УДК 628.315.3+517.95

Сівак В. М., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)**, Климюк Ю. Є., к.т.н., викладач** (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОСТОРОВИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ПРОЦЕСІВ РЕГЕНЕРАЦІЇ ОДНОРІДНИХ ЗАВАНТАЖЕНЬ ДООЧИСНИХ ФІЛЬТРІВ

У роботі запропонована математична модель для прогнозування процесу регенерації доочисних фільтрів, які мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії, з однорідним пористим завантаженням, що характеризується сталими коефіцієнтами фільтрації і дифузії та змінною пористістю. Отримано алгоритм числово-асимптотичного наближення розв'язку відповідної модельної задачі. Проведено числовий експеримент.
Ключові слова: регенерація, фільтр, коефіцієнт фільтрації, пористість.

В работе предложена математическая модель для прогнозирования процесса регенерации доочисных фильтров, которые имеют форму криволинейных параллелепипедов, ограниченных двумя эквипотенциальными поверхностями и четырьмя поверхностями течения, с однородным пористым загрузкой, характеризуется постоянными коэффициентами фильтрации и диффузии и переменной пористостью. Получены алгоритм численно-асимптотического приближения решения соответствующей модельной задачи. Проведено численный эксперимент.
Ключевые слова: регенерация, фильтр, коэффициент фильтрации, пористость.

Mathematical model to predict the regeneration process purifying filters, which has the form of a curvilinear parallelepipeds, bounded by two equipotential surfaces and four surfaces of current, with a homogeneous porous loadings, characterized by constant coefficients and diffusion filtering and variable porosity, is offered. The algorithm for numerically-asymptotic approximation of solution of the model problem is developed. Numerical experiment is made.
Keywords: regeneration, filter, filtration coefficient, porosity.

Вступ. На сучасному етапі розвитку суспільства все більш зростає потреба у фільтруванні великих об'ємів рідин. При цьому зростає і вартість фільтруючих матеріалів. Все це з одного боку обумовлює необхідність проведення оптимізації форми фільтрувальних установок для доочистки води за рахунок більш якісного використання завантаження та

збільшення тривалості фільтроциклу [2, 4], а з іншого – дослідження повторного використання завантаження за рахунок промивки (рис. 1) [6].

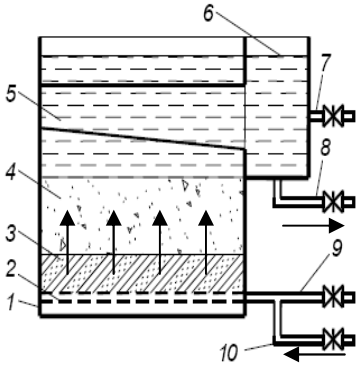


Рис. 1. Схема промивки швидкого фільтру з пористим завантаженням:
1 – місткість;
2 – розподільна система;
3 – підтримувальні шари;
4 – фільтруюча засипка;
5 – жолоб;
6 – боковий карман;
7 – подача вихідної води;
8 – відведення промивної води;
9 – подача промивної води;
10 – відведення фільтру

При подальшому дослідженні таких процесів виникає чимало труднощів, пов'язаних із повздовжніми і поперечними викривленостями області, в якій шукається розв’язок, та складністю рівнянь у частинних похідних і граничних умов відповідних модельних задач за рахунок врахування зворотного впливу характеристик процесу на характеристики середовища.

Одним із ефективних шляхів розв’язання такого роду задач для випадків областей, обмежених еквіпотенціальними (квазіеквіпотенціальними) поверхнями і поверхнями течії, є поетапна фіксація характеристик складових процесу і середовища та послідовне розв’язання фільтраційної задачі з використанням квазіконформних (конформних) відображень області комплексного квазіпотенціалу (потенціалу) на фізичну область (що включає побудову гідродинамічної сітки, поля швидкостей, обчислення величин різних перетоків тощо) [5] і сингулярно збуреної задачі типу “конвекція-дифузія-масообмін”, записаної відносно координат області комплексного квазіпотенціалу (потенціалу), з використанням числово-асимптотичних методів [2, 4, 8].

У цій роботі нами відповідну методику адаптовано для моделювання процесу регенерації однорідних завантажень доочисних фільтрів, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями і чотирма поверхнями течії.

Загальна постановка задачі. Для області $G = G_z \times (0,\infty)$ ($z = (x, y, z)$), $G_z = ABCDA_*B_*C_*D_*$ – однозв’язний криволінійний паралелепіпед, обмежений гладкими, ортогональними між собою в кутових точках та по ребрах, двома еквіпотенціальними поверхнями $ABB_*A_* = \{z:\ f_1(x, y, z) = 0\}$, $CDD_*C_* = \ = \{z:\ f_2(x, y, z) = 0\}$ і чотирма поверхнями течії $ADD_*A_* = \{z:\ f_3(x, y, z) = 0\}$, $BCC_*B_* = \{z:\ f_4(x, y, z) = 0\}$, $ABCD = \{z:\ f_5(x, y, z) = 0\}$, $A_*B_*C_*D_* = \{z:\ \ f_6(x, y, z) = 0\}$ (рис. 2, а), розглянемо модельну задачу прогнозування процесу регенерації доочисного

фільтру, що описується наступною нелінійною сингулярно збуреною системою рівнянь:

$$\vec{v} = \kappa \cdot grad\ \varphi,\ div\ \vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} (\sigma \cdot C)'_t + (\sigma \cdot U)'_t = div\,(D \cdot grad\ C) - \vec{v} \cdot grad\ C, \\ (\sigma \cdot U)'_t = \alpha \cdot C - \beta \cdot U,\ \sigma'_t = \lambda \cdot U \end{cases} \tag{2}$$

за наступних крайових умов:

$$\varphi\big|_{ABB_*A_*} = \varphi_*,\ \varphi\big|_{CDD_*C_*} = \varphi^*,\ \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0, \tag{3}$$

$$C\big|_{ABB_*A_*} = c^*(M,t),\ \frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial \vec{n}}\Big|_{CDD_*C_*} = 0,$$

$$\frac{\partial C(x,y,z,t)}{\partial \vec{n}}\Big|_{ADD_*A_* \cup BCC_*B_* \cup ABCD \cup A_*B_*C_*D_*} = 0 \tag{4}$$

і початкових умов:

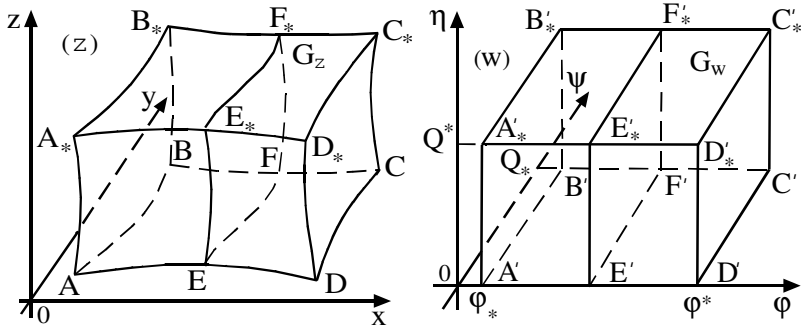
$$C(x,y,z,0) = c_0^0(x,y,z),\ U(x,y,z,0) = u_0^0(x,y,z),$$

$$\sigma(x,y,z,0) = \sigma_0^0(x,y,z), \tag{5}$$

де $C = C(x,y,z,t)$ – концентрація забруднюючих домішок у воді, якою здійснюється промивання, $U = U(x,y,z,t)$ – концентрація забруднюючих домішок в осаді у завантаженні в точці $z = (x,y,z)$ у момент часу t, $\beta = \beta(x,y,z,t)$ і $\alpha = \varepsilon \cdot \bar{\alpha}(x,y,z,t)$ – функції, які характеризують відповідно обсяги десорбованих і сорбованих за одиницю часу домішкових частинок, $\sigma = \sigma(x,y,z,t)$ – активна пористість середовища ($0 < \sigma < 1$), $\lambda = \varepsilon \cdot \bar{\lambda}(x,y,z,t)$ – функція, яка характеризує швидкість зміни активної пористості середовища, $D = \varepsilon \cdot d$ – коефіцієнт дифузії домішки у воді, d – додатне дійсне число, ε – малий параметр (він характеризує переваги одних складових процесу над іншими), $c_*(M,t)$, $c_0^0(x,y,z)$, $u_0^0(x,y,z)$, $\sigma_0^0(x,y,z)$ – достатньо гладкі функції, причому перші дві “сильно” узгоджені між собою на ребрах області G [1, 3], M – довільна точка поверхні ABB_*A_*.

Шляхом введення пари функцій $\psi = \psi(x,y,z)$, $\eta = \eta(x,y,z)$ (просторово комплексно спряжених із функцією $\varphi(x,y,z)$), таких, що $\kappa \cdot grad\,\varphi = grad\,\psi \times grad\,\eta$ [7] і заміною останніх чотирьох з граничних умов

(3) на умови: $\psi\big|_{ADD_*A_*}=0$, $\psi\big|_{BCC_*B_*}=Q_*$, $\eta\big|_{ABCD}=0$, $\eta\big|_{A_*D_*C_*B_*}=Q^*$, задача (1), (3) замінюється більш загальною прямою задачею на знаходження



а) б)

Рис. 2. Просторова фізична область G_z (а) та відповідна їй область комплексного потенціалу G_w (б)

просторового аналогу конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w=\{w=(\varphi,\psi,\eta):\ \varphi_*<\varphi<\varphi^*,\ 0<\psi<Q_*,\ 0<\eta<Q^*\}$ (рис. 2, б), де Q_*, Q^* – невідомі параметри, $Q_*\cdot Q^*=Q=\int\limits_{EFF_*E_*}\frac{\partial\varphi}{\partial s}ds$ – кількість рідини, що проходить через деяку еквіпотенціальну поверхню EFF_*E_* області G_z (повна фільтраційна витрата). Припустимо, що ця задача є розв'язаною [5], зокрема знайдено параметри Q_*, Q^*, Q і поле швидкостей $\vec{v}$. Здійснивши заміну змінних $x=x(\varphi,\psi,\eta)$, $y=y(\varphi,\psi,\eta)$, $z=z(\varphi,\psi,\eta)$ у рівнянні (2) та умовах (4), (5), отримаємо відповідну "дифузійну задачу" для області $G_w\times(0,\infty)$:

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}\cdot c'_t+\tilde{\sigma}'_t\cdot c=\varepsilon\cdot d\cdot\left(\dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa^2}\cdot c''_{\varphi\varphi}+b_{1,1}\cdot c''_{\psi\psi}+b_{1,2}\cdot c''_{\eta\eta}+b_{2,1}\cdot c'_\psi+b_{2,2}\cdot c'_\eta\right)-\\ -\dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa}\cdot c'_\varphi-\tilde{\sigma}\cdot u'_t+\tilde{\sigma}'_t\cdot u,\ \tilde{\sigma}\cdot u'_t+\tilde{\sigma}'_t\cdot u=\varepsilon\cdot\tilde{\alpha}\cdot c-\tilde{\beta}\cdot u,\ \tilde{\sigma}'_t=\varepsilon\cdot\tilde{\lambda}\cdot u,\end{cases}\tag{6}$$

$$c(\varphi_*,\psi,\eta,t)=\tilde{c}_*(\psi,\eta,t),\ c'_\varphi(\varphi^*,\psi,\eta,t)=0,$$

$$c'_\psi(\varphi,0,\eta,t)=c'_\psi(\varphi,Q_*,\eta,t)=c'_\eta(\varphi,\psi,0,t)=c'_\eta(\varphi,\psi,Q^*,t)=0,\tag{7}$$

$$c(\varphi,\psi,\eta,0)=\tilde{c}_0^0(\varphi,\psi,\eta),\ u(\varphi,\psi,\eta,0)=\tilde{u}_0^0(\varphi,\psi,\eta),$$

$$\tilde{\sigma}(\varphi,\psi,\eta,0)=\tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta),\tag{8}$$

де
$$c = c(\varphi,\psi,\eta,t) = C\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$u = u(\varphi,\psi,\eta,t) = U\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}(\varphi,\psi,\eta,t) = \sigma\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$\tilde{c}_*(\psi,\eta,t) = c_*\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$\tilde{c}_0^0(\varphi,\psi,\eta) = c_0^0\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\big),$$
$$\tilde{u}_0^0(\varphi,\psi,\eta) = u_0^0\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\big),$$
$$\tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta) = \sigma_0^0\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\big),$$
$$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(\varphi,\psi,\eta,t) = \overline{\alpha}\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\varphi,\psi,\eta,t) = \beta\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(\varphi,\psi,\eta,t) = \overline{\lambda}\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta), t\big),$$
$$\tilde{v} = \tilde{v}(\varphi,\psi,\eta) = v\big(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\big);$$
$$b_{1,1} = b_{1,1}(\varphi,\psi,\eta) = \psi_x'^2 + \psi_y'^2 + \psi_z'^2,\ b_{1,2} = b_{1,2}(\varphi,\psi,\eta) = \eta_x'^2 + \eta_y'^2 + \eta_z'^2,$$
$$b_{2,1} = b_{2,1}(\varphi,\psi,\eta) = \psi_{xx}'' + \psi_{yy}'' + \psi_{zz}'',\ b_{2,2} = b_{2,2}(\varphi,\psi,\eta) = \eta_{xx}'' + \eta_{yy}'' + \eta_{zz}''\ \text{[2].}$$

Розв'язання задачі. Асимптотичне наближення розв'язку задачі (6)-(8) з точністю $O(\varepsilon^{n+1})$ шукатимемо у вигляді таких рядів:

$$c = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot c_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot P_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot p_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{P}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{\tilde{P}}_i +$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{H}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{\tilde{H}}_i + R_{n+1}, \tag{9}$$

$$u = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot u_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot \breve{P}_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot \breve{p}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{P}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{\widehat{P}}_i +$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{H}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{\widehat{H}}_i + \breve{R}_{n+1}, \tag{10}$$

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\cdot\tilde{\sigma}_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\breve{\tilde{P}}_i + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\cdot\breve{\tilde{p}}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{p}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\tilde{\tilde{p}}_i +$$
$$+\sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{p}_i + \sum_{i=0}^{2n+1}\varepsilon^{i/2}\cdot\widehat{\widehat{p}}_i + r_{n+1}, \tag{11}$$

де $c_i(\varphi,\psi,\eta,t)$, $u_i(\varphi,\psi,\eta,t)$, $\tilde{\sigma}_i(\varphi,\psi,\eta,t)$ ($i=\overline{0,n}$) – члени регулярних частин

асимптотик, $P_i(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$, $\breve{P}_i(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$, $\breve{\breve{P}}_i(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) і $p_i(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t)$, $\breve{p}_i(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t)$, $\breve{\breve{p}}_i(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t)$ ($i=\overline{0,n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\varphi=\varphi^*$ та $\varphi=\varphi_*$ (поправки на виході з фільтру та на вході у фільтр), $\tilde{P}_i\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$, $\hat{P}_i\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$, $\tilde{p}_i\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$, $\tilde{\tilde{P}}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\hat{\hat{P}}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\tilde{\tilde{p}}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\tilde{H}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\hat{H}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\hat{p}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\tilde{\tilde{H}}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$, $\hat{\hat{H}}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$, $\hat{\hat{p}}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ ($i=\overline{0,2n+1}$) – функції типу примежового шару відповідно в околах $\psi=0$, $\psi=Q_*$, $\eta=0$, $\eta=Q^*$ (поправки на бічних стінках фільтру), $\tilde{\varphi}=\dfrac{\varphi^*-\varphi}{\varepsilon}$, $\tilde{\tilde{\varphi}}=\dfrac{\varphi-\varphi_*}{\varepsilon}$, $\tilde{\psi}=\dfrac{\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\psi}}=\dfrac{Q_*-\psi}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\eta}=\dfrac{\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\tilde{\tilde{\eta}}=\dfrac{Q^*-\eta}{\sqrt{\varepsilon}}$ – відповідні їм регуляризуючі перетворення (розтяги), $R_{n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $\breve{R}_{n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$, $r_{n+1}(\varphi,\psi,\eta,t,\varepsilon)$ – залишкові члени (їх оцінка встановлюється на основі принципу максимуму [1]).

В результаті підстановки (9) – (11) у (6) – (8) і виконання стандартної процедури “прирівнювання” коефіцієнтів при однакових степенях ε, одержимо для знаходження c_i, u_i, $\tilde{\sigma}_i$ ($i=\overline{0,n}$), P_i, $\breve{P}_i$, $\breve{\breve{P}}_i$, p_i, $\breve{p}_i$, $\breve{\breve{p}}_i$ ($i=\overline{0,n+1}$) такі задачі, які розв’язуємо з використанням методу характеристик:

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}_0\cdot c'_{0t}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot c_0+\dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa}\cdot c'_{0\varphi}=g_{1,0},\ \tilde{\sigma}_0\cdot u'_{0t}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot u_0+\beta\cdot u_0=g_{2,0},\ \tilde{\sigma}'_{0t}=g_{3,0};\\ c_0(\varphi_*,\psi,\eta,t)=\tilde{c}^*(\psi,\eta,t),\ c_0(\varphi,\psi,\eta,0)=\tilde{c}_0^0(\varphi,\psi,\eta),\\ u_0(\varphi,\psi,\eta,0)=\tilde{u}_0^0(\varphi,\psi,\eta),\ \tilde{\sigma}_0\left(\varphi,\psi,\eta,0\right)=\tilde{\sigma}_0^0\left(\varphi,\psi,\eta\right),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\tilde{\sigma}_0\cdot c'_{it}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot c_i+\dfrac{\tilde{v}^2}{\kappa}\cdot c'_{i\varphi}=g_{1,i},\ \tilde{\sigma}_0\cdot u'_{it}+\tilde{\sigma}'_{0t}\cdot u_i+\beta\cdot u_i=g_{2,i},\ \tilde{\sigma}'_{it}=g_{3,i};\\ c_i(\varphi_*,\psi,\eta,t)=c_i(\varphi,\psi,\eta,0)=u_i(\varphi,\psi,\eta,0)=\tilde{\sigma}_i\left(\varphi,\psi,\eta,0\right)=0\ (i=\overline{1,n}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_0\cdot P''_{i\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}}+\kappa\cdot P'_{i\tilde{\varphi}}=q_{1,i},\ \left(\tilde{\sigma}_0+\breve{\breve{P}}_0\right)\cdot\breve{P}'_{it}+\left(\tilde{\sigma}'_{0t}+\breve{\breve{P}}'_{0t}\right)\cdot\breve{P}_i+\tilde{\beta}_{*0}\cdot\breve{P}_i=q_{2,i},\\ \breve{\breve{P}}'_{it}=q_{3,i};\ c'_{i\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)+P'_{i\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)=0,\ P_i\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)\underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to}0,\\ \breve{P}_i\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,0\right)=0,\ \breve{\breve{P}}_i\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,0\right)=0\ (i=\overline{0,n}),\end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot P''_{(n+1)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \kappa \cdot P'_{(n+1)\,\tilde{\varphi}} = q_{1,n+1}, \left(\tilde{\sigma}_0 + \breve{\breve{P}}_0\right) \cdot \breve{P}'_{(n+1)\,t} + \left(\tilde{\sigma}'_{0\,t} + \breve{\breve{P}}'_{0\,t}\right) \cdot \breve{P}_{n+1} + \\ + \tilde{\beta}_{*0} \cdot \breve{P}_{n+1} = q_{2,n+1},\ \breve{\breve{P}}'_{(n+1)\,t} = q_{3,n+1};\ P'_{(n+1)\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right) = 0, \\ P_{n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right) \underset{\tilde{\varphi}\to\infty}{\to} 0,\ \breve{P}_{n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,0\right) = 0,\ \breve{\breve{P}}_{n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,0\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot p''_{i\,\tilde{\tilde{\varphi}}\tilde{\tilde{\varphi}}} - \kappa \cdot p'_{i\,\tilde{\tilde{\varphi}}} = \tilde{q}_{1,i}, \left(\tilde{\sigma}_0 + \breve{\breve{P}}_0 + \breve{\breve{p}}_0\right) \cdot \breve{p}'_{i\,t} + \left(\tilde{\sigma}'_{0\,t} + \breve{\breve{P}}'_{0\,t} + \breve{\breve{p}}'_{0\,t}\right) \cdot \breve{p}_i + \\ + \tilde{\tilde{\beta}}_{*0} \cdot \breve{p}_i = \tilde{q}_{2,i},\ \breve{\breve{p}}'_{i\,t} = \tilde{q}_{3,i};\ c'_{i\,\tilde{\tilde{\varphi}}}\left(0,\psi,\eta,t\right) + P'_{i\,\tilde{\tilde{\varphi}}}\left(0,\psi,\eta,t\right) + p'_{i\,\tilde{\tilde{\varphi}}}\left(0,\psi,\eta,t\right) = 0, \\ p_i\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right) \underset{\tilde{\tilde{\varphi}}\to\infty}{\to} 0,\ \breve{p}_i\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,0\right) = 0,\ \breve{\breve{p}}_i\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,0\right) = 0\ \ (i = \overline{0,n}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} d_0 \cdot p''_{(n+1)\,\tilde{\tilde{\varphi}}\tilde{\tilde{\varphi}}} - \kappa \cdot p'_{(n+1)\,\tilde{\tilde{\varphi}}} = \tilde{q}_{1,n+1}, \left(\tilde{\sigma}_0 + \breve{\breve{P}}_0 + \breve{\breve{p}}_0\right) \cdot \breve{p}'_{(n+1)\,t} + \left(\tilde{\sigma}'_{0\,t} + \breve{\breve{P}}'_{0\,t} + \right. \\ \left. + \breve{\breve{p}}'_{0\,t}\right) \cdot \breve{p}_{n+1} + \tilde{\beta}_{*0} \cdot \breve{p}_{n+1} = \tilde{q}_{2,n+1},\ \breve{\breve{p}}'_{(n+1)\,t} = \tilde{q}_{3,n+1};\ p'_{(n+1)\,\tilde{\tilde{\varphi}}}\left(0,\psi,\eta,t\right) = 0, \\ p_{n+1}\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right) \underset{\tilde{\tilde{\varphi}}\to\infty}{\to} 0,\ \breve{p}_{n+1}\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,0\right) = 0,\ \breve{\breve{p}}_{n+1}\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,0\right) = 0, \end{cases}$$

де $g_{1,i} = I(i,1) \cdot \left(d \cdot \left(\frac{\tilde{v}^2}{\kappa^2} \cdot c''_{(i-1)\,\varphi\varphi} + b_{1,1} \cdot c''_{(i-1)\,\psi\psi} + b_{1,2} \cdot c''_{(i-1)\,\eta\eta} + b_{2,1} \cdot c'_{(i-1)\,\psi} + b_{2,2} \cdot c'_{(i-1)\,\eta} \right) - \right.$

$\left. - \sum_{l=1}^{i} \left(\tilde{\sigma}_l \cdot c'_{(i-l)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot c_{i-l} \right) \right) - \sum_{l=0}^{i} \left(\tilde{\sigma}_l \cdot u'_{(i-l)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot u_{i-l} \right)$, $g_{2,i} = I(i,1) \cdot \left(\tilde{\alpha} \cdot c_{i-1} - \sum_{l=1}^{i} \left(\tilde{\sigma}_l \cdot u'_{(i-l)\,t} + \right. \right.$

$\left. \left. + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot u_{i-l} \right) \right)$, $g_{3,i} = I(i,1) \cdot \tilde{\lambda} \cdot u_{i-1}$ ($i = \overline{0,n}$), $q_{1,i} = \frac{\kappa^2}{\tilde{v}^2(\varphi^*,\psi,\eta)} \cdot \left(I(i,1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-1} \left(\breve{\breve{P}}_l \cdot P'_{(i-l-1)\,t} + \right. \right. \right.$

$\left. + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot P_{i-l-1} + \tilde{\sigma}_l \cdot P'_{(i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot P_{i-l-1} + \breve{\breve{P}}_l \cdot c'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot c_{i-l-1} \right) + \sum_{l=0}^{i-1} \left(\breve{\breve{P}}_l \cdot \breve{P}'_{(i-l-1)\,t} + \right.$

$\left. + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot \breve{P}_{i-l-1} + \tilde{\sigma}_l \cdot \breve{P}'_{(i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot \breve{P}_{i-l-1} + \breve{\breve{P}}_l \cdot u'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot u_{i-l-1} \right) - \sum_{l=1}^{i} \frac{V_{*l}}{\kappa^2} \cdot \left(d \cdot P''_{(i-l)\,\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}} + \right.$

$\left. \left. + \kappa \cdot P'_{(i-l)\,\tilde{\varphi}} \right) \right) + I(i,2) \cdot \left(d \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \left(B_{1,1*\,l} \cdot P''_{(i-2-l)\,\psi\psi} + B_{1,2*\,l} \cdot P''_{(i-2-l)\,\eta\eta} + B_{2,1*\,l} \cdot P'_{(i-2-l)\,\psi} + \right. \right.$

$\left. \left. \left. + B_{2,2*\,l} \cdot P'_{(i-2-l)\,\eta} \right) \right) \right)$, $q_{2,i} = I(i,1) \cdot \left(\sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\alpha}_{*l} \cdot P_{i-l-1} - \sum_{l=1}^{i} \tilde{\beta}_{*l} \cdot \breve{P}_{i-l} - \sum_{l=1}^{i} \left(\tilde{\sigma}_l \cdot \breve{P}'_{(i-l)\,t} + \right. \right.$

$\left. \left. + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot \breve{P}_{i-l} + \breve{\breve{P}}_l \cdot \breve{P}'_{(i-l)\,t} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot \breve{P}_{i-l} + \breve{\breve{P}}_l \cdot u'_{(i-l)\,t} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot u_{i-l} \right) \right)$, $q_{3,i} = I(i,1) \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\lambda}_{*l} \cdot \breve{P}_{i-l-1}$,

$$\tilde{q}_{1,i} = \frac{\kappa^2}{\tilde{v}^2(\varphi_*,\psi,\eta)} \cdot \Bigg(I(i,1) \cdot \Bigg(\sum_{l=0}^{i-1} \Big(\breve{\breve{p}}_l \cdot p'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{P}}_l \cdot p'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{p}}_l \cdot P'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot p_{i-l-1} +$$

$$+ \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot P_{i-l-1} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot p_{i-l-1} + \tilde{\sigma}_l \cdot p'_{(i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot p_{i-l-1} + \breve{\breve{p}}_l \cdot c'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot c_{i-l-1} \Big) +$$

$$+ \sum_{l=0}^{i-1} \Big(\breve{\breve{p}}_l \cdot \breve{p}'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{P}}_l \cdot \breve{p}'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{p}}_l \cdot \breve{P}'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot \breve{p}_{i-l-1} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot \breve{P}_{i-l-1} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot \breve{p}_{i-l-1} +$$

$$+ \tilde{\sigma}_l \cdot \breve{p}'_{(i-l-1)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot \breve{p}_{i-l-1} + \breve{\breve{p}}_l \cdot u'_{(i-l-1)\,t} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot u_{i-l-1} \Big) - \sum_{l=1}^{i} \frac{\tilde{V}_{*l}}{\kappa^2} \cdot \Big(d \cdot p''_{(i-l)\,\breve{\varphi}\breve{\varphi}} + \kappa \cdot p'_{(i-l)\,\breve{\varphi}} \Big) \Bigg) +$$

$$+ I(i,2) \cdot \Bigg(d \cdot \sum_{l=0}^{i-2} \Big(\tilde{B}_{1,1*\,l} \cdot p''_{(i-2-l)\,\psi\psi} + \tilde{B}_{1,2*\,l} \cdot p''_{(i-2-l)\,\eta\eta} + \tilde{B}_{2,1*\,l} \cdot p'_{(i-2-l)\,\psi} + \tilde{B}_{2,2*\,l} \cdot p'_{(i-2-l)\,\eta} \Big) \Bigg) \Bigg),$$

$$\tilde{q}_{2,i} = I(i,1) \cdot \Bigg(\sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\tilde{\alpha}}_{*l} \cdot p_{i-l-1} - \sum_{l=1}^{i} \tilde{\tilde{\beta}}_{*l} \cdot \breve{p}_{i-l} - \sum_{l=1}^{i} \Big(\tilde{\sigma}_l \cdot \breve{p}'_{(i-l)\,t} + \tilde{\sigma}'_{l\,t} \cdot \breve{p}_{i-l} + \breve{\breve{p}}_l \cdot \breve{p}'_{(i-l)\,t} +$$

$$+ \breve{\breve{P}}_l \cdot \breve{p}'_{(i-l)\,t} + \breve{\breve{p}}_l \cdot \breve{P}'_{(i-l)\,t} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot \breve{p}_{i-l} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot \breve{P}_{i-l} + \breve{\breve{P}}'_{l\,t} \cdot \breve{p}_{i-l} + \breve{\breve{p}}_l \cdot u'_{(i-l)\,t} + \breve{\breve{p}}'_{l\,t} \cdot u_{i-l} \Big) \Bigg),$$

$q_{3,i} = I(i,1) \cdot \sum_{l=0}^{i-1} \tilde{\lambda}_{*l} \cdot \breve{p}_{i-l-1}$ ($i = \overline{0, n+1}$), V_{*l}, $B_{i,j*l}$ ($i, j = 1,2$), $\tilde{\alpha}_{*l}$, $\tilde{\beta}_{*l}$, $\tilde{\lambda}_{*l}$ – коефіцієнти при l-тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$, $b_{i,j}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta)$ ($i, j = 1,2$), $\tilde{\alpha}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$, $\tilde{\beta}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$, $\tilde{\lambda}(\varphi^* - \varepsilon\tilde{\varphi},\psi,\eta,t)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi^*$, а $\tilde{V}_{*l}$, $\tilde{B}_{i,j*l}$ ($i, j = 1,2$), $\tilde{\tilde{\alpha}}_{*l}$, $\tilde{\tilde{\beta}}_{*l}$, $\tilde{\tilde{\lambda}}_{*l}$ – коефіцієнти при l-тих степенях ε в розкладі відповідно функцій $\tilde{v}^2(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta)$, $b_{i,j}(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta)$ ($i, j = 1,2$), $\tilde{\alpha}(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t)$, $\tilde{\beta}(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t)$, $\tilde{\lambda}(\varphi_* + \varepsilon\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t)$ в ряд Тейлора в околі $\varphi = \varphi_*$, $I(a,b) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a \ge b, \\ 0, & \text{якщо } a < b. \end{cases}$

В результаті їх розв'язання маємо:

$$\tilde{\sigma}_0(\varphi,\psi,\eta,t) = \tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta),$$

$$u_0(\varphi,\psi,\eta,t) = u_0^0(\varphi,\psi,\eta) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta)} \cdot \int_0^t \tilde{\beta}(\varphi,\psi,\eta,t)dt \right),$$

$$c_0(\varphi,\psi,\eta,t) = \left[\begin{array}{ll} h_{1,0}(\varphi,\psi,\eta,t) + c_*(\psi,\eta,t - f(\varphi,\psi,\eta)), & t \ge f(\varphi,\psi,\eta), \\ h_{2,0}(\varphi,\psi,\eta,t) + c_0^0(f^{-1}(f(\varphi,\psi,\eta) - t,\psi,\eta),\psi,\eta), & t < f(\varphi,\psi,\eta), \end{array} \right.$$

$$\tilde{\sigma}_i(\varphi,\psi,\eta,t) = \int_0^t \tilde{\lambda}(\varphi,\psi,\eta,t) \cdot u_{i-1}(\varphi,\psi,\eta,t)dt,$$

$$u_i(\varphi,\psi,\eta,t)=\frac{g_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t)}{\tilde{\beta}(\varphi,\psi,\eta,t)}\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta)}\cdot\int_0^t\tilde{\beta}(\varphi,\psi,\eta,t)dt\right)\right),$$

$$c_i(\varphi,\psi,\eta,t)=\left[\begin{array}{l} h_{1,i}(\varphi,\psi,\eta,t),\ \ t\ge f(\varphi,\psi,\eta),\\ h_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t),\ t<f(\varphi,\psi,\eta)\end{array}\right.\ \ (i=\overline{1,n}),$$

$$P_0\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{d}{\kappa}\cdot c'_{0\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)\cdot e^{-\frac{\kappa}{d}\cdot\tilde{\varphi}},$$

$$P_i\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\int_0^{\tilde{\varphi}}\left(\frac{1}{d}\cdot e^{-\frac{\kappa}{d}\cdot s}\cdot\int_0^s q_{1,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa}{d}\cdot\tilde{s}}d\tilde{s}-c'_{i\,\tilde{\varphi}}\left(0,\psi,\eta,t\right)\right)ds\ \ (i=\overline{1,n}),$$

$$P_{n+1}\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d}\cdot\int_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{-\frac{\kappa}{d}\cdot s}\cdot\int_0^s q_{1,n+1}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{\frac{\kappa}{d}\cdot\tilde{s}}d\tilde{s}\right)ds,$$

$$\breve{P}_i\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\frac{q_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t)}{\tilde{\beta}_{*0}(\varphi^*,\psi,\eta,t)}\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta)}\cdot\int_0^t\tilde{\beta}_{*0}(\varphi^*,\psi,\eta,t)dt\right)\right),$$

$$\breve{\breve{P}}_i\left(\tilde{\varphi},\psi,\eta,t\right)=\int_0^{\tilde{\varphi}}q_{3,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\,d\tilde{s}\ \ (i=\overline{0,n+1}),$$

$$p_0\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right)=\left(c_*\left(\psi,\eta,t\right)-c_0\left(0,\psi,\eta,t\right)-P_0\left(0,\psi,\eta,t\right)\right)\cdot e^{\frac{\kappa}{d}\tilde{\tilde{\varphi}}},$$

$$p_i\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d}\cdot\int_0^{\tilde{\tilde{\varphi}}}\left(e^{\frac{\kappa}{d}s}\cdot\int_0^s\tilde{q}_{1,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{s}}d\tilde{s}\right)ds-c_i\left(0,\psi,\eta,t\right)-P_i\left(0,\psi,\eta,t\right)$$

$$(i=\overline{1,n}),$$

$$p_{n+1}\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right)=\frac{1}{d}\cdot\int_0^{\tilde{\varphi}}\left(e^{\frac{\kappa}{d}s}\cdot\int_0^s\tilde{q}_{1,n+1}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\cdot e^{-\frac{\kappa}{d}\tilde{s}}d\tilde{s}\right)ds,$$

$$\breve{p}_i\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right)=\frac{\tilde{q}_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t)}{\tilde{\tilde{\beta}}_{*0}(\varphi_*,\psi,\eta,t)}\cdot\left(1-\exp\left(-\frac{1}{\tilde{\sigma}_0^0(\varphi,\psi,\eta)}\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{\beta}}_{*0}(\varphi_*,\psi,\eta,t)dt\right)\right),$$

$$\breve{\breve{p}}_i\left(\tilde{\tilde{\varphi}},\psi,\eta,t\right)=\int_0^{\tilde{\tilde{\varphi}}}\tilde{q}_{3,i}(\tilde{s},\psi,\eta,t)\,d\tilde{s}\ \ (i=\overline{0,n+1}),$$

де $h_{1,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=\kappa\cdot\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{g_{1,i}(s,\psi,\eta,f(s,\psi,\eta)+t-f(\varphi,\psi,\eta))}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}ds$, $h_{2,i}(\varphi,\psi,\eta,t)=$

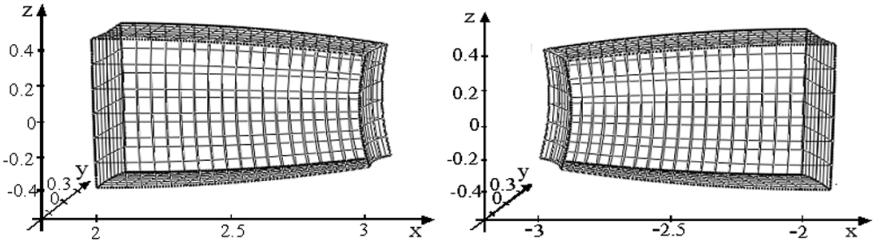
$=\int_0^t\frac{g_{1,i}(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta,s)}{\tilde{\sigma}_0^0(f^{-1}(s+f(\varphi,\psi,\eta)-t,\psi,\eta),\psi,\eta)}ds$, $f(\varphi,\psi,\eta)=\int_{\varphi_*}^{\varphi}\frac{\kappa\cdot\tilde{\sigma}_0^0(s,\psi,\eta)}{\tilde{v}^2(s,\psi,\eta)}ds$ –

час проходження відповідною частинкою шляху від точки $\left(x(\varphi_*,\psi,\eta), y(\varphi_*,\psi,\eta), z(\varphi_*,\psi,\eta)\right)\in ABB_*A_*$ до точки $\left(x(\varphi,\psi,\eta), y(\varphi,\psi,\eta), z(\varphi,\psi,\eta)\right)\in G$ вздовж відповідної лінії течії, f^{-1} – функція, обернена відповідно до f відносно змінної φ (відмітимо, що така функція існує, оскільки $\tilde{v}^{-2}(\varphi,\psi,\eta)$ і $\tilde{\sigma}_0^0(s,\psi,\eta)$ – неперервно диференційовні, обмежені, додатньо визначені функції, а κ – додатньо визначена стала).

Задачі для знаходження функцій $\tilde{P}_i\left(\varphi,\tilde{\psi},\eta,t\right)$, $\hat{P}_i\left(\varphi,\tilde{\tilde{\psi}},\eta,t\right)$, $\tilde{H}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\eta},t\right)$, $\hat{H}_i\left(\varphi,\psi,\tilde{\tilde{\eta}},t\right)$ ($i=\overline{0,2n+1}$) отримуються аналогічно [1].

Числовий експеримент. В ході комп'ютерного експерименту спочатку було здійснено моделювання процесу фільтрування на основі [4], де в якості прикладу використано прогнозування процесу доочисти води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивний матеріал. Згідно з результатами експериментальних даних для фільтра висотою 1 м з цеолітовою засипкою зерен діаметром 0,5-2 мм встановлено наступні параметри моделі: $\tilde{\alpha}\approx 0,25\left(0,67\cdot\tilde{v}^2+1,25\right)$, $\tilde{\beta}\approx 0,00001\cdot\tilde{\alpha}$, $\tilde{\sigma}_0^0\left(\varphi,\psi,\eta\right)\approx 0,3$, $\tilde{\gamma}\approx 0,0033$, $\kappa\approx 5,6$ м/добу, $D\approx 2,5\cdot 10^{-5}$ м^2/с. Далі для фільтру, форму якого описано поверхнями $f_1\left(x,y,z\right)=x-2$, $f_2\left(x,y,z\right)=\left(x-4,5214350\right)^2+y^2+z^2-2,3576347$, $f_3\left(x,y,z\right)=\left(x-2\right)^2+\left(y-6,1553671\right)^2+z^2-41,8885438$, $f_4\left(x,y,z\right)=\left(x-2\right)^2+$ $+\left(y+6,1553671\right)^2+z^2-41,8885438$, $f_5\left(x,y,z\right)=f_6\left(x,y,z\right)=\left(x^2-4x+y^2+z^2\right)^2+$ $+16y^2-93,2548340z^2$, де функції $f_i(x,y,z)$ ($i=\overline{1,6}$) підібрані так, щоб забезпечити "монотонне звуження" в напрямку від його входу до виходу (вибір саме такої форми «підказує» практика) та взаємну ортогональність граней уздовж ребер і в кутових точках (це суттєво для спрощення процедури побудови просторового аналогу конформного відображення), побудовано розрахункову гідродинамічну сітку (рис. 3, а) при $n=40$, $m=16$, $l=12$, $\varphi_*=0$, $\varphi^*=333,45$ (параметри n, m і l вибирали з умови найбільшої подібності побудованої сітки до кубічної), знайдено фільтраційну витрату $Q=4,93$ м^3/год, обчислено величини швидкості фільтрації |v| та функцій $b_{i,j}\left(\varphi,\psi,\eta\right)$ ($i,j=1,2$) (середня швидкість руху води через засипку криволінійного фільтру становить 10 м/год).

На рис. 4, 5 представлені розподіли середніх величин концентрацій $c_{сер}\left(\varphi,t\right)$, $u_{сер}\left(\varphi,t\right)$ і пористості $\tilde{\sigma}_{сер}\left(\varphi,t\right)$ при $c_*\left(\psi,\eta,t\right)=0.0005$, $c_0^0\left(\varphi,\psi,\eta\right)=0$, $u_0^0\left(\varphi,\psi,\eta\right)=0$.



а) б)

Рис. 3. Розрахункові динамічні сітки

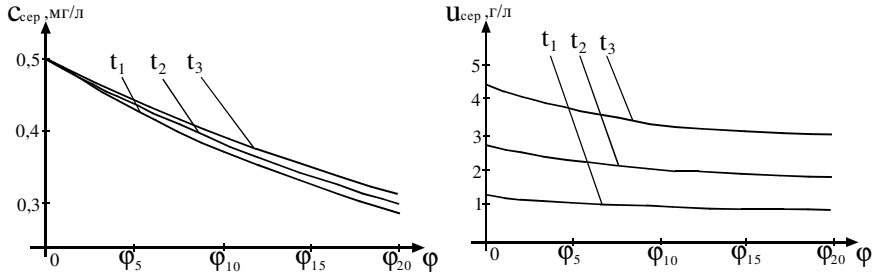


Рис. 4. Розподіли середніх величин концентрацій алюмінію у воді та в осаді при $v_{сер} = 10$ м/год. у моменти часу $t_1 = 400$ год, $t_2 = 800$ год., $t_3 = 1200$ год.

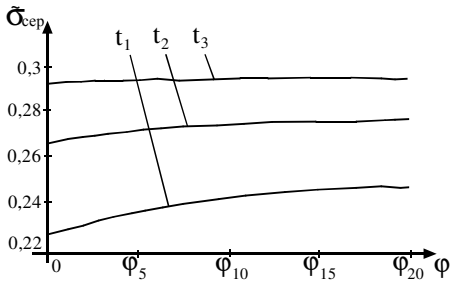


Рис. 5. Розподіл середньої величини пористості завантаження фільтру при $v_{сер} = 10$ м/год. у моменти часу $t_1 = 400$ год, $t_2 = 800$ год., $t_3 = 1200$ год.

Далі для комп'ютерного моделювання процесу регенерації завантаження фільтру (для цього згідно постановки та алгоритму розв'язання відповідної задачі) його було розвернуто, форму описано наступними поверхнями: $f_1(x,y,z) = (x+4,5214350)^2 + y^2 + z^2 - 2,3576347$, $f_2(x,y,z) = x+2$, $f_3(x,y,z) = (x+2)^2 + (y-6,1553671)^2 + z^2 - 41,8885438$, $f_4(x,y,z) = (x+2)^2 + (y+6,1553671)^2 +$

$+z^2-41{,}8885438$, $f_5(x,y,z)=f_6(x,y,z)=\left(x^2+4x+y^2+z^2\right)^2+16y^2-93{,}2548340z^2$, та аналогічно до попереднього проведено побудову розрахункової гідродинамічної сітку (рис. 3, б) при $n=40$, $m=16$, $l=12$, $\varphi_*=0$, $\varphi^*=666{,}7$, знайдено фільтраційну витрату $Q=9{,}86$ м^3/год, обчислено величини швидкості фільтрації |v| та функцій $b_{i,j}(\varphi,\psi,\eta)$ ($i,j=1,2$) (середня швидкість руху води через засипку криволінійного фільтру становить 20 м/год).

На рис. 6, 7 представлені розподіли середніх величин концентрацій $c_{сер}(\varphi,t)$, $u_{сер}(\varphi,t)$ і пористості $\tilde{\sigma}_{сер}(\varphi,t)$ після промивки.

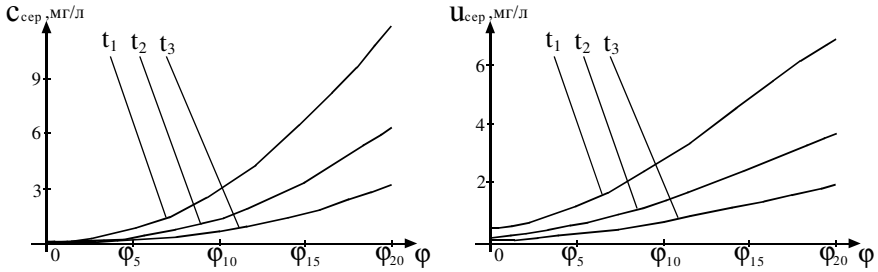


Рис. 6. Розподіли середніх величин концентрацій забруднення у воді та в осаді при $v_{сер}=20$ м/год. у моменти часу $t_1=7$ хв., $t_2=8$ хв., $t_3=9$ хв.

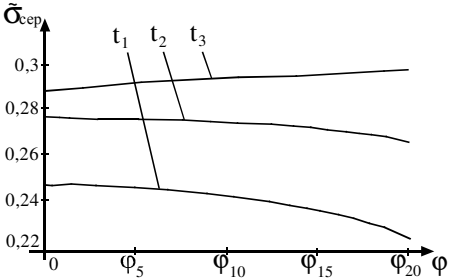


Рис. 7. Розподіл середньої величини пористості завантаження фільтру при $v_{сер}=20$ м/год. у моменти часу $t_1=0$ хв., $t_2=5$ хв., $t_3=9$ хв.

Висновки. У роботі вирішено задачу прогнозування процесу регенерації фільтрувальних установок та очисних споруд з пористими завантаженнями, що мають форму криволінійних паралелепіпедів, обмежених двома еквіпотенціальними поверхнями та чотирма поверхнями течії. При цьому отримано числово-асимптотичне розвинення розв'язку відповідних сингулярно збуреної задач та для перевірки її коректності проведено числовий експеримент.

1. Бомба А. Я. Нелінійні сингулярно збурені задачі типу “конвекція-дифузія” / А. Я. Бомба, С. В. Барановський, І. М. Присяжнюк. – Рівне: НУВГП, 2008. – 254 с. **2.** Бомба А. Я. Числово-асимптотичне наближення розв’язків просторових модельних задач процесу фільтрування / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк, А. П. Сафоник, В. М. Сівак // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вип. 11. – С. 29-39. **3.** Лаврик В. И. Об асимптотическом приближении решений некоторых задач массопереноса при фильтрации в неоднородной бреде- / В. И. Лаврик, А. Я. Бомба, А. П. Власюк / АН УССР. Ин-т математики; 85-72. – Киев : 1985. – 16 с. – (Препринт). **4.** Климюк Ю. Є. Моделювання процесу доочистки води від залишкових катіонів алюмінію фільтруванням через аніоноактивні завантаження із врахуванням зміни фільтраційних властивостей середовища / Ю. Є. Климюк, В. М. Сівак // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 7 (16). – Рівне: РДГУ, 2010. – С. 93-109. **5.** Климюк Ю. Є. Числове розв’язання обернених крайових задач на просторові конформні відображення криволінійних паралелепіпедів на прямокутні / Ю. Є. Климюк, Д. О. Пригорницький // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Вип. 5 (14). – Рівне: РДГУ, 2008. – С. 104-143. **6.** Орлов В. О. Водоочисні фільтри із зернистою засипкою / В. О. Орлов. – Рівне: НУВГП, 2005. – 163 с. **7.** Рауз Х. Механика жидкости / Х. Рауз. – М. : Стройиздат. – 1967. – 390 с. **8.** Сівак В. М. Числово-асимптотичне наближення розв’язку просторової модельної задачі процесу видалення залишкового алюмінію при фільтруванні через окислювально-відновні завантаження / В. М. Сівак, А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво: збірн. наук. праць. – Вип. 34. – Рівне: НУВГП, 2009. – С. 252-261.

Рецензент: д.т.н., професор Власюк А. П. (НУВГП)