## ГЕОМЕТРИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОБ'ЄКТІВ, ПРОЦЕСІВ ТА ЯВИЩ

**УДК 744:004(075.8)**

**Дєєв С. С., к.т.н., доцент, Крівцов В. В., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

# ДО ПИТАННЯ ВИКОРИСТАННЯ КРИВИХ БЕЗ'Є ЗВ'ЯЗАНИМИ ДУГАМИ ТА ПАРАМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ ПРИ ВИКЛАДАННІ КУРСУ „МАШИННА ГРАФІКА"

**Наведено алгоритм апроксимації довільної кривої Без'є послідовністю зв'язаних дуг та параметричними поліномами, який можна використовувати для обміну графічної інформації за допомогою формату файлу EPS (Encapsulated Post Script).**
**Ключові слова: крива Без'є, зв'язані дуги, поліноми, апроксимація.**

**Приведен алгоритм аппроксимации произвольной кривой Безье последовательностью связанных дуг и параметрическими полиномами, который можно использовать для обмена графической информации с помощью формата файла EPS (Encapsulated Post Script).**
**Ключевые слова: кривая Безье, связанные дуги, полиномы, апроксимация.**

**An algorithm over of approximation of arbitrary curve Besier is brought by the sequence of the constrained arcs and self-reactance polynomials, that can be used for the exchange of graphic information by means of format of file of EPS(Encapsulated Post Script).**
**Keywords: curve Besier, the sequence of the constrained arcs, polynomials, approximation.**

Останнім часом багато прикладних програм для математичного опису і представлення графічних об'єктів використовують плоскі криві Без'є третього порядку (надалі скорочено називатимемо їх просто кривими Без'є, як це прийнято в сучасній літературі). Криві Безье використовуються, наприклад, в графічних редакторах Corel Draw!, Adobe Illustrator, Micrografx Designer, Aldus Freehand, видавничих пакетах Aldus Pagemaker, QuarkXpress і багатьох інших. Більш того, мова опису сторінок PostScript прямо орієнтована на використання кривих Без'є. Додамо ще, що в багатьох популярних шрифтових форматах (Adobe PostScript Type 1, Agfa Intellifont, Nimbus Q, і ін.) контури символів повністю або частково побудовані з кривих Безье, а для обміну гра-

фічною інформацією між різними програмами в середовищі Windows найчастіше використовується формат файлу EPS (Encapsulated PostScript, варіант мови PostScript). Всі згадані програмні продукти так чи інакше пов'язані з видавничою і дизайнерською діяльністю. З іншого боку, програми для обслуговування САПР і верстатів з ЧПУ використовують традиційний опис плоских контурів у вигляді відрізків прямих і дуг (AutoCAD, PCAD, КОМПАС ГРАФІК і ін.). Більшість відомих систем програмування для верстатів з ЧПУ також підтримують команди переміщення інструменту по відрізку і по дузі. Хоча могутні САПР "уміють" дуже багато що, в деяких випадках креслення деталі або його частина для обробки на верстаті з ЧПУ зручніше підготувати в дизайнерській системі. Особливо, якщо робота пов'язана з шрифтовим оформленням (таблички, рекламні панно, вивіски і т.п.): адже у розпорядженні оператора будь-якої дизайнерської або видавничої системи знаходяться десятки або навіть сотні шрифтів найрізноманітнішого зображення, чого не можна сказати про САПР. Візьмемо, наприклад, найпопулярнішу дизайнерську систему Corel Draw! і найпоширеніший пакет САПР – AutoCAD. Здавалося б, проблем з передачею графічної інформації немає: Corel Draw! експортує креслення у форматі DXF, котрий "розуміють" і AutoCAD, і багато інших програм. Проте Corel Draw! при записі кривих Без’є з бази даних малюнка у формат DXF використовує шматково-лінійну апроксимацію: кожна крива Без’є замінюється як мімнімум вісьма векторами, а, якщо вона опукла, охоплює достатньо великий кут і має порівняно великі розміри, таких векторів буде 64 або навіть більше! Є інший шлях. AutoCAD імпортує EPS-файли, проте... теж робить шматково-лінійну апроксимацію. В результаті база даних креслення непомірно розростається, а одержана на її основі програма для ЧПУ виявиться вельми довгою і повільною.

Нами було поставлене завдання апроксимувати довільну криву Без’є послідовністю зв'язаних дуг, причому число дуг повинне бути мінімальним при заданій точності апроксимації. Мета завдання – мінімізувати обсяг файлу імпорту даних і програму ЧПУ. Для зацікавленого читача нагадаємо, що криві Без’є названі так на честь французького математика П’єра Без’є, що вперше запропонував їх на початку 70-х років фірмі «Рено» для моделювання обводів кузова легкового автомобіля. У загальному вигляді рівняння кривої Без’є *n-го* порядку в багатовимірному просторі для кожної координати запишеться у вигляді (1):

$$r(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot a_i t^i (1-t)^{n-i} \ , \qquad (1)$$

де $r(t)$ – координата, що параметричний задається; $a_i$ – координати $i$ опорних точок (число опорних точок рівне); $t$ – параметр, який приймає значення від 0 до 1.

Плоска крива Без'є третього порядку з чотирма опорними точками є окремим випадком рівнянь (1), описується системою параметричних рівнянь (2) і є кубічним сплайном спеціального вигляду:

$$x(t) = (1-t)^3 x_1 + 3t(1-t)^2 x_2 + 3t^2(1-t)x_3 + t^3 x_4 ;$$

$$y(t) = (1-t)^3 y_1 + 3t(1-t)^2 y_2 + 3t^2(1-t)y_3 + t^3 y_4 , \qquad (2)$$

де $i$ – координати опорних, або таких, що управляють точками сплайна *A, B, C* і *D* (рис. 1).

Крива Без'є дотична до охоплюючого контуру *ABCD* в крайніх точках, тому сполучення з наступною кривою Без'є зробити дуже легко. Простий випадок апроксимації опуклої кривої Без'є двома зв'язаними дугами показаний на рис. 2

Математично завдання зводиться до відшукання координат центрів апроксимуючих дуг і (і відповідно їх радіусів $r_1, r_2$). Проте дане завдання не однозначне: існує безліч рішень. Якнайкращим буде, очевидно, рішення, яке мінімізує середньоквадратичне відхилення *D* (рис. 2). При обчисленні координат центрів слід перевіряти умови зв'язаності і опуклості. Якщо огинаючий контур є неопуклим або самопересічним ламаним, крива Без'є матиме точки перегину, повернення або перетину ( рис. 1).

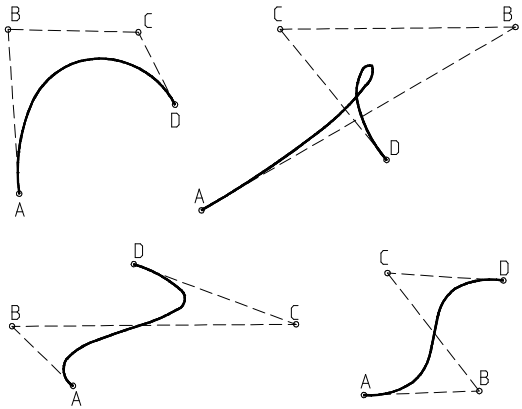


Рис. 1. Плоскі криві Без'є третього порядку

У цих випадках завдання ускладнюється, і необхідно перевіряти додаткові умови. Якщо апроксимація двома дугами не забезпечує необхідної точності, потрібно будувати три або навіть чотири дуги. Складність і кількість обчислень зростають на порядок. Але існує і інший підхід. Можна спробувати апроксимувати криву Без'є навіть однією дугою, що проходить через три задані точки: початкову, кінцеву точки огинаючого контуру і якусь середню точку на кривій Без'є.

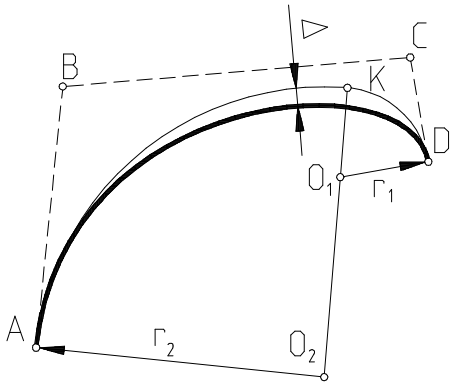


Рис. 2. Схема апроксимації кривої Без'є двома зв'язаними дугами

В цьому випадку слід перевіряти допустиме відхилення від напряму дотичної в точках сполучення з огинаючим контуром. Як показала практика, неточність сполучення в межах 3...4 градусів практично не помітна. Нам вдалося знайти достатньо ефективний алгоритм для швидкої апроксимації кривих Без'є послідовністю приблизно зв'язаних дуг. Критерієм точності апроксимації служить максимальне відхилення $\Delta$ (рис. 2) у напрямі радіусу. Якщо необхідна точність апроксимації або сполучення не досягається, число дуг автоматично збільшується і обчислення повторюються. Як показала практика, чотирьох-п'яти дуг звичайно буває достатньо, щоб апроксимувати криву Без'є практично будь-якої складності. Для апроксимації однієї опуклої кривої в описі символу типового шрифту у форматі Adobe PostScript буває досить двох дуг.

Наведено методи поліноміальної апроксимація одновимірних обводів і загальну постановку завдання апроксимації дискретного набору даних.

При конструюванні криволінійних обводів дискретна інформація може задаватися як безліччю характерних точок, так і безліччю ліній, що проходять через ці крапки. У цих випадках при формуванні математичних моделей безперервних обводів вирішують такі задачі:

1. Наближене представлення функції. На певному відрізку задана складна (з погляду обчислення її значень) функція. Потрібно замінити цю функцію деякою близькою функцією, значення якої легко обчислюються.

2. Наближене відновлення функції. На певному відрізку задана сітка, в її вузлах задані значення досить плавної функції. Потрібно по цих значеннях відновити функцію на всьому відрізку. З геометричної точки зору завдання

інтерполяції (наближеного відновлення) пов'язані з пошуком гладких кривих або поверхонь, що проходять через безліч заданих точок або ліній.

3. Завдання згладжування функції. Потрібно недостатньо гладку функцію (наприклад, що не диференціюється або диференціюється невелике число раз) приблизно представити гладшою функцією. Це завдання близьке до завдань 1 і 2. Завдання згладжування виникають, коли необхідно, щоб шукана крива або поверхня описувалися функцією, що забезпечує, наприклад, необхідний ступінь диференціювання.

З погляду чистої математики поділ на завдання 1-3 часто здійснене умовно. Один і той же метод може давати не тільки рішення одного з вказаних завдань, але і двох або навіть всіх трьох. Для геометричного моделювання найбільший інтерес мають методи наближення поліномами і раціональними функціями,що забезпечує необхідну точність завдання проектованих об'єктів, що проеціюються.

Апроксимація обводів параметричними поліномами

Теорія наближення функцій поліномами була розроблена в працях І. Ньютона, П.Л. Чебишева, Д. Вейерштраса, С.Н. Бернштейна та ін.

У загальному випадку в завданнях геометричного моделювання складних об'єктів проектовані криві не можуть бути записані у вигляді рівняння $y = f(x)$ з використанням звичайних однозначних функцій. Криві інженерних об'єктів можуть мати вертикальні дотичні, що тісно пов'язано з багатозначністю функцій. Тому в автоматизованому проектуванні провідну роль грає параметричне представлення ділянок кривих. Параметризація здійснюється завданням декартових координат точки кривої як функцій деякого параметра

$$x = x(u), y = y(u), z = z(u), a \le u \le b. \quad (4)$$

Для завдання кривих використовують параметричне рівняння у векторній формі

$$r = r(u) = x(u)e_1 + y(u)e_2 + z(u)e_3, \quad (5)$$

де $r = \{x, y, z\}$ – радіус-вектор крапки на кривій, $e_1, e_2, e_3$ – орти координатних осей, $u$ – параметр крапки на кривій.

Як параметр $u$ вибирається змінна, щодо якої зручно буде задати шукані функції: довжину дуги, номер вузлових точок, полярний кут, параметр часу тощо.

Параметричний метод задання кривих має наступні переваги:

- простіше обчислення координат точок;
- спрощення розрахунків при перетвореннях кривих;
- спрощення розрахунків, пов'язаних з підготовкою інформації для верстатів з числовим програмним управлінням. У геометричному моделюванні велике теоретичне і прикладне значення має розробка методів і алгоритмів

проектування складних криволінійних обводів, що описуються параметричними поліномами. При цьому найчастіше використовується стандартна статечна форма (мономіальний базис) представлення таких поліномів:

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} a_i u^i, n \in N, a_i \in R. \quad (6)$$

У цій формі уявлення довільний поліном $n$-го ступеня може бути легко обчислений по схемі Горнера, яка реалізується за допомогою множень і складань, тобто арифметичних дій. Схема Горнера зручна для реалізації на комп'ютері завдяки циклічності обчислень і необхідності зберігати окрім коефіцієнтів полінома і значень аргументу тільки однієї проміжної величини. Поліном єдиним чином розкладається в твір з лінійних множників

$$p(u) = a_n(u - a_1)(u - a_2)...(u - a_n). \quad (7)$$

При розв'язанні прикладних задач, в основному, застосовують поліноми з коефіцієнтами , $a_i$ дійсними числами. Рішення $p(u) = 0$ речовинного полінома володіють наступними властивостями:

- рішення можуть повторюватися (наприклад, якщо $a_1 = a_2$);
- рішення можуть бути як речовинними, так і комплексними;
- комплексне коріння має зв'язані пари.

Як правило, з безлічі поліномів вибирають поліноми непарних ступенів. Це пояснюється наступним. Якщо поліном $p(u)$ має непарний ступінь, то він повинен мати, принаймні, один речовинний корінь. Це витікає безпосередньо з приведених вище властивостей, оскільки загальне число рішень непарного полінома - непарне число, а комплексного коріння (якщо вони існують) - парне число. Далі ми також розглядатимемо тільки речовинні поліноми.
Отже, розглянемо вектор-функцію у вигляді векторного полінома ступеня $n$:

$$M_n(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + ... + a_n u^n, \quad (8)$$
$$\forall u \in [a,b],$$

де $a_i, i = 0,1,...,n$ – довільні постійні вектори;

$[a,b]$ – інтервал зміни параметра $u$ кривої $a$.

Нехай в $n+1$ точках кривої $a$ послідовно задані значення радіус-вектора $P_i, i = 0,1...,n$.

Призначимо кожному значенню радіус-вектора $P_i$ значення параметра $u_i \in [a,b]$ згідно сітці

$$\Delta : a = u_0 < u_1 < ... < u_n = b. \quad (9)$$

Знайдемо значення довільних постійних векторів у виразі (7) з умов інтерполяції кривої $a$ поліномом (7):

$$M_n(u_i = P_i \equiv P(u_i), i = 0,1,...,n. \quad (10)$$

Підставляючи (7) в умови (9), одержимо систему векторних лінійних рівнянь алгебри для знаходження постійних векторів у виразі (7):

$$a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_i^2 + ... + a_n u_i^n = P_i, i = 0,1,...,n. \quad (11)$$

Цю систему рівнянь можна записати в компактній матричній формі:

$$\begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ - \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 u_0 u_0^2 ... u_0^n \\ 1 u_1 u_1^2 ... u_1^n \\ - - - ... - \\ 1 u_n u_n^2 ... u_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ - \\ a_n \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Система векторних лінійних рівнянь (10) алгебри еквівалентна трьом системам скалярних рівнянь алгебри щодо проекцій радіус-вектора $P(u)$ на базисні вектори $e_j, j = 1,2,3$ відповідно

$$a_0^j + a_1^j u_i + a_2^j u_i^2 + ... + a_n^j u_i^n = x_i^j, j = 1,2,3; i = 0,1,...,n, \quad (13)$$

де $x_i^j = x^j(u_i)$ – задані значення проекцій радіус-вектора в крапках $i = 0,1,...,n$;

$a_i^j$ – проекція постійного вектора $a_i$ на вісь $0x^j$ системи координат $0x^1x^2x^3$.

При цьому всі системи рівнянь (12) матимуть однакові матриці коефіцієнтів

$$U = \begin{bmatrix} 1 u_0 u_0^2 ... u_0^n \\ 1 u_1 u_1^2 ... u_1^n \\ - - - ... - \\ 1 u_n u_n^2 ... u_n^n \end{bmatrix}. \quad (14)$$

У зв'язку з цією особливістю при інтерполяції кривої параметричним поліномом досить вирішити одну систему лінійних рівнянь (12) алгебри з трьома правими частинами. При цьому кожна права частина системи відповідатиме j-ой проекції постійних радіус-вектора $a_i$ на осі координат $0x^1x^2x^3$.

Матриця (13) є матрицею Вандермонда, і її визначник відмінний від нуля

через вибір вузлів сітки згідно (8). Отже, система рівнянь (12) має єдине рішення. На практиці для інтерполяції значень функції в крапках іноді застосовують поліноми, запропоновані Лагранжем:

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i L_i^n(u), \forall u \in [a,b], \tag{15}$$

$$L_i^n(u) = \frac{(u-u_0)(u-u_1)...(u-u_{i-1})(u-u_{i+1})...(u-u_n)}{(u_i-u_0)(u_i-u_1)...(u_i-u_{i-1})(u_i-u_{i+1})...(u_i-u_n)},$$

де $i = 0,1,...,n; L_i^n(u)$ – базисні поліноми інтерполяції Лагранжа.

В цьому випадку для побудови полінома (14) не потрібно вирішувати систему лінійних рівнянь алгебри вигляду (10), поліном явно виражається через початкові величини: $P_i, u_i, i = 0,1,...,n$.

Якщо в крапках задані не тільки значення радіус-вектора $P_i$, але і похідні $P_i'$, то єдиним поліномом найменшого ступеня, що має саме ці значення функції і її похідних в усіх точках, є інтерполяційний поліном Эрміта:

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} P_i [1 - 2L_i'(u_i)(u-u_i)] L_i^2(u) + \sum_{i=0}^{n} P_i'(u-u_i) L_i^2(u) \tag{16}$$

$$\forall u \in [a,b].$$

Оскільки поліном $L_i(u)$ має ступінь $n$, то поліном Эрміта матиме ступінь $(2n+1)$. Для конструювання обводів частіше застосовують шматкові поліноми Эрміта, що визначають ділянки між кожною парою точок. Тоді у випадку $n = 3$ поліном інтерполює задані вузлові точки і задані в них дотичні вектори, а у випадку $n = 5$ – також вектори других похідних. Істотним недоліком такої інтерполяції є неможливість цілеспрямованої локальної модифікації обводу, оскільки ця процедура по суті є підгонкою кривої, і залежить від математичної підготовки або досвіду конструктора.

Слід зазначити, що застосування для інтерполяції поліномів високих ступенів в більшості випадків призводить до небажаних осциляцій кривих, особливо поблизу крайніх вузлів проміжку інтерполяції. Тому поліноми ступенів *n>5* рідко застосовуються при побудові чисельних алгоритмів, що використовують інтерполяцію.

**1.** Spencer M. Polynomial Real Root Finding in Bernstein Form: Ph.D. thesis, Dept. Civil Eng. / M. Spencer. – Brigham Young University, 1994. **2.** Алберг Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Алберг, Э. Нильсон, Дж. Уолш. – М. : Мир, 1972. – 318 с. **3.** Волков Е. А. Численные методы / Е. А. Волков. – М. : Наука, 1987. – 248 с.

Рецензент: д.т.н., доцент Науменко Ю. В. (НУВГП)