+1)\right|-\ln\,\ln2=\infty\ .$$

Інтеграл розбіжний, ряд розбіжний.

Завдання 8, [7]. Дослідити на збіжність числовий ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+4}$.

Якщо ряд збіжний, встановити характер збіжності і знайти суму ряду з точністю до 0,01.

Абсолютна величина загальний член ряду $u_n=\frac{1}{n^2+4}$;

Знакопереміжний ряд задовільняє умовам ознаки Лейбніца:

1) $u_1>u_2>u_3>\dots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}=0.$

Отже ряд збіжний. Ряд з абсолютних величин $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+4}$

Застосуємо інтегральну ознаку Коші. $u_n=\frac{1}{n^2+4}$;

$f(x)=\frac{1}{x^2+4}$;

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx=\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2+4)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d\,x}{x^2+2^2}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}arctg\,\frac{x}{2}\Big|_1^b=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty} arctg\,\frac{b}{2}-\frac{1}{2}arctg\,\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arctg\,\frac{1}{2}\quad .$$

Інтеграл збіжний, ряд збіжний. Отже заданий ряд збіжний абсолютно.

Завдання 9, [7]. Обчислити $\int_0^1 x^2\cos\sqrt{x}\,dx$ з точністю до 0,001.

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\pm\dots;\qquad(-\infty<x<\infty).$$

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}\pm\ldots;$$

$$\int_0^1 x^2\cos\sqrt{x}\,dx=\int_0^1 x^2\cdot\left(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}\pm\ldots\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^2-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{6!}\pm\ldots\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4\cdot 2!}+\frac{x^5}{5\cdot 4!}-\frac{x^6}{6\cdot 6!+-\ldots}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{120}-$$

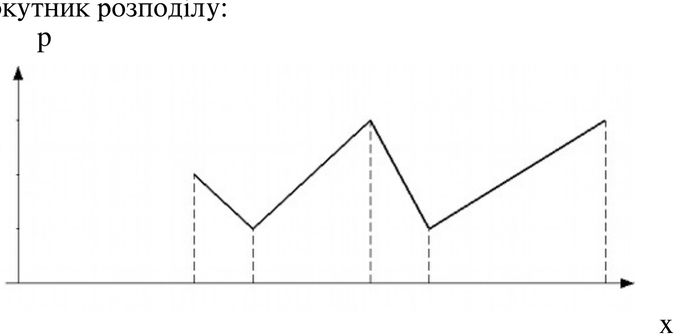
$$-\frac{1}{4320}\pm\ldots\approx\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{120}=\frac{40-15+1}{120}=\frac{26}{120}\approx 0{,}217.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання 10, [7] Задана таблиця розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини *X*. Побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(*X*), дисперсію D(*X*) і середнє квадратичне відхилення σ (*X*).

x_i	3	4	6	7	10
p_i	0,20	0,10	0,30	0,10	0,30

Багатокутник розподілу:



Математичне сподівання:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i=$$

$$=3\cdot 0{,}20+4\cdot 0{,}10+6\cdot 0{,}30+7\cdot 0{,}10+10\cdot 0{,}30=6{,}50.$$

Дисперсія:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - M^2(X)=$$

$$=3^2\cdot 0{,}20+4^2\cdot 0{,}10+6^2\cdot 0{,}30+7^2\cdot 0{,}10+10^2\cdot 0{,}30-(6{,}50)^2=6{,}85.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{6{,}85}=2{,}62.$$

Завдання 11, [7] Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 220$; $\sigma = 3$; $\alpha = 213$; $\beta = 223$; $\delta = 5$.

Розв'язання

1) Ймовірність попадання нормально розподіленої величини в заданий інтервал:

$$P(\alpha < x < \beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

$$P(213 < x < 223) = \Phi\left(\frac{223-220}{3}\right) - \Phi\left(\frac{213-220}{3}\right) =$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-2{,}33) = \Phi(1) + \Phi(2{,}33) = 0{,}341 + 0{,}490 = 0{,}831\,.$$

1) Ймовірність заданого відхилення:

$$P(|X-a| < \delta) = 2\,\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

$$P(|X-220| < 5) = 2\,\Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2\,\Phi(1{,}67) = 2 \cdot 0{,}453 = 0{,}906\,.$$

5. Варіанти завдань для самостійної роботи

Варіант №1

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+e^x)y'=e^x y;\quad y(0)=4.$

б) $y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x};$ в) $y'-\dfrac{y}{x}=x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-9y'+20y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+29y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-2y'-8y=16x^2+2;$ б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y;\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y.\end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2};$ $\vec{s}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k};$ M(1;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-2x-2y.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\quad z=2-x;\quad y=2\sqrt{x};\quad y=\frac{x^2}{4}.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n^5}; \qquad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}.$$

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n+1}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{8}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,9 для кожного з них. X – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 200$; $\sigma = 4$; $\alpha = 192$; $\beta = 210$; $\delta = 5$.

Варіант №2

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y' = (2y+1)\,ctg\,x;\quad y(\pi/2) = 1/2;$

б) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}\cdot\ln\dfrac{y}{x};$ в) $y' - 2xy = 2x\,e^{x^2}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' + 5y' + 4y = 0.$ б) $y'' + 4y' + 4y = 0.$

в) $y'' + 4y' + 20y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' + 4y = 3\cos x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 5y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = x(\ln y - \text{arctg}\, z);$ $\vec{s} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k};$ M(-2;1;-1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину Oxy:

$$z = 0;\quad z = x^2;\quad y = 2x;\quad x + y = 9.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+2)!}; \qquad \text{б)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^4 n}.$$

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+3) \cdot 9^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,8; для другого – 0,9. X – число нормально працюючих на протязі дня насосів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$$a = 400; \quad \sigma = 6; \qquad \alpha = 394; \quad \beta = 420; \quad \delta = 8.$$

Варіант №3

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'\cdot(x^2+1)=2xy;\ \ y(1)=4;$

б) $y'=\dfrac{2y+3x}{x};$ в) $y'-ytg\,x=\dfrac{1}{\cos^3 x}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-6y'+5y=0.$ б) $y''-8y'+16y=0.$

в) $y''+6y'+34y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-y'-2y=4e^x;$ б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-x-y;\\ \dfrac{dy}{dt}=-5x+3y.\end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці M:

$U=x^3+\sqrt{y^2+z^2};$ $\vec{s}=\vec{j}-\vec{k};$ M(1;-3;4).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-3x-6y.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного
тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\ \ x=0;\ \ y=0;\ \ z=1+y^2;\ \ x+y=1.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^2+9}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білета для деякого студента складає 0,8. X – число правильних відповідей.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 600$; $\sigma = 12$; $\alpha = 584$; $\beta = 612$; $\delta = 10$

Варіант №4

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'x\ln x = y+1\,;\;\; y(e)=2\,;$

б) $y' = \dfrac{y+\sqrt{xy}}{x}\,;$ в) $y' - y\,ctg\,x = \dfrac{1}{\sin x}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 8y' + 15y = 0.$ б) $y'' + 6y' + 9y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 85y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) Знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 2y' = 2x+1\,;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - 3y\,; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 5y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}\,;$ $\vec{s} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\,;$ М(1;1;0).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = -5x^2 - 4xy - y^2 - 4x - 2y + 4.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0\,;\;\; z = x\,;\;\; y = 0\,;\;\; y = 4\,;\;\; x = \sqrt{25 - y^2}.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{8^n}{4n+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2n+5}}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{9n+3}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення σ (X).*

В кожній сотні приладів, які випускає деякий завод, 70 першосортних. *X* – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 800$; $\sigma = 12$; $\alpha = 782$; $\beta = 816$; $\delta = 15$.

Варіант №5

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'\sin x = y\cos x; \quad y(\pi/2)=1;$

б) $y' = \dfrac{xy-y^2}{x^2};$ в) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{e^{-x}}{x}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-7y'+12y=0.$ б) $y''+2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+29y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-y'-6y = 6x^2-4x-3;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-2y; \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+6y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці M:

$U=z^2+2\,\mathrm{arctg}(x-y);$ $\vec{s}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k};$ M(1;2;-1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=-x^2+3xy+4y^2+4x-6y-1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z^2=4-y; \quad x^2+y^2=4y.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}6)^n}{n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+8}{n(n+8)}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+9}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{5}}\frac{\sin 5x}{x}dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для зрошення деякої ділянки використовують два незалежно працюючих трубопроводи. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі сезону складає для першого з них 0,08; для другого – 0,15. X – число розірваних на протязі сезону трубопроводів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 1000$; $\sigma = 20$; $\alpha = 965$; $\beta = 1032$; $\delta = 12$

Варіант №6

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+x^2)\, y' = -xy;\;\; y(0)=1;$

б) $y' = 1+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2};$ в) $y' - \dfrac{3y}{x} = x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 4y' + 3y = 8e^{5x};$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U = x + \ln(z^2+y^2);$ $\vec{s} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k};$ М(2;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=3x^2+5xy+3y^2+x-y+5.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\;\; z=9-y^2;\;\; x^2+y^2=9.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+7)}{(2n+3)!};\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+16}.$$

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot 5^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{6}}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,8. Грається матч з чотирьох партій. X – число виграних партій.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 200$; $\sigma = 4$; $\alpha = 194$; $\beta = 212$; $\delta = 6$

Варіант №7

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $x\,y' + y\ln y = 0\,;\ \ y(1) = e\,;$

б) $y' = \dfrac{y - x}{x}\,;$ в) $y' - \dfrac{2\,y}{x} = 3\,x^4.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 7\,y' + 10\,y = 0.$ б) $y'' - 14\,y' + 49\,y = 0.$

в) $y'' - 16\,y' + 164\,y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 2\,y' = 6\,x^2 - 6\,x - 2\,;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4\,x + 2\,y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -\,x + y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = y\ln(1 + x^2) - \operatorname{arctg} z\,;$ $\vec{s} = 2\,\vec{i} - 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}\,;$ M(0;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = -\,x^2 + xy - 2\,y^2 + x + 10\,y - 8\,.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0\,;\ \ z = 4 - x - y;\ \ x^2 + y^2 = 4.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+1}{\left(\sqrt{3}\right)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+3}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^4 n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{7}} e^{-x^2} dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,4; для другого – 0,6. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$$a = 400; \quad \sigma = 6; \quad \alpha = 396; \quad \beta = 416; \quad \delta = 5$$

Варіант №8

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y' ctg\, x + y = 2;\quad y(0) = -1;$

б) $x y' = y + x \sin \dfrac{y}{x};$ в) $y' - \dfrac{y}{x} = x \cos x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - y' - 2y = 0.$ б) $y'' - 10y' + 25y = 0.$

в) $y'' - 14y' + 449y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' + 4y' = 17 \cos x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = \ln(3 - x^2) + xy^2 z;$ $\vec{s} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$ M(1;3;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = x^2 + 2xy - y^2 + 6x - 10y + 1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0;\quad x = 0;\quad z = y^2;\quad 2x + 3y = 6.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{9^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^3+2}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^8}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,1; для другої – 0,2. *X* – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 600$; $\sigma = 8$; $\alpha = 578$; $\beta = 624$; $\delta = 10$.

Варіант №9

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+\sin x)\, y' = y\cos x;\ \ y(\pi/2) = 4;$

б) $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}};$ в) $y' + 2xy = 3x^2 \cdot e^{-x^2}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 3y' - 10y = 0.$ б) $y'' - 12y' + 36y = 0.$

в) $y'' - 10y' + 41y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 2y' + y = e^{2x};$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 8y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x - 3y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = x^2 y^2 z - \ln(z-1);$ $\vec{s} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k};$ M(1;1;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = 3x^2 + 3xy + y^2 - 6x - 2y + 1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0;\ \ z = y^2;\ \ x^2 + y^2 = 9.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)\ln^4(n+3)}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+3)^2}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{9}} x \cos\sqrt{x}\, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,8. X – число відкритих на протязі дня затворів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 800$; $\sigma = 16$; $\alpha = 786$; $\beta = 828$; $\delta = 15$.

Варіант №10

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'\,arctg\,x = \dfrac{y}{1+x^2}; \quad y(1) = \dfrac{\pi}{2};$

б) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2xy};$ в) $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = x^2.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-9y'+14y=0.$ б) $y''-16y'+64y=0.$

в) $y''-18y'+85y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-2y'-8y = 16x^2+2;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x-y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x-y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\ln(x^2+y^2)+xyz;$ $\vec{s}=\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k};$ M(1;-1;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2-xy+y^2+x+y+2.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0; \quad z=1-y^2; \quad x=y^2; \quad x=2y^2+1.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^{n-1}}{(n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+5}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+8}}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{14}} \sqrt{x \cdot e^x}\, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,90; для другого – 0,8. *X* – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 1000$; $\sigma = 25$; $\alpha = 970$; $\beta = 1040$; $\delta = 18$.

Варіант №11

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $xy' = -y; \quad y(1) = 1;$

б) $y' = \frac{y}{x} \cdot \ln\frac{y}{x};$ в) $y' - \frac{y}{x} = x^3.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' + y = 2\cos x;$ б) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 5y; \\ \frac{dy}{dt} = 3x - y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2};$ $\vec{s} = 2\vec{i} + \vec{j};$ M(1;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = -2x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 20y - 9.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0; \quad z = \sqrt{1 - y}; \quad y = x^2.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{8^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n+4)^2}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n+5}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,9 для кожного з них. X – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$$a = 200; \quad \sigma = 3; \quad \alpha = 192; \quad \beta = 216; \quad \delta = 5.$$

Варіант №12

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+e^x)\,y' = e^x\cos^2 y;\quad y(0)=\dfrac{\pi}{4};$

б) $y' = 4+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2};$ в) $y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{x^2}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''+y=-2x+2;$ б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+2y;\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=x+3y.\end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=x^2(\ln y-\operatorname{arctg} z);$ $\vec{s}=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k};$ M(3;1;-1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-2x-y+3.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\quad z=1-x^2;\quad y=0;\quad y=3-x.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+3)!}{n^2\cdot 3^n};\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot \ln^2 n}.$$

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 6^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{12}} e^{-x^2}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,4; для другого – 0,8. X – число нормально працюючих на протязі дня насосів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$$a = 400;\quad \sigma = 6;\quad \alpha = 392;\quad \beta = 420;\quad \delta = 8.$$

Варіант №13

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y\cdot(1+x^2)\cdot y' = x\cdot(1+y^2); \quad y(0)=0;$

б) $y' = \dfrac{x+y}{x-y};$ в) $y' + \dfrac{y}{x} = e^x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-5y'+6y = 2\sin x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=2x+y; \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=x+\sqrt{y^2+z^2};$ $\vec{s}=\vec{j}-\vec{k};$ М(2;3;4).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2-xy+2y^2+3x+2y+2.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0; \quad y+z=2; \quad x^2+y^2=4.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 7^n}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^8 n}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{8^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білета для деякого студента складає 0,5. X – число правильних відповідей.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 600$; $\sigma = 10$; $\alpha = 584$; $\beta = 622$; $\delta = 14$.

Варіант №14

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'=(2y-1)\,ctg\,x;\;\; y(\pi/2)=4;$

б) $y'=\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+\dfrac{y}{x};$ в) $y'+2y=4x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь ІІ порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-7y'+6y=2e^x;$ б) $\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=5x+2y;\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=2x+2y.\end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2};$ $\vec{s}=2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k};$ М(1;1;0).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=3x^2+3xy+y^2-6x-2y+1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\;\; 4z=y^2;\;\; 2x-y=0;\;\; x+y=9.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^3 \cdot 9^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+8}}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5n+1}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{9}} \frac{\sin 3x}{x} dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

В кожній сотні приладів, які випускає деякий завод, 90 першосортних. *X* – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 800$; $\sigma = 14$; $\alpha = 776$; $\beta = 826$; $\delta = 15$.

Варіант №15

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+x^2)\; y' = \cos^2 y; \;\; y(0) = \dfrac{\pi}{4};$

б) $y' = e^{\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x};$ в) $y' + \dfrac{y}{x} = \cos x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 3y' = 3x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = z^4 + 4\, arctg(x - y);$ $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k};$ M(1;2;-1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = -x^2 + 3xy - 4y^2 + 4x - 6y - 1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0; \;\; x = 0; \;\; z = 4\sqrt{y}; \;\; x + y = 4.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{(n+2)^3 \cdot 5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+4}}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+8}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x^2} dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

В кожній сотні виробів, які випускає деяке підприємство, 96 першосортних. X – число першосортних приладів серед трьох взятих.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 200$; $\sigma = 6$; $\alpha = 178$; $\beta = 116$; $\delta = 9$.

Варіант №16

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+e^x)\,y' = e^{2x}\,y;\quad y(0)=8;$

б) $y' = \dfrac{x^2+y^2}{2x^2};$ в) $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-4y'+13y = 26;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x+5y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x-2y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=x+\ln(z^2+y^2);$ $\vec{s}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k};$ M(2;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=-x^2-y^2+6x-8y-20.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\quad z=x^2+y^2;\quad x^2+y^2=4.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(4n+3)}{(2n)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+36}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 9^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{30}}\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,4. Грається матч з чотирьох партій. *X* – число виграних партій.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 200$; $\sigma = 4$; $\alpha = 195$; $\beta = 218$; $\delta = 5$.

Варіант №17

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y' = (2y+1)\,tg\,x; \quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1;$

б) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 3\dfrac{y}{x};$ в) $y'\cos x + y = 1 - \sin x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' + 9y = 3\cos x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 5y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -3x - 4y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = y\ln(1 + x^2) - \mathrm{arctg}\,z; \quad \vec{s} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k};$ M(0;2;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + 4x + 7y + 5.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0; \quad z = \sqrt{1 - x}; \quad x = y^2.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{\left(2n+7\right)^3}$;   б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^9 n}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+17}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/8} e^{-x^2}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,5; для другого – 0,8. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 400$; $\sigma = 6$; $\alpha = 392$; $\beta = 418$; $\delta = 4$.

Варіант №18

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'(x^4+1)=2x^3y; \quad y(1)=4;$

б) $y'=\dfrac{y}{x}+\cos^2\dfrac{y}{x};$ в) $(1+x^2)y'+y=arctg\,x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-13y'+12y=4e^{2x};$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x-y; \\ \dfrac{dy}{dt}=x+3y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\ln(2-x^2)+xy^3z;$ $\vec{s}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k};$ M(1;3;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=-x^2-xy-y^2+6x-8.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0; \quad x=0; \quad y=0; \quad z=x^2+3y^2; \quad x+y=1.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+3)\cdot 9^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+15}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)^4}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/8} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,2; для другої – 0,3. X – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 600$; $\sigma = 9$; $\alpha = 574$; $\beta = 625$; $\delta = 10$.

Варіант №19

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'\,x\ln x = y+9;\quad y(e)=6;$

б) $xy' = 2(y-\sqrt{xy});$ в) $y' - y\,tg\,x = 5\cos x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-4y' = 8x+2;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x-2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x-5y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці M:

$U=x^2y^2z-\ln(z-1);\qquad \vec{s}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k};$ M(1;2;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=-x^2+3xy-3y^2-6x+9y+3.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\quad z=y^2;\quad 2y-x=0;\quad x+y=9.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{5n+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{9n+5}}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n+9)^2}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^1 x^5 \cos\sqrt{x}\, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,6. X – число відкритих на протязі дня затворів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 800$; $\sigma = 14$; $\alpha = 786$; $\beta = 824$; $\delta = 15$.

Варіант №20

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'\sin^3 x - y\cos x = 0; \quad y(\pi/2) = 1;$

б) $y' = \dfrac{y}{x} + \sin^2\dfrac{y}{x};$ в) $y'\cos^2 x + y = tg\, x.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 7y' + 6y = \sin x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = \ln(x^2 + y^2) + x^3 yz^2;$ $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$ M(1;-1;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 4.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0; \quad z = 2 - y; \quad x = 2\sqrt{y}; \quad x = \frac{y^2}{4}.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

$$\text{а)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1000)^n}{(n)!}; \qquad \text{б)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+8n+17}.$$

Завдання 8 Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+20}}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{\frac{1}{12}} \sqrt{x} \cdot e^x \, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,6; для другого – 0,9. X – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$$a = 1000; \quad \sigma = 25; \quad \alpha = 968; \quad \beta = 1046; \quad \delta = 18.$$

Варіант №21

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+x^6)y' = -x^5 y;\ \ y(0)=1;$

б) $y' = 9+\dfrac{y}{x}+\dfrac{y^2}{x^2};$ в) $y'+y\cos x = e^{-\sin x}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''+4y = 8+64e^{2x};$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x+y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x-y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2};$ $\vec{s}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k};$ M(1;-1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-2x-y.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z^2=4-x;\ \ x^2+y^2=4x.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8^n(2n+5)}{(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+64}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 8^n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/16}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для сигналізації про пожежу в цеху встановлено 4 сигналізатори, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що при пожежі сигналізатор спрацює дорівнює 0,95 для кожного з них. X – число сигналізаторів, які спрацюють при пожежі.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 200$; $\sigma = 5$; $\alpha = 186$; $\beta = 214$; $\delta = 6$.

Варіант №22

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $x\,y' + y \ln^2 y = 0;\quad y(1) = e;$

б) $y' = \dfrac{y}{x+y};$ в) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - y' = x^2 - 4x + 2.$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + 2y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = x(\ln y - \operatorname{arctg} z);$ $\vec{s} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k};$ M(2;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = x^2 + 3xy + y^2 - x - 4y + 1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0;\quad y = 0;\quad z = x^2;\quad 3x + 2y = 6.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n+2}{\left(\sqrt{5}\right)^{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{7n+4}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n\cdot\ln^{7}n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_{0}^{1/20} e^{-x^{2}}dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На насосній станції незалежно один від одного працюють два насоси. Ймовірність нормальної роботи (без втручання механіка) для першого насоса становить 0,8; для другого – 0,7. X – число нормально працюючих на протязі дня насосів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 400$; $\sigma = 8$; $\alpha = 382$; $\beta = 416$; $\delta = 7$.

Варіант №23

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y' ctg\, x + y = 2\,;\quad y(\pi/4) = 1\,;$

б) $y' = \dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x}\,;$ в) $y' + 2xy = x\cdot e^{-x^2}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 4y' + 20y = 20x + 36\,;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = x + \sqrt{y^2 + z^2}\,;$ $\vec{s} = 3\vec{j} - 4\vec{k}\,;$ M(1;1;-1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = x^2 - xy + y^2 + x - 2y + 3.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0\,;\quad z = (x-1)^2\,;\quad y^2 = x.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

$$\text{а)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{(23)^n}; \qquad\qquad \text{б)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2n^4+5}.$$

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+4)^6}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/4}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Ймовірність правильної відповіді на кожне з 4-х питань екзаменаційного білета для деякого студента складає 0,7. X – число правильних відповідей.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$$a = 600;\quad \sigma = 12;\quad \alpha = 586;\quad \beta = 624;\quad \delta = 14.$$

Варіант №24

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(1+\cos x)\,y' = y\sin x;\quad y(\pi/2)=4;$

б) $y' = \dfrac{y}{x}+\sqrt{16+\dfrac{y^2}{x^2}};$ в) $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-4y'+4y = e^x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x+3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 6x-4y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\sqrt{xy}+\sqrt{16-z^2};$ $\vec{s}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k};$ М(1;3;4).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2-xy+y^2+x+y+2.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\quad z=4-x^2;\quad x^2+y^2=4.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+24}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+7)\ln^5(n+7)}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(4n+3)^2}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/10} x\cos\sqrt{x}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

В кожній сотні приладів, які випускає деякий завод, 96 першосортних. *X* – число першосортних приладів серед чотирьох взятих.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 800$; $\sigma = 14$; $\alpha = 788$; $\beta = 818$; $\delta = 12$.

Варіант №25

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $$\frac{y'}{arctg^2 x} = \frac{y}{1+x^2}; \quad y(1) = \frac{\pi}{2};$$

б) $xyy' = y^2 + 2x^2;$ в) $y' + 2y = e^{3x}.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x;$ б) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y; \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 6y. \end{cases}$$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = z^5 + 5\mathrm{arctg}(x - y);$ $\vec{s} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k};$ М(1;4;0).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = 3x^2 + 5xy + 3y^2 + x - y + 5.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = 0; \quad x = 0; \quad y = 0; \quad z = x^2 + 1; \quad x + y = 1.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n+1}}{(n+2)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+12n+40}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+25}}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/9} \sqrt{x} \cdot e^x \, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для зрошення деякої ділянки використовують два незалежно працюючих трубопроводи. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі сезону складає для першого з них 0,06; для другого – 0,14. *X* – число розірваних на протязі сезону трубопроводів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина *X* з математичним сподіванням (проектною масою) *a* кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 1000$; $\sigma = 22$; $\alpha = 980$; $\beta = 1032$; $\delta = 30$.

Варіант №26

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $(2x^2+x)\,y' = y-2;\ \ y(2)=4;$

б) $y-xy'=\dfrac{x}{\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)};$ в) $(x^2+1)y'+4xy=3.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь ІІ порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-2y'+y=-12\cos 2x-9\sin 2x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-x+8y; \\ \dfrac{dy}{dt}=x+y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=4x^2+\ln(z^2+y^2);$ $\vec{s}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k};$ M(2;2;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-6x-3y+3.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\ \ x=0;\ \ y=x;\ \ z=\sqrt{1-y^2}.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+6}{n^3+6n+1}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{9n+2}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/10}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Для деякого шахіста ймовірність виграшу в кожній партії складає 0,85. Грається матч з чотирьох партій. X – число виграних партій.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 200$; $\sigma = 6$; $\alpha = 184$; $\beta = 226$; $\delta = 9$.

Варіант №27

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'(y^2+1)+y(x^2+x)=0;\ \ y(0)=1;$

б) $xy' = x+2y;$ в) $y'-\dfrac{2y}{x}=2x^3.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''+2y'+2y=2x^2+8x+6;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=6x-y; \\ \dfrac{dy}{dt}=3x+2y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=y^3\ln(1+x^2)-\operatorname{arctg} z;\quad \vec{s}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k};$ М(-2;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+2y^2-x-2y-1.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\ \ x=0;\ \ y=0;\ \ z=2-x-y;\ \ x^2+y^2=1.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(6n+4)\cdot 8^{n}}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n+2)^{2}}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^{6}}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_{0}^{1/2} x^{4}\cos\sqrt{x}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Робітник обслуговує два насоси, які працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що робота першого насосу на протязі зміни вимагатиме втручання робітника, становить 0,75; для другого – 0,85. X – число насосів, які на протязі зміни будуть вимагати втручання робітника.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 400$; $\sigma = 6$; $\alpha = 392$; $\beta = 414$; $\delta = 8$.

Варіант №28

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y'-2xy-x=0; \quad y(1)=0;$

б) $\dfrac{y}{x}+\left(2\sqrt{\dfrac{y}{x}}-1\right)y'=0;$

в) $xy'+y+xe^{-x^2}=0.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь ІІ порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-4y'+20y=16xe^{2x};$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=5x+4y; \\ \dfrac{dy}{dt}=4x+5y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$U=\ln(9-x^2)+x^2y^2z; \qquad \vec{s}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}; \qquad$ M(0;1;1).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+xy+y^2-6x-9y.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0; \quad y^2=x; \quad z=x^2+y^2; \quad x=1.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)\cdot 6^{n}}{7^{n+2}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^{28}n}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{5^{n}\cdot n^{7}}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_{0}^{1/16} x\cdot\ln(1+x)\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

Обчислювальний центр, що складається з двох ЕОМ, які працюють незалежно одна від одної, проводить обробку інформації. Ймовірність відмови на протязі деякого часу для першої ЕОМ складає 0,12; для другої – 0,15. X – число ЕОМ, які відмовлять за вказаний час.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 600$; $\sigma = 16$; $\alpha = 782$; $\beta = 828$; $\delta = 20$.

Варіант №29

Завдання 1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y\sqrt{1-x^2}\,y'+\sqrt{1-y^2}=0$; $y(0)=0$;

б) $x\,y'=y-x\,e^{\frac{y}{x}}$; в) $y'+y\cos x=e^{-\sin x}$.

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y''-5y'+6y=0.$ б) $y''-2y'+y=0.$

в) $y''-4y'+68y=0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y''-y=(14-16x)e^{-x}$; б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=4x-y; \\ \dfrac{dy}{dt}=-x+4y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці M:

$U=x^3y^2z-\ln(z-1)$; $\vec{s}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$; M(1;2;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+y^2+2x+4y-6.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z=0;\ \ z=\sqrt{x^2+y^2};\ \ x^2+y^2=2x.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^5 \cdot 2^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+81}}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \cdot (n+9)}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^1 \sqrt[5]{x} \cdot \sin x \, dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення σ (X).*

На станції спостереження встановлені 2 радіолокатори різних конструкцій. Ймовірність виявлення цілі для першого локатора складає 0,82; для другого – 0,95. X – число радіолокаторів, які виявлять ціль.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 800$; $\sigma = 16$; $\alpha = 776$; $\beta = 834$; $\delta = 18$.

Варіант №30

Завдання1. Знайти частковий розв'язок рівняння (а), та загальні розв'язки однорідного (б) і лінійного (в) рівнянь:

а) $y' = \dfrac{y+1}{x+5};\quad y(0)=4;$

б) $y' = 2\dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2};$ в) $xy' + y = \ln x + 1.$

Завдання 2. Знайти загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь II порядку із сталими коефіцієнтами:

а) $y'' - 5y' + 6y = 0.$ б) $y'' - 2y' + y = 0.$

в) $y'' - 4y' + 68y = 0.$

Завдання 3. а) Знайти загальний розв'язок рівняння; б) знайти загальний розв'язок системи рівнянь:

а) $y'' - 9y' + 18y = 26\cos x - 8\sin x;$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 6x + 3y; \\ \dfrac{dy}{dt} = -8x - 5y. \end{cases}$

Завдання 4. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U = U(x, y, z)$ в точці М:

$U = \ln(x^2 + y^2) + x^2 y^4 z;$ $\vec{s} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k};$ M(-1;1;2).

Завдання 5. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z = x^3 - 3xy + y^3.$$

Завдання 6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого вказаними поверхнями. Зробити малюнок даного тіла і його проекції на площину *Oxy:*

$$z = \sqrt{x^2 + y^2};\quad z = x^2 + y^2.$$

Завдання 7. Дослідити на збіжність числові ряди: (а) користуючись ознакою Даламбера ; (б) інтегральною ознакою збіжності рядів:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$. б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+144}$.

Завдання 8. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд. Якщо ряд збіжний, то встановити чи він збіжний абсолютно, чи умовно

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^{13} n}.$$

Завдання 9. Обчислити означений інтеграл з точністю до 0,001 методом розкладу підінтегральної функції в степеневий ряд

$$\int_0^{1/9} \sqrt{1+x^3}\,dx.$$

Завдання 10. *Скласти таблицю розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини X, побудувати багатокутник розподілу, знайти математичне сподівання M(X), дисперсію D(X) і середнє квадратичне відхилення* σ *(X).*

На ділянці зрошувального каналу є п'ять автоматичних затворів. Ймовірність того, що на протязі дня затвор буде відкритим, складає для кожного з них 0,85. X – число відкритих на протязі дня затворів.

Завдання 11. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде:

1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг

$a = 1000$; $\sigma = 12$; $\alpha = 982$; $\beta = 1034$; $\delta = 16$.

6. Теоретичні питання і завдання для підготовки до складання змістових модулів

6.1. Теоретичні питання

Розділ І. Звичайні диференціальні рівняння

1. Диференціальні рівняння. Основні поняття.
2. Диференціальні рівняння І порядку. Задача Коші. Теорема існування і єдиності розв'язку задачі Коші.
3. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння І порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння І порядку. Рівняння Бернуллі.
5. Диференціальні рівняння вищих порядків. Задача Коші. Поняття про крайові задачі.
6. Рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку.
7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння . Основні властивості їх розв'язків. Лінійна залежність функцій. Визначник Вронського. Теорема про необхідну умову лінійної залежності довільної системи функцій.
8. Необхідна і достатня умови лінійної незалежності системи функцій, що є розв'язками лінійного однорідного диференціального рівняння.
9. Фундаментальна система розв'язків лінійного однорідного диференціального рівняння. Теорема про структуру його загального розв'язку.
10. Лінійні однорідні диференціальні рівняння ІІ порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальний розв'язок у випадку, коли корені характеристичного рівняння дійсні різні.
11. Лінійні однорідні диференціальні рівняння ІІ порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальний розв'язок у випадку, коли корені характеристичного рівняння дійсні, однакові.
12. Лінійні однорідні диференціальні рівняння ІІ порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальний розв'язок у випадку, коли корені характеристичного рівняння комплексні.
13. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами. Характеристичне рівняння. Загальний розв'язок рівняння.
14. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Теорема про

структуру загального розв'язку.
15. Знаходження часткового розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною виду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$.
16. Знаходження часткового розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння II порядку із сталими коефіцієнтами і правою частиною виду

$$f(x)=P_n(x)e^{ax}\cos bx+Q_m(x)e^{ax}\sin bx.$$

17. Принцип суперпозиції часткових розв'язків для лінійного неоднорідного диференціального рівняння II порядку.
18. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку із сталими коефіцієнтами. Знаходження часткового розв'язку.
19. Системи диференціальних рівнянь. Розв'язання нормальної системи диференціальних рівнянь методом виключення.

***Розділ II.* Диференціальне числення функції кількох змінних**

1. Функція двох змінних: означення, способи завдання, область існування, графічне зображення. Поняття функції багатьох змінних.
2. Поняття границі функції декількох змінних. Неперервність функції декількох змінних.
3.Частинні похідні функції декількох змінних. Геометричний зміст частинних похідних функції двох змінних.
4. Повний приріст функції двох змінних. Диференційованість функції у точці. Повний диференціал функції декількох змінних і його зв'язок з частинними похідними.
5. Похідні складної функції. Повний диференціал складної функції.
6. Диференціювання неявно заданих функцій однієї і декількох змінних.
7. Частинні похідні вищих порядків; їх незалежність від порядку диференціювання.
8. Поняття скалярного поля. Лінії та поверхні рівня. Похідна по напрямку.
9. Градієнт скалярного поля і його зв'язок з похідною по напрямку.
10. Дотична площина і нормаль до поверхні.
11. Геометричний зміст повного диференціала функції двох змінних.
12. Застосування повного диференціала до наближених

обчислень.
13. Екстремуми функції декількох змінних. Необхідні умови екстремуму.
14. Достатні умови екстремуму для функції двох змінних.
15. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції двох змінних у обмеженій замкнутій області.

Розділ III. **Інтегральне числення функцій кількох змінних**

1. Задачі, що приводять до поняття подвійного інтеграла.
2. Означення подвійного інтеграла, основні властивості, умови існування, геометричний і механічний зміст.
3. Обчислення подвійного інтеграла в декартових координатах.
4. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах.
5. Застосування подвійного інтеграла.
6. Задача, що приводить до поняття потрійного інтеграла.
7. Означення потрійного інтеграла, основні властивості, умови існування, геометричний і механічний зміст.
8. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах.
9. Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних і сферичних координатах.
10. Застосування потрійного інтеграла.
11. Задачі, що приводять до поняття криволінійного інтеграла I-го типу.
12. Означення криволінійного інтеграла I-го типу, основні властивості, умови існування, геометричний і механічний зміст.
13. Обчислення криволінійного інтеграла I-го типу.
14. Застосування криволінійного інтеграла I-го типу.
15. Задача, що приводить до поняття криволінійного інтеграла II-го типу.
16. Означення криволінійного інтеграла II-го типу, основні властивості, умови існування, фізичний зміст.
17. Обчислення криволінійного інтеграла II-го типу.
18. Теорема Гріна. Обчислення площ плоских фігур за допомогою криволінійного інтеграла II-го типу.
19. Задача, що приводить до поняття поверхневого інтеграла I-го типу.
20. Означення поверхневого інтеграла I-го типу, основні властивості, умови існування, геометричний і механічний зміст.
21. Обчислення поверхневого інтеграла I-го типу.
22. Застосування поверхневого інтеграла I-го типу.
23. Задача, що приводить до поняття поверхневого інтеграла II-го типу.

24. Означення поверхневого інтеграла II-го типу, основні властивості, умови існування, фізичний зміст.
25. Обчислення поверхневого інтеграла II-го типу.
26. Векторні поля. Векторні лінії і векторні трубки.
27. Потік векторного поля через поверхню. Дивергенція і її обчислення в декартових координатах.
28. Теорема Гауса-Остроградського. Соленоїдні поля.
29. Лінійний інтеграл і циркуляція векторного поля. Ротор векторного поля і його обчислення. Теорема Стокса.
30.Умови незалежності лінійного інтеграла від форми шляху інтегрування. Теорема про необхідну і достатню умову незалежності лінійного інтеграла від форми шляху інтегрування.
31. Потенціальні поля. Умови потенціальності векторного поля. Знаходження потенціала векторного поля. Обчислення лінійного інтеграла у потенціальних полях.

***Розділ IV*. Ряди**

1. Поняття числового ряду. Збіжність і сумма ряду. Основні теореми про збіжні числові ряди.
2. Необхідна ознака збіжності числових рядів. Її недостатність.
3. Достатні ознаки збіжності рядів з додатніми членами. Теореми порівняння.
4. Ознака Даламбера. Радикальна ознака Коші.
5. Інтегральна ознака збіжності числових рядів.
6. Знакозмінні ряди. Абсолютна і умовна збіжність. Теорема про збіжність абсолютно збіжного ряду.
7. Знакопереміжні ряди. Теорема Лейбніца.Оцінка залишку ряду.
8. Степеневі ряди. Теорема Абеля.
9.Інтервал і радіус збіжності степеневого ряду. Основні властивості степеневих рядів.
10. Ряди Тейлора і Маклорена. Необхідна і достатня умови розкладу функції в ряд Тейлора.
11. Розклад в степеневий ряд функцій $e^x, e^{-x}, sh\,x, ch\,x$.
12. Розклад в степеневий ряд функцій sin x, cos x.
13. Розклад в степеневий ряд функції ln $(1+x)$.
14. Розклад в степеневий ряд функції arctg x.
15. Розклад в степеневий ряд функції $(1+x)^m$
16. Застосування степеневих рядів для наближеного обчислення значень функцій і визначених інтегралів.

17. Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

Розділ V. **Теорія імовірностей**

1. Масові випадкові явища. Предмет теорії ймовірностей. Події та їх класифікація. Алгебра подій.
2. Частоти і їх властивості. Ймовірність події. Аксіоми теорії ймовірностей.
3. Класичний і статистичний методи визначення базових ймовірностей. Елементи комбінаторики.
4. Властивості ймовірностей (ймовірність появи протилежної події, ймовірність появи неможливої події, теорема додавання ймовірностей будь яких двох подій, умовна ймовірність, теореми добутку ймовірностей для залежних і незалежних подій).
5. Формула повної ймовірності і формули Бейєса.
6. Послідовність незалежних випробувань. Схема Бернуллі. Формула Бернуллі. Найімовірніша частота появи події в незалежних пробах.
7. Граничні теореми Лапласа і Пуассона.
8. Поняття випадкової величини. Дискретні і неперервні випадкові величини. Функція розподілу і її властивості.
9. Розподіл дискретних випадкових величин. Типові розподіли: біноміальний і пуассонівський.
10. Неперервний і абсолютно неперервний розподіли. Функція розподілу і щільність розподілу абсолютно неперервних випадкових величин. Властивості щільності розподілу. Ймовірність попадання абсолютно неперервної випадкової величини в заданий інтервал.
11. Типові розподіли неперервних випадкових величин : рівномірний, нормальний. Крива Гауса.
12. Ймовірність попадання в заданий інтервал і ймовірність заданого відхилення для нормально розподіленої випадкової величини. Правило трьох сигм.
13. Математичне сподівання і дисперсія випадкових величин та їх властивості.
14. Математичне сподівання і дисперсія при типових розподілах випадкових величин : дискретних (біноміальному, пуассонівському), неперервних (рівномірному, нормальному).

6.2. Приклади і задачі для підготовки до складання модулів

Розділ І. **Звичайні диференціальні рівняння**

Диференціальні рівняння

Розв'язати диференціальні рівняння.

1. $y' = (y+1)\,ctg\,x;\quad y(\pi/2)=4.$ Відп. $y = 5\sin x - 1.$
2. $(1+e^x)\,y' = e^x y;\quad y(0)=4.$ Відп. $y = 2(1+e^x).$
3. $y' = \dfrac{y}{x} + tg\dfrac{y}{x}.$ Відп. $y = x\arcsin(Cx).$
4. $y' - \dfrac{y}{x} = x.$ Відп. $y = x^2 + Cx.$
5. $3y' + y = \dfrac{1}{y^2}.$ Відп. $y = \sqrt[3]{1+Ce^{-x}}.$
6. $y'' = \cos^2 x.$ Відп. $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C_1 x + C_2.$
7. $y'' + \dfrac{1}{x}y' = x.$ Відп. $y = \dfrac{x^3}{9} + C_1\ln|x| + C_2.$
8. $y y'' - (y')^2 = 0.$ Відп. $y = C_2 e^{C_1 x}.$
9. $y'' - 8y' + 15y = 0.$ Відп. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}.$
10. $y'' - 12y' + 36y = 0.$ Відп. $y = C_1 e^{6x} + C_2 x e^{6x}.$
11. $y'' - 4y' + 13y = 0.$

Відп. $y = C_1 e^{2x}\cos 3x + C_2 e^{2x}\sin 3x.$

12. $y'' + 16y = 0.$ Відп. $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x.$
13. $y''' - 13y'' + 12y' = 0.$ Відп. $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{12x}.$
14. $y''' - y'' - y' + y = 0.$ Відп. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + C_3 x e^x.$
15. $y'' - 5y' + 4y = 0.\quad y(0)=5;\quad y'(0)=8.$ Відп. $y = e^{-x}.$
16. $y'' - 7y' + 12y = 11.$ Відп. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x} + 11/12.$

17. $y''+4y=8.$ Відп. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+2.$

18. $y''-4y'+3y=8e^{5x}.$ $y(0)=3;\ y'(0)=7.$

Відп. $y=2e^{x}+e^{5x}.$

19. $y''+y=5\sin 2x.$ Відп. $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{5}{3}\sin 2x.$

20. Розв'язати систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+8y;\\ \dfrac{dy}{dt}=-x-3y.\end{cases}\quad \text{Відп.}\quad \begin{cases}x=C_1e^{t}+C_2e^{-t};\\ y=-4C_1e^{t}-2C_2e^{-t}.\end{cases}$$

Розділ II. **Диференціальне числення функції кількох змінних**

1. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції і її повний диференціал *dz*: $z=x^2+5x^3y^4+y^6+x^{\operatorname{ctg} y}+\arcsin\dfrac{x}{y}.$

2. Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції , якщо:

$$z=u^4\arccos^5 v;\quad u=y^x;\quad v=\frac{y^4}{x}.$$

3.Знайти частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функції , якщо:

$$2\operatorname{arctg} x+3x^2y+7y^4+2z^6-5\operatorname{tg} z=0.$$

4. Дана функція $z=\ln(x^2+y^2+2y+1).$ Довести, що

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \quad .$$

5. Знайти градієнт та похідну по напрямку вектора $\vec{s}$ скалярного поля $U=U(x,y,z)$ в точці М:

$$U=4x+\ln(y^2+z^2+5); \quad \vec{s}=2\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}; \quad \text{M}(1;2;1).$$

Відп. $grad\, U(M)=4\vec{i}+0{,}4\vec{j}+0{,}2\vec{k}; \quad \frac{\partial U}{\partial s}(M)=\frac{8}{3}.$

6. Дано рівняння поверхні в неявному вигляді $F(x,y,z)=0$. Потрібно скласти рівняння дотичної площини і рівняння нормалі до заданої поверхні в точці $M_0(x_{0,}y_{0,}z_0)$:

$$xyz^2+2y^2+3yz+4=0; \quad x_0=0; \quad y_0=2.$$

Відп. $4x+y+3z+4=0; \quad \frac{x}{4}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{3}.$

7. Дослідити задану функцію на екстремум:

$$z=x^2+y^2-xy+x+y+5.$$

Відп. $z_{min}=z(-1;-1)=4.$

Розділ III. Інтегральне числення функцій кількох змінних

Подвійні інтеграли

1. Змінити порядок інтегрування: $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^3}^{2x} f(x,y)\,dy.$

2. Обчислити $\iint\limits_D (x-y)\,dxdy,$ якщо область D обмежена лініями: $y=2-x^2;\ y=2x-1.$ Відп. а) $4\frac{4}{15}$; б) 2; в) $5\frac{2}{15}$

3. За допомогою подвійного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=6-x^2;\ y=6-3x.$ Відп. а) 4; б) 3; в) 4,5 .

4. За допомогою подвійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями: $z=x^2+y^2;\ x+y=3;\ x=0;\ y=0;\ z=0.$
Відп. а) 12,5; б) 13,5; в) 16,5 .

5. Знайти масу круглої пластинки $x^2+y^2\le 4$, якщо щільність розподілу мас $\rho(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$

Відп. а) $\frac{14}{3}\pi$; б) 6π ; в) $\frac{16}{3}\pi$.

6. Знайти момент інерції однорідного прямокутника із сторонами a і b відносно сторони b .

Відп. а) $\frac{ab^3}{3};$; б) $\frac{a^3b}{3};$; в) $\frac{a^3b}{12}.$

7. Знайти момент інерції круга радіуса 2 см відносно його діаметра.
Відп. а) $6\pi(см^4)$; б) $8\pi(см^4)$; в) $4\pi(см^4)$.

Потрійні інтеграли

8. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=8-x^2-y^2 \; ; \quad x^2+y^2=4 \; ; \quad z=0.$$

Відп. а) 24π ; б) 36π ; в) 16π .

9. За допомогою потрійного інтеграла знайти координати центра мас однорідного параболоїда: $z=6-x^2-y^2; \; z=0.$
Відп. а) (0;0;2); б) (0;0;3); в) (0;0;4).

Криволінійні інтеграли I роду

10. Обчислити $\int\limits_{AB}(x-4y)\,dl$, де AB – відрізок прямої AB, і A(0;0), B(1;1). Відп. а) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$; б) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{2}$; в) $\dfrac{-3\sqrt{2}}{8}$.

11. Знайти площу частини бічної поверхні циліндра $x^2+y^2=4$, що відтинається поверхнями: $z=0\,; \; z=y^3; \; (y>0).$
Відп. а) 32/3; б) 64/3; в) 8/3 .

12. Знайти довжину півкубічної параболи $y^2=x^3$ від точки A(0;0) до точки B (16;64).

Відп. а) $\dfrac{8}{27}\cdot(37\sqrt{37}-1)$; б) $\dfrac{8}{27}\cdot(17\sqrt{17}-1)$.

13. Обчислити довжину кардіоїди $r=8(1-\cos\varphi).$
Відп. а) 32; б) 64; в) 16 .

14. Знайти довжину пів-арки циклоїди:

$$x=9(t-\sin t), \quad y=9(1-\cos t), \quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

Відп. а) 9; б) 18; в) 36 .

15. Знайти масу частини лінії y= ln x , що знаходиться між точками $A(1;0)$ і $B(4;\ln 4)$, якщо $\rho(x, y)=x^2$.

Відп. а) $\frac{1}{3}\cdot(27\sqrt{27}-2\sqrt{2})$; б) $\frac{1}{3}\cdot(17\sqrt{17}-2\sqrt{2})$.

Криволінійні інтеграли II роду

16. Знайти $\oint_L 5\,ydx+2\,xdy$, де L - контур трикутника АВС: А(3;3), В(5;3), С(4;4) безпосередньо і за формулою Гріна.

Відп. а) 6; б) 3; в) -3 .

17. За допомогою криволінійного інтеграла знайти площу еліпса: $x=6\cos t;\ \ y=2\sin t;\ \ 0\le t\le 2\pi$.

Відп. а) 12π ; б) 24π ; в) $\frac{3}{8}\pi$.

18. За допомогою криволінійного інтеграла знайти площу, обмежену астроїдою: $x=2\cos^3 t;\ \ y=2\sin^3 t;\ \ 0\le t\le 2\pi$.

Відп. а) $\frac{3}{2}\pi$; б) $\frac{3}{4}\pi$; в) $\frac{3}{8}\pi$.

Поверхневі інтеграли I роду

19. Обчислити $I=\iint_W \sqrt{9-x^2-y^2}\,dw$, де W – верхня частина сфери $x^2+y^2+z^2=9$. Відп. а) 3π ; б) 9π ; в) 27π .

20. Знайти площу частини параболоїда $z=16-x^2-y^2$, що знаходиться над площиною $z=0$.

Відп. а) $\frac{\pi}{6}\cdot(65\sqrt{65}-1)$; б) $\frac{\pi}{6}\cdot(17\sqrt{17}-1)$.

21. Знайти масу частини поверхні параболоїда $z=1-x^2-y^2$,що знаходиться над площиною $z=0.$, якщо

$$\rho(x,y,z)=\frac{1}{1+4x^2+4y^2} .$$

Відп. а) $\frac{\pi}{2}\cdot(\sqrt{10}-1)$; б) $\frac{\pi}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)$.

Поверхневі інтеграли ІІ роду

22. Обчислити інтеграл $\oiint\limits_{w} z\cos\gamma\, dw$ по замкненій поверхні, що складається з нижньої півсфери $x^2+y^2+z^2=1$ і частини площини $z=0.$ Відп. а) $\frac{3\pi}{4}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{3\pi}{2}$.

23. Обчислити інтеграл $\oiint\limits_{w} z\cos\gamma\, dw$ по замкненій поверхні, що складається з частини параболоїда $z=1-x^2-y^2$ і частини площини $z=0.$ Відп. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2}$.

Елементи теорії векторних полів

24. Знайти потік вектора $\vec{a}=z\vec{k}$ через замкнену поверхню, обмежену поверхнями $z=0\,;\ z=4-x^2;\ x^2+y^2=4$ (за формулою Остроградського). Відп. а) 8π ; б) 12π ; в) $\frac{2\pi}{3}$.

25. Встановити, яким є векторне поле

$$\vec{F}=(8x+3yz)\vec{i}+(8y+3xz)\vec{j}+(8z+3xy)\vec{k}$$

а) потенціальним; б) соленоїдним. Якщо поле $\vec{F}$ потенціальне, то знайти його потенціал.

Відп. а) $U=4x^2+4y^2+4z^2+3xyz+C$;

б) $U=8x^2+8y^2+8z^2+3xy+3xz+3yz+C$.

Розділ IV. **Ряди**

1. Дослідити на збіжність числовий ряд, користуючись ознакою Даламбера: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3}{9^n}$. Відп. Зб.

2. Дослідити на збіжність числовий ряд, користуючись інтегральною ознакою Коші : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n+2}$. Відп. Зб.

3. За допомогою ознаки Лейбніца дослідити на збіжність знакопереміжний ряд. Якщо ряд збіжний, встановити характер збіжності (абсолютна чи умовна) : $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^5}$. Відп. Зб. Абс.

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{(n+1)^2 9^n}$.

Відп. (-3;15).

5. Обчислити визначений інтеграл з точністю до 0,001 :

$\int\limits_0^1 \cos(x^2)\,dx$. Відп. 0,905.

6. Знайти три перші, відмінні від нуля, члени розкладу в

степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння при заданій початковій умові:

$$y'=e^{5x}+x^2+2xy;\quad y(0)=1.\quad \text{Відп.}\quad y=1+x+\frac{7}{2}x^2.$$

Розділ V. **Теорія імовірностей**

1. Прилад складається з трьох вузлів. Ймовірність безвідмовної роботи на протязі року першого вузла становить 0,6 ; другого – 0,7 ; третього – 0,8. Вузли виходять з ладу незалежно один від одного. Яка ймовірність, що на протязі року вийдуть з ладу не більше двох вузлів? Відп. 0,664 .

2. Гральний кубик підкинуто два рази. Знайти ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює 6. Відп. 5/36 .

3. В будівельній бригаді 20 чоловіків і 10 жінок. По табельних номерах навмання відбирають 9 робітників. Яка ймовірність, що серед них буде 5 чоловіків і 4 жінки? Відп. 0,57.

4. Студент здає іспит по трьох розділах програми, кожний з яких містить по 20 питань. Студент знає 18 питань з першого розділу, 16 питань – з другого і 12 питань з третього розділу програми. Яка ймовірність здати іспит, якщо для цього потрібно вірно відповісти не менше, ніж на два питання? Відп. 0,876 .

5. Відділ технічного контролю перевіряє партію з 10 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число деталей, які будуть визнані стандартними. Відп. 9 .

6. Знайти ймовірність того, що подія A відбудеться 86 разів у 100 випробуваннях, якщо ймовірність появи цієї події в кожному випробуванні дорівнює 0,9. Відп. 0,055 .

7. Підприємство випускає в середньому 80% продукції першого сорту. Знайти ймовірність того, що в партії із 1000 виробів число першосортних знаходиться між 780 і 810. Відп. 0,727 .

8. Для постачання води на деяке будівництво використовують два незалежно працюючих трубопроводи. Ймовірність розриву трубопроводу внаслідок гідравлічного удару на протязі кварталу складає для першого з них 0,1; для другого – 0,2. X – число розірваних на протязі кварталу трубопроводів. Написати ряд розподілу величини X. Побудувати багатокутник розподілу.

Відп.

x_i	0	1	2
p_i	0,72	0,26	0,02

9. Два рівносильних шахіста грають у шахи. Що більш ймовірно виграти: одну партію з двох чи три партії з шести?
Відп. Одну з двох.

10. Монету підкидають 3 рази. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа появ герба. Побудувати багатокутник розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї величини.
Відп. $M(X)$ =3/2; $D(X)$ =3/4; $\sigma(X) = \sqrt{3}/2$.

11. Гральний кубік підкидають 3 рази. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа появ “4”. Побудувати багатокутник розподілу. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення цієї величини.
Відп. $M(X)$ =1/2; $D(X)$ =1/12; $\sigma(X) = 1/2\sqrt{3}$.

12. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{при } x\leqslant 2; \\ \dfrac{1}{36}(x-2)^2, \text{ при } 2<x\leqslant 8; \\ 1, \text{при } x>8. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу і побудувати графіки функції розподілу та щільності розподілу.

13. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\; x\leqslant 2; \\ \dfrac{1}{36}(x-2)^2, при\; 2<x\leqslant 8; \\ 1, при\; x>8. \end{cases}$$

Знайти ймовірність попадання в інтервал (5;10). Відп. 0,75 .

14. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases} 0, при\; x\leqslant 2; \\ \dfrac{1}{36}(x-2)^2, при\; 2<x\leqslant 8; \\ 1, при\; x>8. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання та дисперсію цієї величини.
Відп. $M(X)=6$; $D(X)=2$.

15. Знайти математичне сподівання, дисперсію та побудувати багатокутник розподілу дискретної випадкової величини X:

x_i	-2	4	6
p_i	0,3	0,2	0,5

Відп. $M(X)=3{,}2$; $D(X)=12{,}16$.

16. Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, розподіленої по закону рівномірної щільності у інтервалі (4;12).
Відп. $M(X)=8$; $D(X)=5{,}33$; $\sigma(X)=2{,}31$.

17. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини Х відповідно рівні 8 і 2. Знайти $P(4<X<14)$. Відп. 0,998 .

18. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $M(X)=2$ і дисперсією $D(X)=1/4$. Записати аналітичний вираз щільності розподілу і побудувати криву Гауса. Відп. $p(x)=\sqrt{2/\pi}\ e^{-2(x-2)^2}$.

19. Випадкова величина X розподілена нормально. Середнє квадратичне відхилення цієї величини дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини від її математичного сподівання по модулю менше 0,5. Відп. 0,988 .

20. Випадкова величина X розподілена нормально з середнім квадратичним відхиленням $\sigma=3$ і математичним сподіванням M=4. Знайти інтервал її практично можливих значень і побудувати криву Гауса. Відп. (-2 ; 13) .

21. Завод залізобетонних виробів виготовляє будівельні блоки. Можна вважати, що маса блока є нормально розподілена випадкова величина X з математичним сподіванням (проектною масою) a кг і середнім квадратичним відхиленням σ кг. Знайти ймовірності того, що маса навмання взятого блока буде: 1) знаходитись в межах від α до β кг; 2) відхилятись від проектної маси по абсолютній величині менше ніж на δ кг.

$a = 600$; $\sigma = 10$; $\alpha = 580$; $\beta = 615$; $\delta = 15$.

Відп. 1) 0,910 ; 2) 0,866 .

6.3. Складання змістових модулів

Так як даний семестр закінчується заліком, то студент може набрати на протязі семестру до 100 балів. Число змістових розділів відповідає числу розділів, що вивчаються у даному семестрі, тобто 5. За кожний змістовий модуль нараховується до 20 балів.

Теоретичні питання і типові приклади для кожного розділу наведені вище. З них і формуються питання білетів для складання відповідних модулів для студентів денної форми навчання. Частина з цих балів може бути нарахована по результатам усного опитування, за активність студента на практичних заняттях , а частина за виконання самостійної роботи. Два модулі з 5 здаються за тестовою формою. Наприклад, за тестовою формою можуть складатися розділи: “ Звичайні диференціальні рівняння” і “Ряди”. У студентів заочної форми навчання та студентів з інтегрованих груп число аудиторних годин обмежене, внаслідок чого заняття носять переважно оглядовий характер. Виконання, оформлення і захист комплексної самостійної роботи, 30 варіантів якої наведено вище, дозволяє їм набрати мінімальну кількість балів, для одержання заліку. Більшу кількість балів студент може одержати за виконання додаткових теоретичних завдань і розв’язування задач і прикладів, перелік яких наведено вище, на практичних заняттях або під час заліку.

Довідковий матеріал
Основні правила диференціювання

1. Якщо C = const, то $C'=0$.
2. Якщо x незалежна змінна, то $x'=1$.
3. Якщо $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані функції, то:

   $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x);$
4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$ $\qquad (C\cdot v)'=C\cdot v';$
5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$, при умові, що $v(x)\neq 0;$

   $\left(\dfrac{u}{C}\right)'=\dfrac{u'}{C};$ $\qquad \left(\dfrac{C}{v}\right)'=\dfrac{-C\cdot v'}{v^2};$
6. Якщо $y=y(u)$, де $u=u(x)$, то $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. (правило диференціювання складної функції, при умові, що $y(u)$ і $u(x)$ диференційовані функції).

Таблиця похідних основних елементарних функцій

Нехай u(x) – диференційована функція. Тоді:

1	$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u';$	9	$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
2	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u';$	10	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
3	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$	11	$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
4	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$	12	$(\mathrm{ctg}\, u)' = \dfrac{-1}{\sin^2 u} \cdot u';$
5	$(\mathrm{e}^u)' = \mathrm{e}^u \cdot u';$	13	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
6	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$	14	$(\arccos u)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
7	$\left(\lg u\right)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln 10} \cdot u';$	15	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$
8	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u';$	16	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = \dfrac{-1}{1+u^2} \cdot u';$

Таблиця інтегралів

Нехай u(x) – диференційована функція. Тоді:

№п/п	Невизначений інтеграл
1	2
1	$\int du = u + C;$
2	$\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C;\ (\alpha \neq -1);$
3	$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + C;$
4	$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$
5	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C;$
6	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ де\ \ 0 < a \neq 1;$
7	$\int e^u du = e^u + C;$
8	$\int \sin u\, du = -\cos u + C;$
9	$\int \cos u\, du = \sin u + C;$
10	$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}\right)\right\rvert + C;$
11	$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C;$

1	2
12	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C;$
13	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C;$
14	$\int \mathrm{tg}\, u\, du = -\ln\lvert\cos u\rvert + C;$
15	$\int \mathrm{ctg}\, u\, du = \ln\lvert\sin u\rvert + C;$
16	$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C;$
17	$\int \frac{du}{1 + u^2} = \mathrm{arctg}\, u + C;$
18	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$
19	$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \arcsin u + C;$
20	$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a + u}{a - u}\right\rvert + C;$
21	$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a - u}{a + u}\right\rvert + C;$
22	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a}\right\rvert + C;$

Таблиця стандартних розкладів деяких елементарних функцій в степеневі ряди

1. $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots;$ $\quad (-\infty < x < \infty).$

2. $\operatorname{sh} x = \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \ldots;$ $\quad (-\infty < x < \infty).$

3. $\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \ldots;$ $\quad (-\infty < x < \infty).$

4. $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} \pm \ldots;$ $\quad (-\infty < x < \infty).$

5. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} \pm \ldots;$ $\quad (-\infty < x < \infty).$

6. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} \pm \ldots;$ $\quad (-1 < x \le 1).$

7. $\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots;$ $\quad (-1 \le x \le 1).$

8. $(1+x)^m = 1 + \dfrac{m}{1!}x + \dfrac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots;$

Останній розклад вірний : при $m \ge 0$, якщо $-1 \le x \le 1$;
при $-1 < m < 0$, якщо $-1 < x \le 1$;

при $m \le -1$, якщо $-1 < x < 1$.

Таблиця значень функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$. При $x \geqslant 3,7$ $\varphi(x)=0$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,399	399	399	399	399	399	398	398	398	398
0,1	397	396	396	396	395	394	394	393	392	392
0,2	391	390	389	388	388	387	386	385	384	382
0,3	381	380	379	378	376	375	374	373	371	370
0,4	368	367	365	364	362	361	359	357	356	354
0,5	352	350	348	347	345	343	341	339	337	335
0,6	333	331	329	327	325	323	321	319	317	314
0,7	312	310	308	306	303	301	299	297	294	292
0,8	290	287	285	283	280	278	276	273	271	268
0,9	266	264	261	259	257	254	252	249	247	244
1,0	242	240	237	235	232	230	228	225	223	220
1,1	218	216	213	211	208	206	204	201	199	197
1,2	194	192	190	187	185	183	180	178	176	174
1,3	171	169	167	165	163	160	158	156	154	152
1,4	150	148	146	144	142	139	137	135	133	132
1,5	130	128	126	124	122	120	118	116	115	113
1,6	111	109	107	106	104	102	101	099	097	096
1,7	094	093	091	089	088	086	085	083	082	080
1,8	079	078	076	075	073	072	071	069	068	067
1,9	066	064	063	062	061	060	058	057	056	055
2,0	054	053	052	051	050	049	048	047	046	045
2,1	044	043	042	041	040	040	039	038	037	036
2,2	036	035	034	033	033	032	031	030	030	029
2,3	028	028	027	026	026	025	025	024	024	023
2,4	022	022	021	021	020	020	019	019	018	018
2,5	018	017	017	016	016	015	015	015	014	014
2,6	014	013	013	013	012	012	012	011	011	011
2,7	010	010	010	010	009	009	009	009	008	008
2,8	008	008	007	007	007	007	007	007	006	006
2,9	006	006	006	006	005	005	005	005	005	005
3,0	004	004	004	004	004	004	004	004	004	004
3,1	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003
3,2	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002
3,3	002	002	002	002	002	002	001	001	001	001
3,4 -3,6	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001

Таблиця значень $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{\frac{-t^2}{2}}dt.$ При $x\geqslant 3,3$ $\Phi(x)=0,5$

.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	004	008	012	016	020	024	028	032	036
0,1	040	044	048	052	056	060	064	068	071	075
0,2	079	079	087	091	095	099	103	106	110	114
0,3	118	118	126	129	133	137	141	144	148	152
0,4	155	155	162	166	170	174	177	181	184	188
0,5	192	195	199	202	205	209	212	216	219	222
0,6	226	229	232	236	239	242	245	249	252	255
0,7	258	261	264	267	270	273	276	279	282	285
0,8	288	291	294	297	300	302	305	308	311	313
0,9	316	319	321	324	326	329	332	334	337	339
1,0	341	344	346	349	351	353	355	358	360	362
1,1	364	367	369	371	373	375	377	379	381	383
1,2	385	387	389	391	393	394	396	398	400	402
1,3	403	405	407	408	410	412	413	415	416	418
1,4	419	421	422	424	425	427	428	429	431	432
1,5	433	435	436	437	438	439	441	442	442	444
1,6	445	446	447	448	450	451	452	453	454	455
1,7	455	456	457	458	459	460	461	462	463	463
1,8	464	465	466	466	467	468	469	469	470	471
1,9	471	472	473	473	474	474	475	476	476	472
2,0	477	478	478	479	480	480	481	481	481	481
2,1	482	483	483	484	484	485	486	486	485	485
2,2	486	486	487	488	488	488	488	489	489	489
2,3	489	489	490	490	491	491	491	491	491	492
2,4	492	492	492	493	493	493	493	493	493	494
2,5	494	494	494	495	495	495	495	495	495	495
2,6	495	495	496	496	496	496	496	496	496	496
2,7	497	497	497	497	497	497	497	497	497	497
2,8	497	498	498	498	498	498	498	498	498	498
2,9	498	498	498	498	498	499	499	499	499	499
3,0	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,1	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499
3,2	499	499	499	499	499	499	499	499	499	499

10. Рекомендована література

1.Шкіль М.І. Звичайні диференціальні рівняння: [навчальний посібник] / Шкіль М.І., Сотніченко М.А. –К.: Вища школа, 1992.–304 с.

2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. –М.:Наука., 1985. Т.1.2.

3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. -–М.: Высшая школа, 1980. Ч.1,2

4. Задачи и упражнения по математическому анализу /Под редакцией Демидовича Б.П./ .-М.:Наука, 1978.

5. Брушковський О.Л. Вища математика. Частина ІІ. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної. Звичайні диференціальні рівняння : [навчальний посібник] /О.Л. Брушковський . – Рівне: НУВГП. 2008. – 266 с.

6. Брушковський О.Л. Вища математика. Частина ІІІ. Диференціальне та інтегральне числення функції кількох змінних. Елементи теорії поля: [навчальний посібник] /О.Л. Брушковський . – Рівне: НУВГП. 2010. – 156 с.

7. Брушковський О.Л. Вища математика. Частина IV. Ряди. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики: [навчальний посібник] /О.Л. Брушковський . – Рівне: НУВГП. 2010. – 246 с.

8. Брушковський О.Л. Вища математика. Для студентів І курсу заочної форми навчання напрямів підготовки “Економіка підприємства”, “Облік і аудит”, “Фінанси і кредит”: [навчальний посібник] / О.Л. Брушковський., І.В. Дубчак. – Рівне, НУВГП, 2010.─ 144 с.

9. Мізюк В.Г. Вища математика: [навчальний посібник] / В.Г. Мізюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 245 с.

10. Брушковський О.Л. Вища математика. Для студентів І курсу заочної форми навчання напрямів підготовки “Економіка підприємства”, “Облік і аудит”, “Фінанси і кредит”: [навчальний посібник] / О.Л. Брушковський., І.В. Дубчак. – Рівне, НУВГП, 2010. ─ 144 с.