УДК 539.3

Русий Є. М., старший викладач, Андрушков В. І., к.т.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

МЕТОДИКА РОЗРАХУНКУ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ ПРИ ЧАСТКОВОМУ ОБПИРАННІ ЇЇ НА НЕДЕФОРМОВАНУ ОСНОВУ

Наведено результати дослідження напружено-деформованого стану круглої пластини та дна циліндричного резервуара при частковому обпиранні на недеформовану основу.

Приведены результаты исследования напряженно деформированного состоянию круглой пластины и дна цилиндрового резервуара при частичном упоре на недеформированную основу.

Results are presented of studying the stressed deformed state of round plate and the bottom of cylindrical reservoir under the partial resting on rigid base.

Відомо, що якщо умови обпирання або завантаження конструкції залежать від прогину, то цей прогин вже не буде пропорційний навантаженню, в зв'язку з цим втрачається право користуватись принципом накладання. Такий напружено-дефомований стан виникає при розрахунках круглих пластин, наприклад дна циліндричного резервуара.

1. Розрахунок круглої пластини радіуса a, що притиснута до основи рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю q і центральна частина якої отримала осадку δ (рис. 1). В цьому випадку кільцеобразна частина пластини буде вигнута, а середня частина радіуса b залишається плоскою.

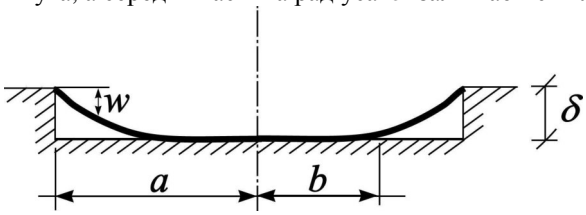

Рис. 1

Для розв'язку задачі використано вираз для прогину рівномірно завантаженої круглої пластини в полярних координатах [1]:

$$w = c_1 + c_2 \ln r + c_3 r^2 + c_4 r^2 \ln r + \frac{qr^2}{64D_1} \qquad (1)$$

Для визначення сталих інтегрування $c_1 \ldots c_4$ застосовано наступні граничні умови для зовнішнього та внутрішнього країв вигнутої частини пластини:

$$w_{r=a} = -\delta; \quad (M_r)_{r=a} = 0 \qquad (2)$$

$$w_{r=b} = 0; \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = 0; \quad (M_r)_{r=b} = 0$$

Підпорядковуя рівняння (1) умовам (2), отримано наступні п'ять рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln a + c_3 a^2 + c_4 a^2 \ln a + \dfrac{qa^4}{64D_1} = -\delta \\ c_1 + c_2 \ln b + c_3 b^2 + c_4 b^2 \ln b + \dfrac{qb^4}{64D_1} = 0 \\ c_2 \dfrac{\nu - 1}{b^2} + c_3 2(\nu + 1) + c_4 (3 + 2\ln b + 2\nu \ln b + \nu) + \dfrac{qb^2}{16D_1}(3 + \nu) = 0 \\ c_2 \dfrac{\nu - 1}{a^2} + c_3 2(\nu + 1) + c_4 (3 + 2\ln a + 2\nu \ln a + \nu) + \dfrac{qa^2}{16D_1}(3 + \nu) = 0 \\ c_2 \dfrac{1}{b} + c_3 2b + c_4 b(2\ln b + 1) + \dfrac{qb^3}{16D_1} = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

Після включення сталих інтегрування $c_1 \ldots c_4$ в (3) отримано рівняння, яке зв'язує прогин δ з співвідношенням $\frac{b}{a}$. На рис. 2 наведено графік розрахунку сталевої пластини завтовшки 1 см та радіусами $a = 0{,}5\,м;\ 0{,}8\,м;\ 0{,}9\,м;\ 1{,}0\,м.$

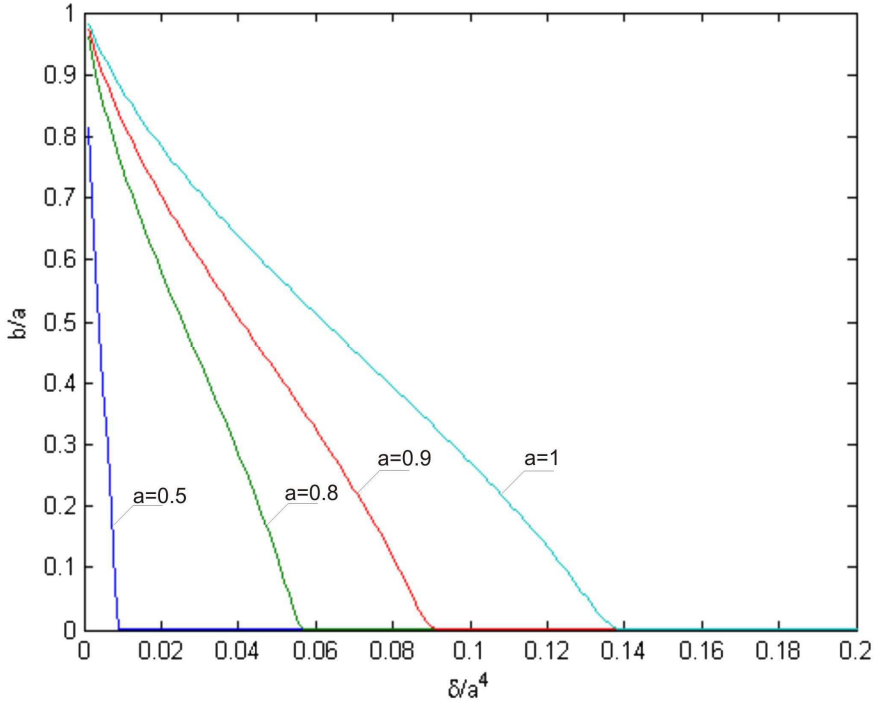

Рис. 2

Висновки:

1) Точки перетину функції $\frac{b}{a} = f\left(\frac{\delta}{a^4}\right)$ з віссю $\frac{\delta}{a^4}$ відповідають прогину вільно опертої рівномірно завантаженої круглої пластини в центрі.

2) При зменшені радіуса пластини a залежність $\frac{a}{b} = f(\delta)$ наближається до лінійної.

2. Розрахунок дна циліндричного резервуара під гідростатичним тиском при частковому обпиранні його на недеформовану основу.

По контуру дна резервуара у вигляді циліндричної пластини прикладено радіальні моменти інтенсивністю M_a, які виникають в наслідок деформування стінок резервуара (рис. 3).

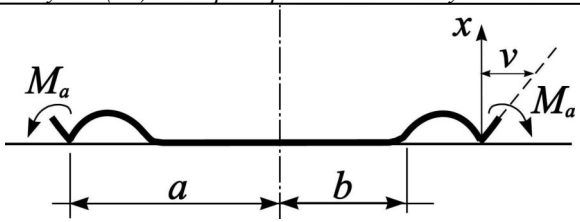

Рис. 3

При такому обпиранні, аналогічно з попереднім прикладом, кільцеобразна частина дна буде вигнута, а середня частина радіуса b залишається плоскою.

Для розв'язку задачі використано вираз (1), та рівняння прогину осесиметрично завантаженої циліндричної оболонки, що є рішенням системи диференційних рівнянь моментної теорії циліндричних оболонок [2]:

$$\upsilon = e^{\beta x}\left(c_5 \cos\beta x + c_6 \sin\beta x\right) + e^{-\beta x}\left(c_7 \cos\beta x + c_8 \sin\beta x\right) + \frac{qa^2}{64D_2}. \qquad (4)$$

Визначення сталих інтегрування c_i, $i = 1...4$ використано наступні граничні умови для зовнішнього та внутрішнього краю кільцеподібної пластини:

$$w_{r=a} = 0; \quad (M_r)_{r=a} = -M_a \qquad (5)$$

$$w_{r=b} = 0; \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=b} = 0; \quad (M_r)_{r=b} = 0.$$

Підпорядковуючи рівняння (4) умовам (5), отримано наступні п'ять рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 \ln a + c_3 a^2 + c_4 a^2 \ln a + \dfrac{qa^4}{64D_1} = 0 \\ c_1 + c_2 \ln b + c_3 b^2 + c_4 b^2 \ln b + \dfrac{qb^4}{64D_1} = 0 \\ c_2 \dfrac{\nu - 1}{a^2} + c_3 2(\nu - 1) + c_4 (3 + 2\ln a + 2\nu \ln a + \nu) + \dfrac{qa^2}{16D_1}(3 + \nu) - \dfrac{M_a}{D_1} = 0 \\ c_2 \dfrac{\nu - 1}{b^2} + c_3 2(\nu + 1) + c_4 (3 + 2\ln b + 2\nu \ln b + \nu) + \dfrac{qb^2}{16D_1}(3 + \nu) = 0 \\ c_2 \dfrac{1}{b} + c_3 2b + c_4 b(2\ln b + 1) + \dfrac{qb^3}{16D_1} = 0 \end{cases}. \qquad (6)$$

Відомо, що при достатній довжині оболонки обидві частини рівняння (4) мають самостійне значення: перша описує напружено-деформований стан на

межі при $x = \ell$, друга – при $x \to 0$. Тому для визначення радіального моменту M_a другу частину рівняння (4) підпорядковано граничним умовам виду:

$$v_{x=0} = 0; \qquad \left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=0} = \left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0}; \qquad (M_r)_{r=a} = (M_a)_{x=0}. \tag{7}$$

Підставляючи (1) та (4) в (7), отримуємо додаткові три рівняння:

$$\begin{cases} c_4 - \dfrac{\gamma \ell^2 a^4}{Eh} = 0 \\ 2D_2 \beta^2 c_8 - M_A = 0 \\ -\dfrac{\gamma a^2}{Eh_2} + \beta(c_8 - c_7) - \dfrac{c_2}{a} - c_3 2a - c_4(2\ln a + 1)a - \dfrac{qa^2}{16D_1} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $D_1 = \dfrac{Eh_1}{12(1-v^2)}$, $D_2 = \dfrac{Eh_2^2}{12(1-v^2)}$ – циліндричні жорсткості дна та оболонок, $\beta = \sqrt{\dfrac{1}{ah^2}} \cdot \sqrt[4]{3(1-v^2)}$, h_1 – товщина дна, h_2 – товщина стінки циліндра, v – коефіцієнт Пуассона.

Для розв'язку нелінійних рівнянь (6) та (8) при виборі деяких начальних наближень сталих інтегрування $c_1, c_2, c_3, c_4, c_7, c_8$ було отримано наближені розв'язки, які не відповідали фізичному змісту задачі. Було помічено, що в таких випадках не виконувались один або декілька з критеріїв достовірності знайденого рішення (прямування значення функції або прямування кроку ітеративного процесу до нуля). Було проаналізовано можливі значення начального наближення для даної системи при значеннях радіус циліндра $a = 0{,}6 \ldots 2{,}2\ м$ і обрано таке, в околі якого отримується стійкий розв'язок системи.

Після розв'язку системи з восьми нелінійних рівнянь (6) та (8) знайдено радіус суцільного обпирання пластини b та величина вузлового моменту M_a при наступних вихідних даних: товщина дна і стінок $h_1 = h_2 = 15\ мм$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$ резервуар наповнений рідиною з питомою вагою $\gamma = 10^4 \dfrac{Н}{м^3}$, радіус циліндра та висота резервуара змінювались в межах $a = (0{,}6 \div 2{,}2)\ м$, $\ell = (3{,}0 \div 5{,}5)\ м$ з кроком 0,1 м. Результати розрахунку наведено на рис. 4, 5.

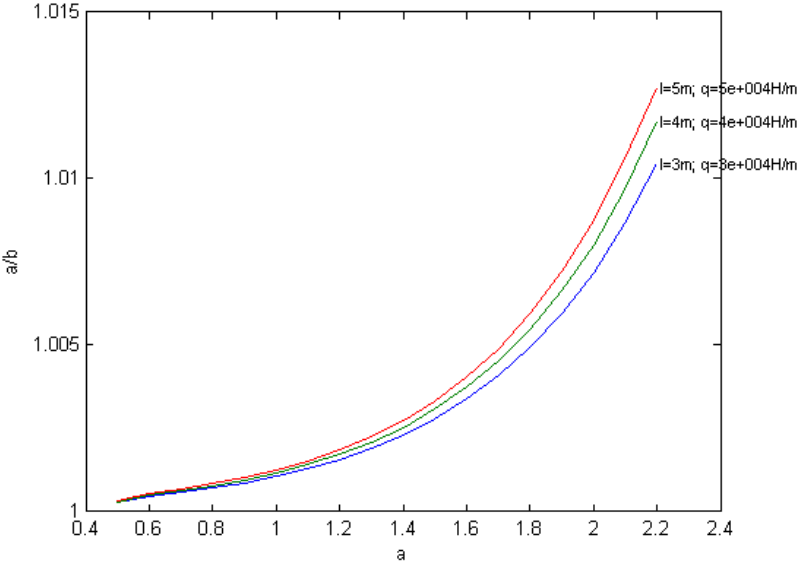
1.015
1.01
1.005
1
a/b
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
a
l=5m; q=5e+004H/m
l=4m; q=4e+004H/m
l=3m; q=3e+004H/m

Рис. 4

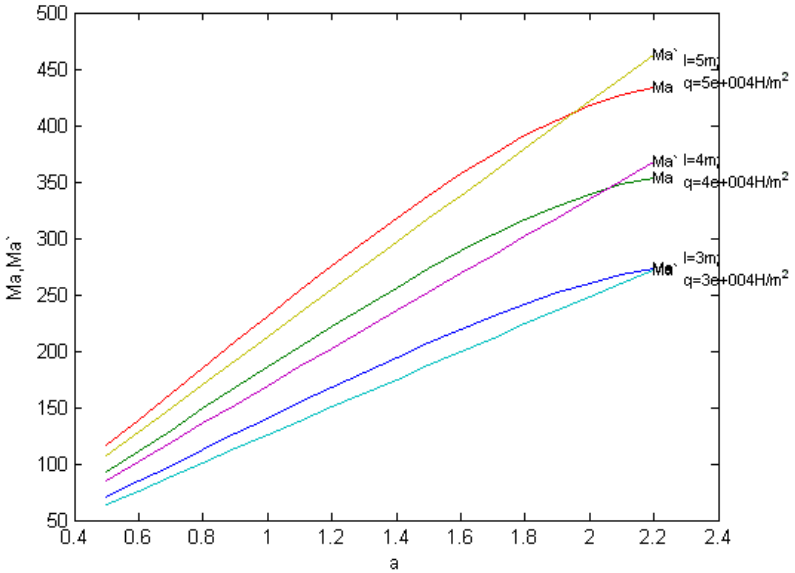
500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
Ma,Ma`
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4
a
Ma`
Ma
l=5m;
q=5e+004H/m2
Ma`
Ma
l=4m;
q=4e+004H/m2
Ma`
Ma
l=3m;
q=3e+004H/m2

Рис. 5

Висновки:

1. При збільшенні радіуса пластини і величини гідростатичного тиску ширина смуги відриву зростає і для вихідних умовах складає $(0{,}1 \div 0{,}3)\,\%$ від радіуса пластини.
2. Відрив частини дна від основи збільшує вузловий радіальний момент на величину до 10%, тобто нехтувати відривом дна резервуара від основи не можна, оскільки цей факт впливає на міцність запроектованої конструкції.

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболонки / С. П. Тимошенко, С. Войновський-Кригер. – Москва : Наука, 1966. **2.** Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек / Н. В. Колкунов. – Москва : Высшая школа, 1963.

Рецензент: д.т.н., професор Трач В. М. (НУВГП)