УДК 539.3

Білан Б. С., ст. викладач (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне), **Карпюк Л. А., студентка 6 курсу ТЕФ** (Національний технічний університет України ”Київський політехнічний інститут”, м. Київ)

ПОСТАНОВКА І АНАЛІЗ ТЕРМОПРУЖНИХ ЗАДАЧ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ДВОШАРОВИХ ТРИБОСИСТЕМ

Сформульована математична модель задачі для двошарової m-кутної труби. Здійснено постановку плоскої статичної гранично-контактної термопружної задачі для двошарової m-кутної труби, яка перебуває під дією фрикційного температурного поля і рівномірно розподілених стисних нормальних напружень на бічних поверхнях.
Ключові слова: термопружна рівновага, двошарова *m*-кутна труба, фрикційне нагрівання, малий параметр.

Сформулирована математическая модель задачи для двухслойной m-угольных трубы. Осуществлена постановка плоской статической контактной термоупругой задачи для двухслойной m-угольных трубы, находящейся под действием фрикционного температурного поля и равномерно распределенных давящей нормальных напряжений на боковых поверхностях.
Ключевые слова: термоупругое равновесие, двухслойная m-угольный труба, фрикционный нагрев, малый параметр.

Formulated a mathematical model of the two-layer m-gon tube. Staged by the plane of maximum static thermoelastic contact problem for two-layer m-gon pipe, which is under the influence of friction temperature field and uniformly different squeeze normal stresses on the lateral surfaces.
Keywords: thermoelastic equilibrium, layer m-gon tube, frictional heating, small parameter.

1. Вступ. Забезпечення експлуатаційної міцності співдотичних тіл, надійності їхньої роботи в навантажених вузлах транспортних, підйомних, дорожньо-будівельних і бурових машин, верстатного і вальцювального обладнання можливі лише за достатньо повної інформації про розподіл напружень у місцях дотику деталей, температурні й кінематичні характеристики взаємодії. Особливо точно під час проектування та розрахунку вузлів машин і механізмів треба враховувати супроводжуюче тертя фрикційного теплоутворення і спрацювання елементів трибоз’єднань. Фрикційне теплоутворення є одним із

негативних чинників, які посилюють зношення деталей елементів пари тертя в умовах навантаженого контакту, оскільки підвищення температури тягне за собою деформування матеріалів, що спричиняє затинання на локальному контакті робочих поверхонь, які труться.

Оскільки теплоутворення і теплоперенесення під час тертя залежить як від геометричних параметрів пари тертя, так і від характеру їхньої контактної взаємодії, силового й швидкісного режиму роботи вузла тертя, механічних і теплофізичних властивостей трибосистеми, то їх аналітичне дослідження є комплексною проблемою, що складається з низки самостійних задач, до яких, поряд із аналізом і дослідженням виділення й розсіювання тепла на поверхні дотику, входять задачі контактної термопружної взаємодії елементів пари тертя. Спричинено це тим, що термічні деформації поверхонь співдотичних тіл приводять до істотного перерозподілу контактних напружень, які можуть навіть у кілька разів перевищувати рівень напруження ізотермічної задачі.

Постановка і побудова розв'язків таких задач є важливою й актуальною проблемою на сучасному етапі розвитку механіки контактної взаємодії і трибології, оскільки дає можливість вивчити закономірності розподілу контактного тиску та полів температур і напружень в тілах, що труться, а також виробити науково обґрунтовані рекомендації для оптимального розрахунку вузлів тертя на фрикційну теплостійкість.

Сучасні уявлення про теплоутворення від дії сил тертя ґрунтуються на тому, що при відносному ковзанні двох співдотичних тіл проходять, з одного боку, пружні та пластичні деформації контактуючих мікронерівностей, з другого боку долається молекулярна взаємодія поверхонь. Все це разом призводить до хаотичного /теплового/ руху молекул у тонких при поверхневих шарах взаємодіючих тіл. Утворене таким чином тепло поширюється від плям контакту в глибину тіл. Теплові потоки між тілами розподіляються залежно від теплових властивостей, їх розмірів та умов тепловідведення. Частина тепла розсіюється в навколишнє середовище. Інтенсивність теплового потоку, що генерується на контакті, залежить від багатьох чинників, зокрема сили тертя, напружено-деформованого стану тіл на ділянці контакту, швидкості відносного руху тіл, теплофізичних і геометричних параметрів вузла тертя.

Отже, задачу про контакту взаємодію двох тіл з врахуванням теплоутворення від дії сил тертя слід розглядати як граничну задачу термопружності для цих тіл при дії на ділянці контакту розподілених джерел тепла невідомої наперед інтенсивності.

2. Аналіз останніх досліджень. Дослідження контактної взаємодії двох порожнистих осесиметричних циліндричних труб з урахуванням фрикційного теплоутворення було здійснено у праці Д.В. Грилицького [1], де задача звелася до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial t^{(i)}}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 t^{(i)}}{\partial \varphi^2}=\frac{\partial t^{(i)}}{\partial \tau}, i=1,2 \quad (1)$$

при граничних умовах

$$\rho=\rho_1:\frac{\partial t^1}{\partial \rho}-\gamma_1\left[t^1-\theta_1(\tau)\right]=0;\rho_b=1-\varepsilon\cos\varphi:\frac{\partial t^2}{\partial \rho}-\varepsilon\sin\varphi\frac{\partial t^2}{\partial \rho}+\gamma_2\left[t^2-\theta_2(\tau)\right]=0 \quad (2)$$

контактних теплових умовах

$$\rho=\rho_0:\lambda_1\frac{\partial t^{(1)}}{\partial \rho}-\lambda_2\frac{\partial t^2}{\partial \rho}=0,\lambda_1\frac{\partial t^{(1)}}{\partial \rho}+\lambda_2\frac{\partial t^{(2)}}{\partial \rho}+(t^{(1)}-t^{(2)})=0 \quad (3)$$

та початковій умові

$$\tau=0:t^{(i)}(\rho,\varphi,0)=\theta_0^{(i)}=const, \quad (4)$$

де $\tilde{t}^{(i)},\tilde{t}_j^{(i)}=\alpha_i(t^{(i)},t_j^{(i)})$ – температура, α_i – коефіцієнт лінійного температурного розширення, $\tilde{\theta}_i=\alpha_i\theta_i$ – температура навколишнього середовища, $\tilde{\theta}_0^{(i)}=\alpha_i\theta_0^{(i)}$ – початкова температура труби; $\tilde{\gamma}_i=b\gamma_i$ – коефіцієнт теплообміну; $\tilde{\lambda}_i=\lambda_i/bh$ – коефіцієнт теплопровідності, h – коефіцієнт термічної провідності поверхні контакту; $\tilde{\tau}=c_0^{(i)}\tau/b^2$ – час; $c_0^{(i)}$ – коефіцієнт температуропровідності; $\rho=r/b$ – біжучий радіус, $\rho_0=c/b$ – радіус кола дотику труб, $\rho_1=a/b$ – радіус внутрішнього кола двошарової труби; $\tilde{\varepsilon}=\varepsilon/b$ – ексцентриситет зовнішньої труби.

Дж. Барбер запропонував математичний опис впливу термічної деформації на тепловий контактний опір між двома твердими тілами [2]. М.В. Генералова, Б.А. Кудрявцева, В.З. Партона [3] у своїх роботах розглянули взаємодію двох безмежних пружних тіл, які обертаються навколо осі симетрії з постійною кутовою швидкістю, а також дослідили контакт пружного півпростору з циліндричним жорстким штампом, який обертається.

У роботі [4] М.В. Коровчинський сформулював основи теорії термічного контакту тіл при локальному терті.

Д.В. Грилицький здійснив загальну постановку плоскої контактної задачі термопружності про взаємодію двох пружних тіл при стаціонарному теплоутворенні на ділянці тертя [5]. Між співдотичними тілами мають місце умови неідеального теплового контакту через тонкий проміжковий шар, які вперше отримано Я.С. Підстригачем [6]. На вільних поверхнях тіл здійснюється теплообмін із навколишнім середовищем за законом Ньютона. Задачу зведено до

системи п'яти сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь.

Д.В. Грилицький і М.Д. Грилицький сформулювали постановку й отримали наближений розв'язок плоскої просторової двовимірної квазістатичної гранично-контактної задачі термопружності для двошарової кругової ексцентричної труби, що знаходиться в умовах конвективного теплообміну з навколишнім середовищем, температура якого залежить від часу, і під дією рівномірно розподілених змінних у часі стисних нормальних напружень на бічних поверхнях. Задача розв'язана з використанням методів малого параметра та скінченного інтегрального перетворення [1].

3. Методика досліджень. Незважаючи на численні наукові публікації, присвячені різним аспектам контактної взаємодії тіл з урахуванням теплоутворення від дії сили тертя, поза увагою науковців залишилося дослідження контакту двошарових труб, зовнішня поверхня яких є не круговою.

4. Постановка задачі. З математичного погляду задача полягає у вирішенні двох завдань. 1) Побудови розв'язку диференціального рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 t_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial t_i}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t_i}{\partial \varphi^2}=0(i=1,2) \tag{5}$$

за таких крайових умов

$$r=a: \qquad \frac{\partial t_i}{\partial r}=\gamma_1 t_1; \qquad r=r_b: \qquad \frac{\partial t_2}{\partial n}=-\gamma_2 t_2 \tag{6}$$

і контактних теплових умов

$$r=c: \qquad \lambda_1\frac{\partial t_1}{\partial r}-\lambda_2\frac{\partial t_2}{\partial r}=\varpi fc\begin{cases} p_0+\sum\limits_{k=1}^{3}\left[p_k\cos(2k\varphi)+q_k\sin(2k\varphi)\right]\}, \\ \lambda_1\dfrac{\partial t_1}{\partial r}+\lambda_2\dfrac{\partial t_2}{\partial r}+h(t_1-t_2)=0, \end{cases} \tag{7}$$

де t_i – температура; γ_i – відносний коефіцієнт тепловіддачі; λ_i – коефіцієнт теплопровідності; h – коефіцієнт термічної провідності поверхні контакту; індекс $i=1$ відповідає внутрішній та $i=2$ – зовнішній трубам; p_0, p_k, q_k – складові контактного тиску; n – зовнішня нормаль до контуру $r=r_b$.

2) Побудови розвязків рівняння щодо функцій напружень

$$\Delta^2\Phi^{(\mathrm{i})}(\mathrm{r},\varphi)=0 \qquad (\nabla=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}); \tag{8}$$

$$\Delta^2\Psi^{(i)}(r,\varphi)=\frac{\alpha_i \mathrm{E}_i}{1-\upsilon_i}\Delta t_i \tag{9}$$

за таких крайових

$$\begin{aligned} r=a: &\qquad \sigma_{rr}^{(1)}=-\mathrm{P}_1, u_\varphi^{(1)}=0;\\ r=r_b: &\qquad \sigma_{nn}^{(2)}=-\mathrm{P}_{2,} u_\tau^{(2)}=0 \end{aligned} \tag{10}$$

і контактних механічних умов

$$\begin{aligned} r=c: &\qquad u_r^{(1)}=u_r^{(2)},\\ \sigma_{rr}^{(1)}=\sigma_{rr}^{(2)} &=-p_0-\sum_{k=1}^{3}\left[p_k\cos(2k\varphi)+q_k\sin(2k\varphi)\right],\\ \tau_{r\varphi}^{(1)}=\tau_{r\varphi}^{(2)} &=-fp_0-f\sum_{k=1}^{3}\left[p_k\cos(2k\varphi)+q_k\sin(2k\varphi)\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

де $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ – задані на поверхнях нормальні стикувальні напруження; $\sigma_{nn}^{(2)}$ – нормальні напруження; τ – дотична до контуру $r=r_b$; υ_i,E_i – коефіцієнти Пуассона і модулі пружності матеріалів

5. Результати досліджень В цій праці були побудовані розв'язки статичних термопружних гранично-контактних задач для двошарових еліптичної, трикутної, чотирикутної, *m*-кутної труби при обтисненні та фрикційному нагріві (рис. 1-4).

Вигляд зовнішнього контура зовнішньої труби визначається рівняннями x=*b*[cosφ+εcos(*m*φ)], y=*b*[sinφ-εsin(*m*φ)], де ε<<1 – малий параметр, що характеризує відхилення зовнішнього контура від кола радіуса *b*.

Задавшись радіусом *b*=1, розглянемо випадки еліптичного *m*=1 (рис. 1), трикутного *m*=2 (рис. 2), чотирикутного *m*=3 (рис. 3) і п'ятикутного *m*=4 (рис. 4) профілів при різних значеннях параметра ε. На рис. 1..4 лінія *1* відповідає значенню ε=0 (коло одиничного радіуса, концентричне коло); лінія *2* – ε =0,05 ; лінія *3* – ε =0,1 ; лінія *4* – ε =0,15 ; лінія 5 – ε =0,2.

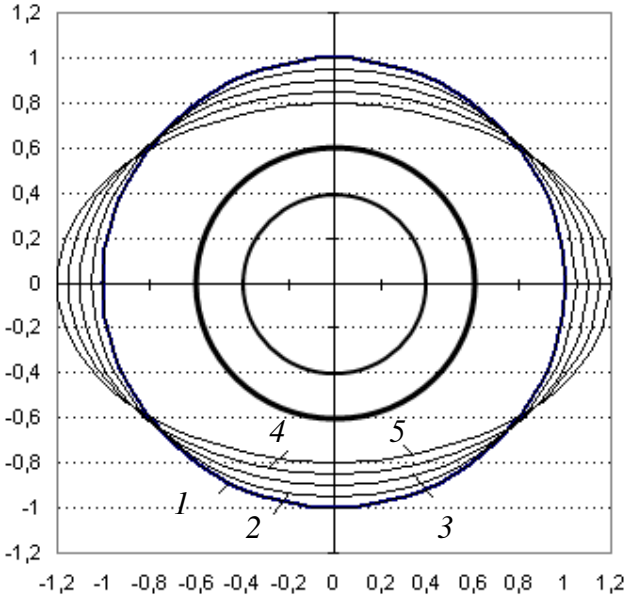

Рис. 1. Еліптичний профіль (m=1)

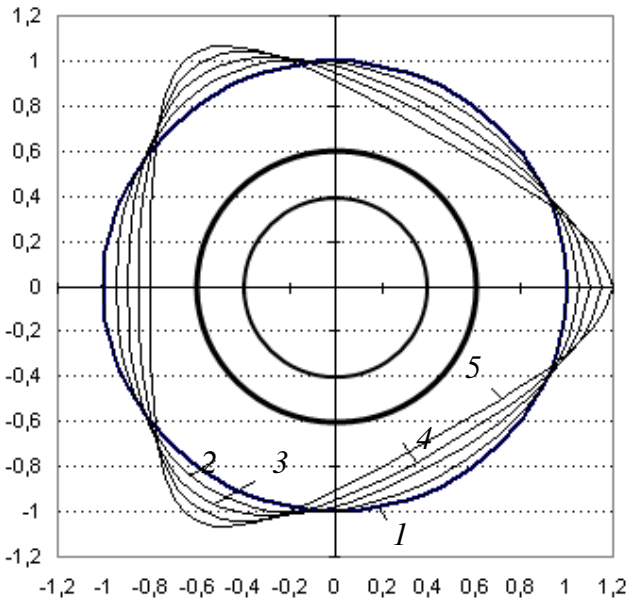

Рис. 2. Трикутний профіль (m=2)

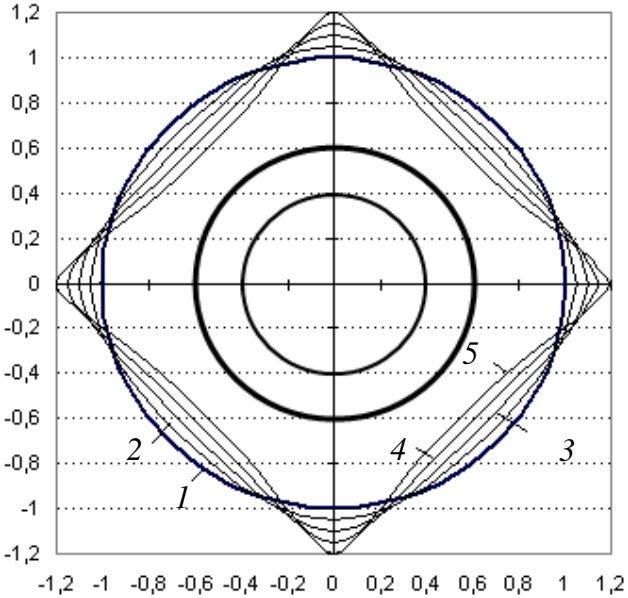

Рис. 3. Чотирикутний профіль (*m*=3)

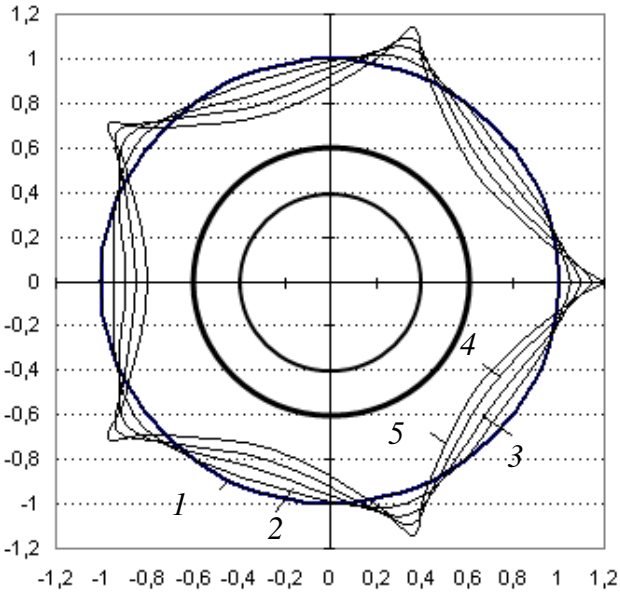

Рис. 4. П’ятикутний профіль (m=4)

Для таких профілів зовнішнього контура зовнішньої труби здійснено постановки гранично-контактних задач термопружності для двошарової труби із заокругленими кутами з урахуванням рівномірного обтискання і фрикційного нагрівання, а також побудовано наближені розв'язки цих задач. Досліджено вплив теплоутворення на механізм розподілу напружень і контактного тиску на межі дотику в двошарових трибосистемах.

Досліджено напружено-деформований стан двошарових трибосистем для значень параметра m=1, 2, 3. Методом малого параметра з урахуванням членів до третього порядку малості досліджено випадок, коли порожниста труба колового профілю охоплюється трубою, зовнішня поверхня якої внаслідок конструктивних потреб чи особливостей технології має m-кутну форму, рівнянням якої є $x=b[\cos\varphi+\varepsilon\cos(m\varphi)]$, $y=b[\sin\varphi-\varepsilon\sin(m\varphi)]$, де $\varepsilon<<1$ – малий параметр, що характеризує відхилення контура від кола радіуса b.

Внутрішня труба обертається з малою сталою кутовою швидкістю $\acute{\omega}$, внаслідок чого на поверхні контакту труб виділяється тепло від тертя, підпорядкованого закону Амонтона. Між зовнішніми поверхнями двошарової труби і зовнішнім середовищем, температура якого для визначеності вважають нульовою, відбувається теплообмін за законом Ньютона із сталими коефіцієнтами тепловіддачі. Вважається, що механічні та теплофізичні характеристики матеріалів труб не залежать від температури, а тепловий контакт труб – неідеальний.

6. Висновки. Сформульовано постановку плоскої статичної гранично-контактної термопружної задачі для двошарової m-кутної труби, яка перебуває під дією нерівномірно розподіленого фрикційного температурного поля і рівномірно розподілених стисних нормальних напружень на бічних поверхнях.двошарової трибосистеми. Задача буде роз'язана методом малого параметра з урахуванням членів до третього порядку малості.

1. Грилицький Д. В. Квазістатична гранично-контактна задача термопружності для двошарової кругової ексцентричної труби / Д. В. Грилицький, М. Д. Грилицький // Машинознавство. – 2000. – № 12 – С. 3-9. **2**. Barber J. R. Contact problems involving a cooled punch / J. R. Barber // J. Elastisity. –1978. – V.8. – P. 404-423. **3.** Генералов М. Б. Контактная задача термоупругости для вращающихся тел / Генералов М. Б., Кудрявцев Б. А., Партон В. З. // Изв. АН СССР. МТТ. – 1976. – № 3. – С. 46-52. **4.** Коровчинский М. В. Плоская контактная задача термоупругости при стационарном тепловыделении на поверхностях соприкасания / М. В. Коровчинский // Контактная прочность машиностроительных материалов. – М. : Наука, 1964. – С. 2-27. **5.** Гриліцький Д. В. Система сингулярних інтегральних рівнянь для плоскої контактної задачі термопружності при стацюнарному тепловиділенні на площадці контакту / Д. В. Гриліцький // Вісник Львівського університету. Сер. механіко-математична. – 1984. – Вип. 22. – С. 29-34. **6.** Підстригач Я. С. Умови теплового контакту твердих тіл / Я. С. Підстригач // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1963. – № 7. – С. 872-874.

Рецензент: д.т.н., професор Кундрат М. М. (НУВГП)