МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

УДК 539.3

Сяський А. О., д.т.н., професор, Музичук К. П., аспірант (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

ЗГИН КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ПЛАСТИНКИ З КОЛОВИМ РОЗРІЗОМ, БЕРЕГИ ЯКОГО КОНТАКТУЮТЬ

Розглянуто мішану контактну задачу для нескінченної ізотропної пластинки з впаяним круглим пружним диском за наявності на межі розділу матеріалів наскрізної тріщини, береги якої контактують при дії згинального навантаження. Досліджується напружений стан пластинки в зонах контакту та спаю. Встановлюється допустима величина розрізу, для якого забезпечується герметичність конструкції.
Ключові слова: ізотропна пластинка, пружний диск, згинальне навантаження, інтегрально-диференціальні рівняння.

Рассмотрена смешанная контактная задача для бесконечной изотропной пластинки с впаянным круглым упругим диском при наличии на границе раздела материалов сквозной трещины, берега которой контактируют под действием изгибающей нагрузки. Исследуется напряженное состояние пластинки в зонах контакта и спая. Устанавливается допустимая величина разреза, для которого обеспечивается герметичность конструкции.
Ключевые слова: изотропная пластинка, упругий диск, изгибающая нагрузка, интегрально-дифференциальные уравнения.

The considered the mixed contact problem for an infinite isotropic plate with the circular elastic disk soldered in involving the through-the-thickness crack on the interface of materials with the contacting banks under the action of the bending load. The stress state of the plate in the contact zone and soldered joint is researched. The allowable value of the cut for which is provided the tightness for the structure is determined.
Keywords: isotropic plate, elastic disk, bending load, integral-differential equations.

В інженерній практиці широко використовуються тонкостінні пластинчасті елементи конструкцій. Їх функціональна здатність великою мірою залежить від наявності тріщиноподібних дефектів, які різко знижують допустиме навантаження та експлуатаційний ресурс конструкції. Вивчення розподілу напружень і деформацій в околі вершин тріщини є основним завданням

при оцінці міцності і жорсткості пластинки. З'ясування питання, чи береги тріщини в процесі деформації розходяться, чи контактують, має самостійне значення з точки зору забезпечення непроникливості і герметичності конструкції.

Дослідженню напружено-деформованого стану у однорідних пластинчастих елементах конструкцій за наявності в них наскрізних криволінійних (по дузі кола) тріщин з контактуючими берегами за дії згинальних навантажень присвячені роботи [1, 2]. Для кусково-однорідних пластин з розрізом на лінії розмежування матеріалів такі задачі не розглядалися.

Пропонується розв'язок задачі для кусково-однорідної пластинки з коловим розрізом, береги якого за дії згинальних навантажень на нескінченності і в центрі диска контактують частково або по всій довжині.

Постановка і основні рівняння задачі. Розглянемо складену пластинчасту конструкцію, яка містить нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з круговим отвором одиничного радіуса, в який без зазору і натягу вставлено пружний диск товщиною $2h_1$. Допустимо, що на частині контуру Γ пластинка і диск спаяні між собою. На решті контуру Γ між пластинкою та диском наявний розріз нульової ширини (тріщина). Вважаємо, що пластинка і диск мають спільну середню площину, в якій вибрана прямокутна (x, y) і полярна (r, λ) системи відліку (рис. 1).

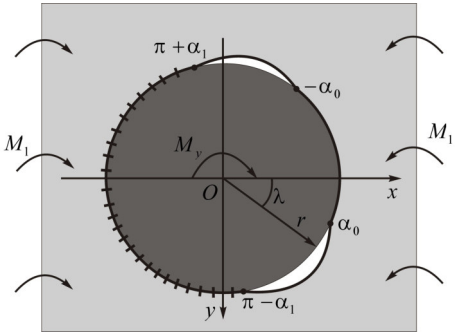


Рис. 1. Розрахункова схема задачі

Пластинка перебуває в умовах циліндричного згину на нескінченності рівномірно розподіленими моментами M_1, які діють в напрямку координатної осі Ox. В центрі диска діє зосереджена пара сил з моментом M_y. При заданому навантаженні береги розрізу між пластинкою і диском будуть контактувати. У такому випадку складена пластинка буде одночасно перебувати в умовах узагальненого плоского напруженого стану і згину.

Розв'язок задачі полягає у визначенні величини розрізу, при якому його береги будуть контактувати повністю або частково, а також компонентів напруженого стану на контурі Γ для пластинки і диска.

Позначимо через $-\alpha_0$, α_0, $\pi-\alpha_1$, $\pi+\alpha_1$ – полярні кути кінців зон розрізу і спаю; (E,ν), (E_1,ν_1) – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки і диска. Граничні умови задачі на ділянці повного контакту

$\left[-\alpha_0;\alpha_0\right]$ на підставі [1, 3] можна записати у вигляді:

$$U+h\frac{\partial w}{\partial x}+tg(\lambda)\left(V+h\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\tilde{U}+h\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x}+tg(\lambda)\left(\tilde{V}+h\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y}\right);$$

$$f_1'(\lambda)+tg(\lambda)f_2'(\lambda)=0;\ g_1'(\lambda)+tg(\lambda)g_2'(\lambda)=0; \qquad (1)$$

$$hf_2'(\lambda)+g_2'(\lambda)-tg(\lambda)\left(hf_1'(\lambda)+g_1'(\lambda)\right)=0.$$

Тут $f_1+if_2=ih\int\limits_{-\alpha_0}^{\lambda}\left(T_\rho+iS_{\rho\lambda}\right)e^{i\lambda}d\lambda$; $g_1+ig_2=i\int\limits_{-\alpha_0}^{\lambda}\left(M_\rho+iP\right)e^{i\lambda}d\lambda$; T_ρ, $S_{\rho\lambda}$ – нормальні та дотичні контактні зусилля; M_ρ, P – нормальні та узагальнені дотичні згинальні моменти; U, V – компоненти вектора зміщення точок контуру Γ, які належать середній площині пластинки; $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ – кути повороту нормалі до середньої площини пластинки в цих точках; w – прогин пластинки. Хвилькою позначені відповідні величини для диска.

Перша з умов (1) виражає рівність в зоні контакту нормальних зміщень контурних точок пластинки і диска на верхній лицьовій поверхні, друга і третя умови – відсутність дотичних зусиль $S_{\rho\lambda}$ і моментів P, а четверта – зв'язок між нормальними зусиллями і моментами $M_\rho=-hT_\rho$.

В зоні спаю $\left[\pi-\alpha_1;\pi+\alpha_1\right]$ має місце ідеальний механічний контакт, тому граничні умови, згідно з [3], можна подати так:

$$U=\tilde{U};\quad V=\tilde{V};\quad \partial w/\partial x=\partial\tilde{w}/\partial x;\quad \partial w/\partial y=\partial\tilde{w}/\partial y. \qquad (2)$$

Величини U, V, $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ визначаються за формулами [3, 4]

$$U=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)f_1(\lambda)+\frac{1}{\pi}\oint\limits_{\Gamma}f_2(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+C_1\right];$$

$$V=\frac{1}{2Eh}\left[(1-\nu)f_2(\lambda)-\frac{1}{\pi}\oint\limits_{\Gamma}f_1(t)ctg\frac{\lambda-t}{2}dt+C_2\right],\ \lambda\in\Gamma; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{k}{3+\nu}\left[(1+\nu)g_1(\lambda)-\frac{2}{\pi}\oint\limits_{\Gamma}g_2'(t)\ln\sin\frac{\lambda-t}{2}dt+2M_1\cos\lambda-\right.$$

$$-\frac{3+\nu}{1+\nu}M_1\cos\lambda-(3+\nu)\tilde{C}_1\sin\lambda+C_3\Bigg];$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{k}{3+\nu}\Bigg[(1+\nu)g_2(\lambda)+\frac{2}{\pi}\oint_\Gamma g_1'(t)\ln\sin\frac{\lambda-t}{2}dt+\frac{1+\nu}{2\pi}M_y\lambda-$$

$$-\frac{1-\nu}{1+\nu}M_1\sin\lambda+(3+\nu)\tilde{C}_1\cos\lambda+C_4\Bigg],\ \lambda\in\Gamma. \qquad (4)$$

Тут $k=\dfrac{3(1+\nu)}{2Eh^3}$; C_1, C_2, C_3, C_4, $\tilde{C}_1$ – довільні сталі.

За аналогічними формулами визначаються відповідні величини для диска. Їх підстановка з урахуванням (3), (4) в граничні умови (1), (2) приводить до системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з логарифмічними ядрами для визначення функцій $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$, $g_1'(\lambda)$, $g_2'(\lambda)$ в зоні контакту і на ділянці спаю.

Цю системи слід доповнити силовими і моментними умовами рівноваги диска [3, 4], які дозволяють визначити сталі C_1, C_2, C_3, C_4

$$\oint_\Gamma f_1'(t)dt=0;\ \oint_\Gamma f_2'(t)dt=0;\ \oint_\Gamma g_1'(t)dt=-M_y;\ \oint_\Gamma g_2'(t)dt=0.$$

Для знаходження сталої $\tilde{C}_1$ служить умова однозначності прогину пластинки [4], яку можна записати у вигляді

$$\tilde{C}_1-\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma(g_1'(t)\cos t+g_2'(t)\sin t)dt=0.$$

Якщо розв'язок системи $f_j'(\lambda)$, $g_j'(\lambda)$, $(j=\overline{1,4})$ стане відомим, то шукані контактні зусилля та моменти визначаються із співвідношень

$$T_\rho+iS_{\rho\lambda}=\left(f_2'(\lambda)+if_1'(\lambda)\right)\left(\cos(\lambda)-i\sin(\lambda)\right);$$

$$M_\rho+iP=\left(g_2'(\lambda)+ig_1'(\lambda)\right)\left(\cos(\lambda)-i\sin(\lambda)\right),\lambda\in\Gamma.$$

Кільцеві зусилля T_λ, моменти M_λ та крутні моменти $H_{\rho\lambda}$ на контурі отвору можна визначити за формулами, наведеними в [5].

Із загальної постановки виділимо окремі випадки задачі:

- якщо в системі рівнянь покласти $E_1/E\to\infty$, то отримаємо задачу про згин ізотропної пластинки з впаяним жорстким диском за наявності розрізу на межі розділу матеріалів;

- при $E_1/E = 1$ приходимо до задачі про згин нескінченної однорідної ізотропної пластинки з круговим розрізом, береги якого контактують частково або по всій довжині [1, 2].

Числова реалізація задачі. Точний розв'язок розглядуваної задачі знайти неможливо. Для її наближеного розв'язання використаємо числово-аналітичні методи механічних квадратур і колокації [3, 4]. Для цього необхідно встановити поведінку розв'язку системи при підході до кінців ділянок спаю та контакту.

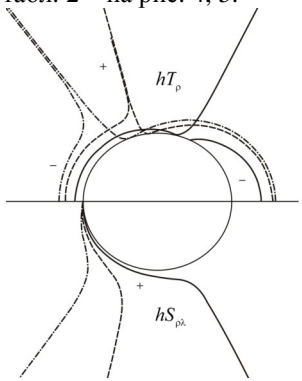
В околі кінців зони спаю контактні зусилля та моменти мають кореневу особливість [4]. Таку ж особливість будуть мати функції $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$, $g_1'(\lambda)$, $g_2'(\lambda)$.

Структура розв'язку на ділянці контакту залежить від величини розрізу. Позначимо через α_0^* найбільше значення полярного кута α_0, до якого має місце повний контакт між пластинкою і диском, а при $\alpha_0 = \alpha_0^*$ відбудеться розмикання контакту в двох точках. Причому точки розмикання можуть бути або кінцями розрізу ($\alpha_0 = \alpha_0^*$) або його внутрішніми точками ($\alpha_0 > \alpha_0^*$). У першому випадку функції $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$, $g_1'(\lambda)$, $g_2'(\lambda)$ будуть обмежені на ділянці контакту, а на її кінцях дорівнювати нулю. Подальше збільшення α_0 приведе до появи двох зон відставання, які прилягають до зони спаю.

Якщо точки розмикання внутрішні $\alpha_0 > \alpha_0^*$, то шукані функції на кінцях ділянки контакту мають кореневу особливість і збільшення величини розрізу може привести до попереднього випадку або до появи трьох зон контакту і двох зон відставання. У такій постановці розв'язок задачі не визначався.

Для складеної пластинки при $h = h_1$, $M_1 = 0$ досліджено вплив на її напружений стан величини зони спаю та відносної жорсткості диска E_1/E. Результати числового розрахунку контактних зусиль і моментів наведені на рис. 2-5. В табл. 1 подано значення величини розрізу $\pm\alpha_0$ для якого розмикання зони контакту відбудеться у двох точках, а також положення цих точок ($\pm\alpha_0^*$) на контурі отвору. В табл. 2 наведено значення α_0, для якого єдина зона контакту ізольована, і величину цієї зони $\tilde{\alpha}_0$. В цій же таблиці наведено значення контактних зусиль hT_ρ в центрі зони контакту і моментів M_ρ в центрі зони спаю. Графіки, побудовані для табл. 1, зображені на рис. 2, 3, а

для табл. 2 – на рис. 4, 5.



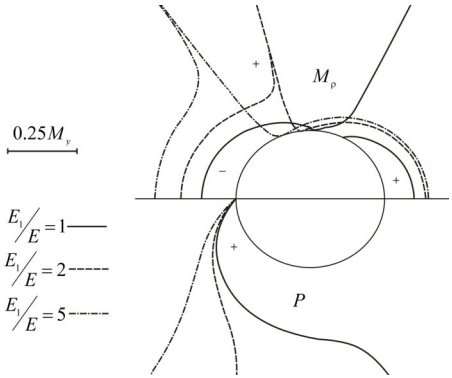
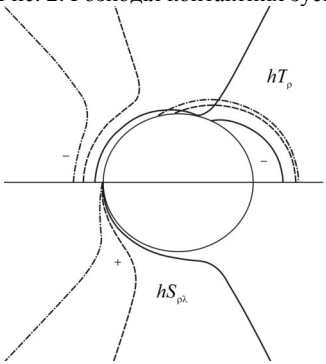


Рис. 2. Розподіл контактних зусиль

Рис. 3. Розподіл контактних моментів



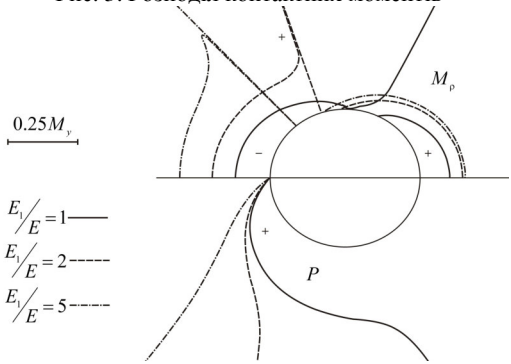


Рис. 4. Розподіл контактних зусиль

Рис. 5. Розподіл контактних моментів

Таблиця 1

$\frac{E_1}{E}$	α_0 (град.)	α_0^* (град.)	hT_ρ, $(\lambda = 0)$	M_ρ, $(\lambda = \pi)$
1	64.516	64.516	-0.098	-0.113
2	104.436	95.953	-0.137	-0.184
5	125.515	110.120	-0.1422	-0.271

Таблиця 2

$\frac{E_1}{E}$	α_0 (град.)	$\tilde{\alpha}_0$ (град.)	hT_ρ, $(\lambda = 0)$	M_ρ, $(\lambda = \pi)$
1	64.516	64.516	-0.098	-0.113
2	108	93.129	-0.142	-0.191
5	131.5	105.174	-0.149	-0.300

Аналізуючи отримані результати, приходимо до висновку, що контактні зусилля та моменти на кінцях ділянки спаю набувають необмежених значень. При збільшенні відносної жорсткості диска E_1/E зростатиме величина ділянки контакту, в якій виникатиме розмикання в одній точці і відповідно збільшуватимуться контактні зусилля в центрі цієї зони та контактні моменти в центрі зони спаю. Коли $E_1 > E$ розмикання контакту виникатиме в межах розрізу. Для такого випадку зусилля на кінцях розрізу не дорівнюватимуть нулю, а будуть нескінченними. При $E_1 = E$ отримані результати співпадають з наведеними в [2]. Якщо вибирати величину розрізу α_0 меншу за подану в таблиці 1, то отримаємо повну непроникність конструкції. Запропонований метод може бути використаний при розв'язуванні аналогічної задачі для ортотропної пластинки з круговим отвором.

1. Божидарнік В. Згин ізотропної пластинки, ослабленої розрізом по дузі кола з контактуючими берегами / В. Божидарнік, В. Опанасович, П. Герасимчук // Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 7-16. **2.** Герасимчук П. Згин пластини з наскрізною тріщиною по дузі кола зосередженими моментами, прикладеними в центрі кола, з урахуванням контакту її берегів / П. Герасимчук // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом інженерна механіка). – Луцьк: Луцький державний технічний університет. – 2005. Вип. 17. – С. 58-66. **3.** Сяський А. Мішана контактна задача для ізотропної пластинки з криволінійним отвором і жорсткого диска / А. Сяський, Н. Шинкарчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Том 16. – № 1. – С. 16-21. **4.** Сяський А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині / А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 30-36. **5.** Шевцова Н. Контактна взаємодія пластин з криволінійними контурами і розімкнених пружних ребер при їх несиметричному сполученні / Н. Шевцова, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – Т. 14, № 2. – С. 14-22.

Рецензент: д.т.н., професор Кундрат М. М. (НУВГП)