ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 631.485-047.58

Король П. П., к.г.н., доцент, Мендель В. П., аспірант (Волинський національний університет імені Лесі Українки)

АНАЛІЗ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ПЛОЩИННОГО ЗМИВУ ҐРУНТУ

Охарактеризовано основні етапи становлення і розвитку математичних методів та прогнозування площинного змиву ґрунту. Проведено аналіз та класифікацію моделей площинного змиву ґрунту.
Ключові слова: ерозія ґрунтів, математичні моделі, площинний змив.

Дано характеристику основных етапов формирования и розвития математических методов и прогнозирования плоскотного смыва почвы. Проведен анализ и класификация моделей плоскотного смыва почвы.
Ключевые слова: эрозия почв, математические модели, плоскостной смыв.

The basic stages of becoming and development of mathematical methods and prognostication of the plane washing off of soil are described. An analysis and classification of models of the plane washing off of soil is conducted.
Keywords: soil erosion, mathematical model plane washout.

Постановка наукової проблеми та її значення. На даному етапі становлення нашої країни проблема захисту ґрунтів від ерозії справедливо вважається однією з найбільш актуальних, оскільки забезпечує оптимальне використання сільськогосподарських земель і є запорукою ефективного вирішення продовольчої проблеми [2].

Для території України характерними є проблеми водної (лісостепова зона) та вітрової (зона мішаних лісів та степова зона) ерозії. В рамках регіональних Програм охорони земель [3] здійснюється система протиерозійних заходів, що забезпечує мінімізацію втрат родючого шару ґрунту, однак комплексна економічна оцінка процесу можлива лише за умови розробки адекватних математичних моделей.

Розробка математичних моделей передбачає визначення чинників, що суттєво впливають на формування змиву ґрунту. До таких чинників належать механічні та гранулометричні властивості ґрунтів, об’єм та інтенсивність опадів, характеристики мікрорельєфу, тип агрофону тощо. Зважаючи на природні умови району досліджень у рівняння математичних моделей додатково вводяться уточнюючі коефіцієнти, що забезпечує максимальну відповідність та кондиційність відображення процесу. Розробка математичних моделей площинного змиву ґрунту є трудомістким та, як засвідчує практика, достатньо складним питанням. Визначення реального об’єму змитого ґрунту шляхом співставлення розрахункових даних та даних, що отримані експериментальним шляхом в польових умовах є відомою практикою.

Аналіз попередніх досліджень. Науково-дослідні роботи в галузі матема-

тичного моделювання ерозії ґрунтів розпочались у США в 30-х роках XX ст., у зв'язку з необхідністю вирішення проблеми пилових бур («пилових котлів») та у СРСР в 60-х роках XX ст. після освоєння цілини. За 70-річний період на основі різноманітних підходів науковцями розроблено чимало математичних моделей площинного змиву ґрунту. Як вихідні дані для розробки моделей використовувались результати багаторічних польових спостережень (Вішмеєр, Сміт, 1965) або лабораторних досліджень (Мірцхулава, 1970). Кардинально інший підхід до моделювання виник із впровадженням у практику комп'ютерної техніки [1].

Класифікація моделей площинного змиву ґрунту (рис. 1) дозволяє підібрати найбільш оптимальний для даних умов варіант моделі, що забезпечує необхідну точність кінцевих результатів.

За класифікацією К.Г. Ренарда [8] моделі площинного змиву ґрунту поділяють на два типи: **емпіричні** та **теоретичні**.

До першого типу відносяться моделі, що не враховують просторову неоднорідність водозбору, ерозійний потенціал території та режим сівозмін, а їх рівняння, як правило, утворені добутком коефіцієнтів, кожен з яких, певним чином враховує вплив відповідного чинника. Емпіричні моделі, у свою чергу, поділяються на два підтипи: ***формально-статистичні*** та ***фізико-статистичні***.

До другого типу відносять моделі, що враховують чинники впливу складових частин ерозійно-акумуляційного процесу: стокоутворення – стік – утворення наносів – транспортування – перевідкладення наносів. Теоретичні моделі, у свою чергу, також поділяються на два підтипи: ***аналітичні*** та ***динамічні***.

До ***формально-статистичних*** моделей площинного змиву ґрунту відносяться такі, рівняння яких містять параметри, що визначені статистичними методами на основі емпіричних даних, зокрема, моделі Цинга (1940), Сміта (1941), Браунінга (1947), Масгрейва (1947), Федотова-Германюка (1971), Рачінскаса (1987), Бєлоліпського-Колєснікова (1986), Лавровського (1987), Барабанова (1990) тощо.

Модель Цинга

Модель, що була запропонована у 1940 році А.У. Цингом і поклала початок нового напрямку в ерозієзнавстві – математичного моделювання площинного змиву ґрунту, має вигляд:

$$A = C'L^{0.6}S^{1.4}, \tag{1}$$

де A – об'єм змитого ґрунту, т/акр; C' – коефіцієнт агрофону; L – довжина схилу, футів; S – нахил схилу, %.

Модель Сміта–Браунінга

В основу моделі, що була запропонована у 40-х рр. XX ст., покладено залежність об'єму змиву від геоморфологічних чинників – довжини і крутизни схилу:

$$A = C'L^{0.6}S^{1.4}P \tag{2}$$

де A – об'єм змитого ґрунту, т/акр; C' – коефіцієнт агрофону; L – довжина схилу, футів; S – нахил схилу, %; P – коефіцієнт протиерозійних заходів. При цьому коефіцієнти C' в моделях Цинга і Сміта-Браунінга – суттєво відрізняються.

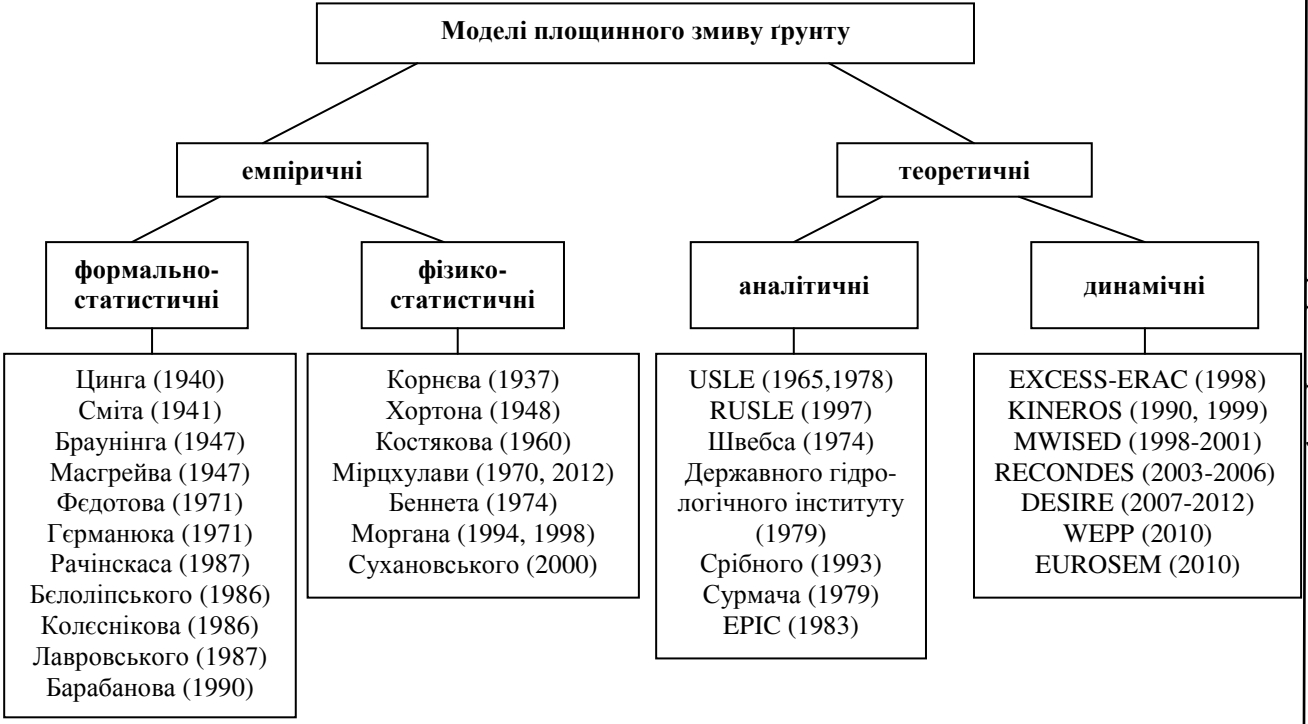

Рис. 1. Класифікація моделей площинного змиву ґрунту

Модель Масгрейва

Модель Г.В. Масгрейва, що згодом була покладена в основу Універсального рівняння втрат ґрунту – Universal Soil Loss Equation (USLE), описується рівнянням

$$A = \left(\frac{P_{30}}{1.25}\right)^{1.75} K' \left(\frac{L}{72}\right)^{0.35} \left(\frac{S}{10}\right)^{1.35} C^*, \qquad (3)$$

де A – об'єм змитого ґрунту, дюймів/рік; P_{30} – максимальна інтенсивність дощу за 30 хвилин, дюймів; K' – ґрунтовий коефіцієнт; L – довжина схилу, футів; S – нахил схилу, %; C^* – коефіцієнт агрофону.

Іншим підтипом емпіричних моделей є ***фізико-статистичні*** або ***логіко-математичні*** моделі. До них відносяться моделі Вішмеєра (1958), Велікано-ва (1964), Швебса (1974), Вішмеєра–Сміта (1978), Державного гідрологічного інституту (1979), Сурмача (1979), Срібного (1993) тощо.

Модель Universal Soil Loss Equation – USLE (1965)

$$A = EI_{30} K \left(\frac{L}{72.6}\right)^{0.5} \left(0.065 + 0.045S + 0.0065S^2\right) CP, \qquad (4)$$

де A – об'єм змитого ґрунту, т/акр; E – енергія зливового дощу, т/акр; I_{30} – максимальна інтенсивність опадів за 30 хвилин, дюймів; K – ґрунтовий коефіцієнт; L – довжина схилу, футів; S – нахил схилу, %; C – коефіцієнт урожайності; P – коефіцієнт протиерозійних заходів.

Модель Universal Soil Loss Equation – USLE (1978)

$$A = EI_{30} K \left(\frac{L}{72.6}\right)^{0.5} \left(65.4 \sin^2 \Theta + 4.56 \sin \Theta + 0.065\right) CP, \qquad (5)$$

де A – об'єм змитого ґрунту, т/акр; E – енергія зливового дощу; т/акр; I_{30} – максимальна інтенсивність опадів за 30 хвилин, дюймів; K – ґрунтовий коефіцієнт; L – довжина схилу, футів; Θ – нахил схилу, градусів; C – коефіцієнт урожайності; P – коефіцієнт протиерозійних заходів.

Модель Revised Universal Soil Loss Equation – RUSLE (1997)

$$W = (0.224) \cdot R \cdot K \cdot LS \cdot C \cdot P, \qquad (6)$$

де W – середньорічний модуль змиву ґрунту, кг/м^2; R – ерозійна здатність дощу; K – ґрунтовий коефіцієнт; LS – чинник рельєфу (L – довжина схилу, м; S – крутизна схилу, °); C – коефіцієнт агрофону; P – коефіцієнт протиерозійних заходів.

Модель Веліканова

$$W_н = k'_p \gamma_н \int_0^T \varepsilon_{t-\tau} dt \,, \tag{7}$$

де k'_p – коефіцієнт, що враховує відхилення розрахункових значень від дійсних; $\gamma_н$ – об'ємна вага ґрунту; T – період стоку; $\varepsilon_{t-\tau}$ – середня інтенсивність накопичення наносів за звітний період.

Модель Швебса

$$W_л = 1.2 \cdot 10^{-4} \cdot j_R \cdot e^{-\lambda_p (0.85-100 m_1)} \cdot \Phi(L;I) \sum K_{ГМ} \,, \tag{8}$$

де $W_л$ – середньорічне значення середнього для схилу модуля змиву за літньо-осінній період, т/га; j_R – коефіцієнт відносного змиву, що враховує міру еродованості ґрунту; m_1 – коефіцієнт швидкості, що враховує шорсткість поверхні; λ_p – коефіцієнт, що характеризує протиерозійні властивості рослинності і змінюється від 1.0 – для ріллі до 5.0 – для цілини та лісу; $\Phi(L;I)$ – функція рельєфу для літньо-осіннього періоду; $\sum K_{ГМ}$ – середньорічна сума впливів гідрометеорологічного чинника змиву ґрунту .

Модель Державного гідрологічного інституту

$$\grave{I}_{r,p\%} = h_p a_1 b k_1 \,, \tag{12}$$

де $M_{г,p\%}$ – модуль стоку наносів (змив ґрунту) за дощовий паводок розрахункової забезпеченості $p\%$, т/га; h_p – шар зливового стоку аналогічної забезпеченості $p\%$, мм; a_1 – коефіцієнт, що характеризує особливості змиву на різних угіддях з урахуванням типу руслової сітки; b – коефіцієнт, що враховує вплив сільськогосподарського використання ґрунту в попередньому році (просапні культури – $b = 1{,}0$, зернові культури – $b = 0{,}9$, багаторічні трави – $b = 0{,}8$); k_1 – коефіцієнт, що характеризує вплив крутизни схилу на змив (при $\mathrm{I} \geq 100‰$ – $k_1 = 0.01\mathrm{I}$, при $\mathrm{I} \leq 100‰$ – $k_1 = 1.0$, I – середній схил, проміле).

Модель Срібного

Розрахунковий середньорічний змив ґрунту внаслідок літніх дощів (Срібний, Вергунов, 1993) визначається за формулою:

$$W_{літ} = M_{сер.літ.пок.} \frac{K_{поч}}{3.4} K_{ф} K_{інт} K_{ух.сх.літ}, \qquad (15)$$

де $W_{літ}$ – середньорічний модуль змиву за період літніх дощів для кожної культури або в середньому за період ротації сівозміни, т/га/год.; $M_{сер.літ.пок.}$ – середньорічний модуль змиву ґрунту із стокових майданчиків внаслідок літніх дощів; $K_{інт}$ – коефіцієнт інтенсивності сильних грозових дощів (1.0 – для лісостепової і 1.2 – для степової зони України); $K_{ух.сх.літ}$ – орографічний чинник, що враховує вплив довжини і крутизни схилу на об'єм змитого ґрунту.

Модель змиву EPIC (R-функція)

Інтерпретація математичної моделі наступна [5]:

$$ER = ER^* + SNEG \cdot K_{AGR}, \qquad (16)$$

де $ER^* = ER_{\max} f_1^e(EI) f_2^e(KS) f_3^e(LS) f_4^e(CUL) f_5^e(AGR)$

$$f_j^e = \alpha_j \left(\frac{1.0}{a_j + \exp(b_j - c_j x_j)} - d_j \right), \quad j = 1...4,$$

$$f_5^e(AGR) = 1.0 - \alpha_5 (1.0 - \exp(-b_5 AGR))^{C_5},$$

де ER – середній багаторічний змив ґрунту т/га/рік; $ER_{\max}$ – максимально можливий змив ґрунту при дії всіх факторів; EI – ерозійний індекс дощу; LS – чинник рельєфу; KS – коефіцієнт еродованості ґрунту; CUL – ґрунтозахисні властивості польових культур; AGR – показник ефективності протиерозійних заходів, що визначається за відносною бальною шкалою; $SNEG$ – об'єм ґрунту змитого талими водами, т/га/рік; K_{AGR} коефіцієнт впливу агрофону; f_J^e – частинні функції відклику; $\alpha_j, a_j, b_j, c_j, d_j$ – коефіцієнти.

Аналітичні моделі, що представлені в роботах Корнєва (1937), Хортона (1948), Костякова (1960), Мірцхулави (1970), Беннета (1974), Моргана (1994, 1998), Сухановського (2000) тощо, описують взаємодію у системі складових ерозійного процесу: змив – транспортування – акумуляція. В класичному варіанті даний тип моделей не дозволяє у повній мірі врахувати усі аспекти ерозії, оскільки одноманітно описує просторову та часову динаміку процесу.

Модель Костякова

Розроблена у 1960 році модель А.М. Костякова базується на припущенні, що кількість змитих потоком ґрунтових часток пропорційна до кількості ви-

користаної при цьому води. Модель змиву ґрунту Костякова має вигляд:

$$G = AL^{1.5}(r-k)I^{0.75}, \tag{17}$$

де G – об'єм змитого ґрунту; $A = A_1\alpha^{1.5}$, α – коефіцієнт; $C = \alpha \cdot I^{0.5}$ – формула Шезі, C – швидкісний коефіцієнт; L – довжина схилу; r – інтенсивність опадів; k – інтенсивність інфільтрації; I – нахил схилу.

Суттєвий недолік даної моделі полягає в тому, що вона не враховує ефект впливу дощових крапель, які створюють кінетичну енергію, що необхідна для відриву складових елементів поверхневого шару.

Модель Мірцхулави

Розроблена у 1970 році модель Ц.Е. Мірцхулави [6] є вдосконаленою моделлю Костякова, що враховує вплив крапель дощу та його інтенсивності на об'єм площинного змиву ґрунту. Суть методу базується на принципах граничної міцності ґрунтів та пульсаційного характеру динамічної дії потоку на поверхню ґрунту. При розробці моделі експериментальні дані отримують в результаті штучного дощування. Позитивною рисою моделі є її гнучкість, тобто можливість практичного застосування при зміні вихідних умов: при цьому коефіцієнти рівняння підбираються на основі синтезу сукупності експериментальних досліджень місцевості.

$$q_x = \lambda \cdot \gamma \cdot \omega \cdot d^2 \cdot \int_0^x \left(\frac{\upsilon_{\Delta x}^2}{\upsilon_{\Delta доп}^2} - 1 \right) \frac{dx}{d}, \tag{18}$$

де q_x – інтенсивність змиву ґрунту, кг/с; $\lambda = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ – коефіцієнт, що визначає вплив похибок вимірювань відносно реального змиву ґрунту; γ – об'ємна вага ґрунту; ω – частота пульсацій розмиваючих швидкостей; d – середній діаметр агрегатів ґрунту; $\upsilon_{\Delta x}$ – швидкість руху води на відстані x від вододілу; $\upsilon_{\Delta доп}$ – допустимий максимум швидкості, що визначає початок ерозійного процесу.

Модифікована модель Мірцхулави

Модифікована версія гідромеханічної моделі Мірцхулави може бути описана рівнянням [14]

$$q_x = \lambda \cdot \omega \cdot \gamma \cdot f \cdot d^2 \cdot \sum_0^y \sum_0^x \left(\frac{\upsilon_{\Delta x}^2}{\upsilon_{\Delta äîï}^2} - 1 \right) \frac{dy}{d} \frac{dx}{d}, \tag{19}$$

де q_x – інтенсивність реального змиву кг/с; $\lambda = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ – коефіцієнт, що визначає вплив похибок вимірювань відносно реального змиву; γ – об'ємна маса ґрунту; ω – частота пульсацій розмиваючих швидкостей; d – середній

діаметр агрегатів ґрунту; $\upsilon_{\Delta x}$ – швидкість руху води на відстані $\tilde{o}$ м від вододілу; $\upsilon_{\Delta доп}$ – допустимий максимум швидкості, що визначає початок ерозійного процесу, f – фільтраційна здатність ґрунту.

Суттєві недоліки аналітичних моделей площинного змиву ґрунту зумовили необхідність дослідження та математичного моделювання ланцюга: змив – транспортування – акумуляція, тому наступним кроком у моделюванні стали ***динамічні*** або ***фізично обґрунтовані*** моделі. Найбільш відомими з них є кінематико-хвильові моделі змиву ґрунту, при розробці яких враховуються глибина та швидкість потоку, крутизна схилу, шорсткість та будова мікрорельєфу, інтенсивність змиву, відстань від вододілу тощо. Дані моделі також є далеко не досконалими, оскільки не враховують вплив рослинності та поверхневе затримання і можуть бути використані при обчисленні об'єму змиву ґрунту лише для однорідних схилів.

Динамічні (кінематично-хвильові або фізично-обґрунтовані) моделі викликали неабиякий інтерес у фахівців багатьох країн, зокрема були розроблені моделі WEPP (Water Erosion Prediction Project; USA, Nearing, 1989); EUROSEM (EUROpean Soil Erosion Model; 1992, 2002); EXCESS – ERACC (Україна, Світличний, 1995) тощо.

Модель WEPP

Обчислення об'ємів змитого ґрунту або акумуляції наносів у моделі проводиться на основі рівняння нерозривності наносів для встановленого режиму у вигляді:

$$\frac{dq_{\mu}}{dx} = D_f + D_r, \tag{20}$$

де D_f – інтенсивність промоїнної ерозії, кг·с$^{-1}$·м$^{-1}$; D_r – інтенсивність міжпромоїнної ерозії, кг·с$^{-1}$· м$^{-1}$; dq_{μ} – витрата схилових наносів, кг·с$^{-1}$· м$^{-1}$.

$$D_f = D_c\left(1 - \frac{q_{\mu}}{T_s}\right) \tag{21}$$

де D_c – ерозійна здатність потоку, кг·с$^{-1}$· м$^{-1}$; T_s – транспортна здатність потоку, кг·с$^{-1}$·м$^{-1}$.

$$D_c = k_r\left(\tau - \tau_c\right), \tag{22}$$

де k_r – коефіцієнт промоїнної еродованості потоку, с·м; τ – дотична напруга, що діє на поверхню ґрунту, Па; τ_c – критична дотична напруга для даного типу ґрунту, Па.

Інтенсивність міжпромоїнної ерозії обчислюється за формулою

$$D_{\text{r}} = k_i r_e^2 C_e G_e S_f \,, \tag{23}$$

де k_i – коефіцієнт міжпромоїнної еродованості, кг·с$^{-1}$·м^2; r_e – ефективна інтенсивність дощу за період перевищення інтенсивності опадів над інфільтрацією, м/с; C_e – коефіцієнт впливу рослинного покриву; G_e – коефіцієнт впливу наземного покриву; S_f – коефіцієнт впливу нахилу.

Модель EXCESS – ERACC

$$D = k_{\text{p}} j_p k_{pse} \left(1 + 1.02 \cdot 10^6 \cdot A \cdot r\right) \cdot q^{2.7} \left(1 - \frac{q_\mu}{q_{\mu\max}}\right)$$

$$\text{при } q_\mu < q_{\mu\max} \tag{24}$$

$$\text{A}_{\text{f}} = \frac{v_e}{q}\left(q_{\mu\max} - q_\mu\right) \text{ при } q_\mu \geq q_{\mu\max}\,, \tag{25}$$

де D – інтенсивність надходження частинок наносів в потік з поверхні ґрунту (змив ґрунту) в результаті сумарної дії крапель дощу і потоку на одиницю площі, кг/с/м^2; q_μ – витрата схилових наносів на одиницю ширини схилу, кг/с/м; $q_{\mu\max}$ – транспортуюча здатність потоку, кг/с/м; j_p – коефіцієнт відносного змиву для різних типів ґрунтів; k_{pse} – коефіцієнт, що враховує вплив еродованості ґрунту на відносний змив; A – коефіцієнт, що враховує вплив рослинності на процес відриву часток ґрунту; r – інтенсивність опадів, м/с; q – витрата води на одиницю ширини схилу м^3/с/м; v_e – гідравлічна крупність схилових наносів.

Модель KINEROS

Перша модифікація рівняння цієї моделі (1990) має вигляд:

$$\frac{\partial \text{A}}{\partial \text{t}} + \frac{\partial \text{Q}}{\partial \text{x}} = r(t) - f(t)\,; \tag{26}$$

$$Q = v \cdot A = \alpha \cdot p \cdot R^{\beta}\,, \tag{27}$$

де Q – витрати води; A – площа живого січення русел; $r(t)$ – інтенсивність опадів; $f(t)$ – інтенсивність інфільтрації; v – середня швидкість потоку; R – гідравлічний радіус; α, p, β – гідравлічні параметри,

$\alpha = \frac{(s)^{0.5}}{n}$, де n – коефіцієнт шорсткості Маннінга, s – нахил поверхні.

Висновки та перспективи подальших досліджень. Враховуючи високий рівень сучасного розвитку математичного моделювання площинного змиву ґрунту, можна спрогнозувати, що на зміну статичним аналітичним та гнучким динамічним моделям у перспективі прийдуть логічні моделі, що спиратимуться не лише на формальний математичний апарат, а й враховуватимуть змістову складову процесу виникнення і розвитку змиву.

1. Булыгин С. Ю. Формирование экологически сбалансированных ландшафтов: проблема эрозии [Текст] / С. Ю. Булыгин, М. А. Неаринг. – Харьков, 1999. – 272 с. **2.** Ерозія і дефляція ґрунтів та заходи боротьби з ними / [Примак І. Д., Гудзь В. П., Вахній С. П. та ін.]. – Біла Церква, 2001. – 392 с. **3.** Закон України “Про охорону земель” № 962-IV від 19. 06. 2003 (зі змінами). **4.** Малкина-Пых И. Г. Моделирование эрозионных потерь гумуса на основе метода функций отклика [Текст] / И. Г. Малкина // Почвоведение – 1996. – №10 – С. 1271–1276. **5.** Мельник В. М. Морфолого-спектральна оцінка параметрів гідромеханічної моделі ерозії ґрунту[Текст] /В. М. Мельник, В. П. Мендель, В. Ф. Радзій // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва – 2012. – № I(23) – С. 188-192. **6.** Мирцхулава Ц. Е. Инженерные методы расчета и прогноза водной эрозии [Текст] / Ц. Е. Мирцхулава. – М. : Колос, 1970. – 240 с. **7.** Светличный А. А. Эрозиоведение: теоретические и прикладные аспекты [Текст] / А. А. Светличный, С. Г. Черный, Г. И. Швебс. – Сумы: Университ. кн., 2004. – 410 с. **8.** Predicting soil erosion by water: a guide to conservation planning with the Revised Universal Soil Loss Equation (RUSLE) / Renard K.G., Foster G.R., Weesies G.A., McCook D.K., Yoder D.C. //Agriculture Handbook. – № 703. – U.S. Department of Agriculture, Washington, 1993. – 404 p.

Рецензент: д.т.н., професор Мельник В. М. (Волинський національний університет імені Л. Українки)