УДК 516:514.18

Крівцов В. В., к.т.н., доцент; Дєєв С. С., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ГРАФІЧНА ІЛЮСТРАЦІЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ ПЛОЩИНИ ЗА ДОПОМОГОЮ АПАРАТУ НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Наведено дослідження загального рівняння площини з використанням як методів аналітичної, так і нарисної геометрії в їх поєднанні.
Ключові слова: рівняння площини, сліди площини, епюр площини.

Приведены исследования общего уравнения плоскости с использованием как методов аналитической, так и начертательной геометрии в их соединении.
Ключевые слова: уравнение плоскости, следы плоскости, эпюры плоскости.

Researches over of general equalization of plane are brought with the use of both methods analytical and descriptive geometry in their connection.
Keywords: equation of the plane, the traces of the plane diagram plane.

Викладання нарисної геометрії має, в основному, описовий графічний характер, що сприяє розвитку у студентів просторової уяви, формує навики зображення просторових фігур на площині. Проте, враховуючи широке застосування ЕОМ для розв’язування графічних задач, де використовується параметричне задання геометричних фігур, а також потребу в їх поглибленому вивченні, доцільно відійти від вузького призначення нарисної геометрії, як теоретичної бази креслення. Тому при викладанні нарисної геометрії запропоновано поєднати описовий характер цієї дисципліни з точним математичним аналізом геометричних фігур, що розглядаються. Це дозволить студентам сприймати графічне розв’язування позиційних та метричних задач більш узагальнено та поглиблено. З іншого боку, графічна ілюстрація алгебраїчних рівнянь, що розглядаються в аналітичній геометрії, допомагає кращому розумінню математичної суті цих рівнянь. Поєднання методів аналітичної і нарисної геометрії під час розгляду геометричних фігур підвищить ефективність опанування студентами як нарисної, так і аналітичної геометрії.

В статті показано графічну ілюстрацію алгебраїчних рівнянь за допомогою методів нарисної геометрії.

З аналітичної геометрії відомо [1], що кожну площину в просторі можна задати лінійним рівнянням відносно координат:

$$Ax + By + Cy + D = 0. \qquad (1)$$

Рівняння (1) може бути приведено до нормального рівняння площини за допомогою нормуючого множника

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + \cos\gamma - p = 0, \qquad (2)$$

де α, β, γ – кути між прямою *n* і координатними осями x, y, z (рис. 1), p=OT – відстань від точки O початку координат до точки *T* перетину прямої n, що проведена з точки O перпендикулярно до площини ω.

Рівняння (2) виражає собою умову, при якій будь-яка точка M лежить в площині ω, якщо її координати x, y, z задовольняють нормальне рівняння площини (2).

Рівняння (1) може бути також приведене до рівняння площини в відрізках

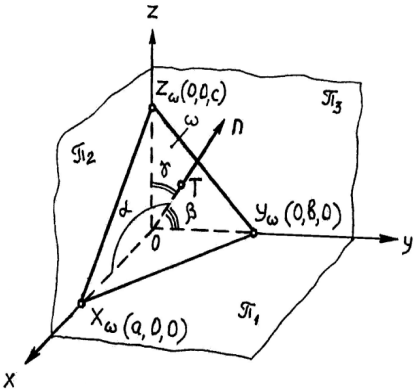

Рис. 1. Наочне зображення площини для ілюстрації нормального рівняння площини

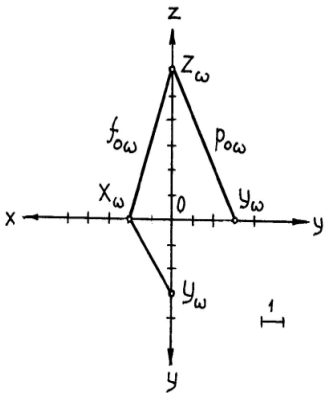

Рис. 1. Епюр ”гострокутної” площини ω загального положення

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (3)$$

де *a*, *b*, *c* – величини відрізків, які відсікає площина відповідно на осях *x*, *y*, *z*, тобто для площини *ω* маємо (рис. 1), що $X_\omega(a, 0, 0)$ – точка сходу горизонтального та фронтального слідів, $Y_\omega(0, b, 0)$ – точка сходу горизонтального та профільного слідів, $Z_\omega(0, 0, c)$ – точка сходу фронтального і профільного слідів площини *ω*.

Площина, що задана рівнянням $Ax + By + Cy + D = 0$, у якого всі коефіцієнти не дорівнюють 0, займає загальне положення відносно площини проекцій π_1, π_2, π_3, тобто не паралельна і не перпендикулярна до π_1, π_2, π_3. Епюри цієї площини легко будувати, звівши рівняння (1) до (3).

Приклад. Побудувати епюр та наочне зображення площини ω, яка задана рівнянням $3x + 2y + z - 6 = 0$

Розв’язування: Рівняння (1) зводимо до рівняння (3).

Маємо: $\dfrac{x}{-\dfrac{-6}{3}}+\dfrac{y}{-\dfrac{-6}{2}}+\dfrac{z}{-\dfrac{-6}{1}}=1$ тобто $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{x}{2}=1$ – отримаємо

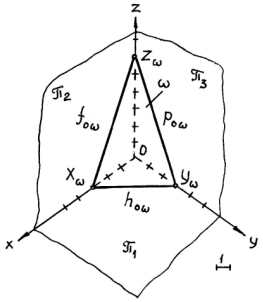

Рис. 3. Наочне зображення ”гострокутної” площини ω загального положення

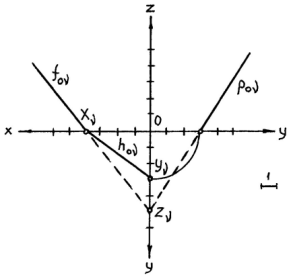

Рис. 4. Епюр ”тупокутної” площини ν загального положення

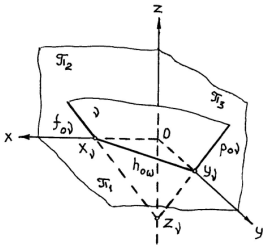

Рис. 5. Наочне зображення ”тупокутної” площини ν загального положення

рівняння площини ω у відрізках. На рис. 2 побудовано епюр площини ω, відклавши 2 одиниці довжини від початку координат в додатному напрямку осі x, 3 – в напрямку осі y, 6 – в напрямку осі z. На рис. 3 показано наочне зображення цієї площини ($h_{o\omega}$, $f_{o\omega}$, $p_{o\omega}$ – відповідно горизонтальний, фронтальний та профільний сліди площини ω). І, навпаки, знаючи епюр площини, що задана слідами, можна вивести її рівняння у відрізках, в першій степені та у вигляді нормального рівняння. На рис. 4 наведено епюр площини v, а на рис. 5 – наочне зображення цієї площини.

Вимірявши за рис. 5 відрізки OX_v, $OУ_v$ і OZ_v, маємо параметри $a = 4$, $в = 3$, $c = -5$. Тоді рівняння площини ν у відрізках буде мати вигляд $x/4+y/3-z/5=1$ або у вигляді лінійного рівняння $15x+20y-12z-60=0$.

Знайшовши множник $M=+\dfrac{1}{\sqrt{15^2+20^2+(-12)^2}}=\dfrac{1}{27.7}$, отримаємо нормальне рівняння площини v: $0.54x+0.72y-0.43z-2.2=0$,

де $\cos\alpha=0.54, \cos\beta=0.72, \cos\gamma=-0.43, p=2.2$.

У площини ω (рис. 2, 3) є видимою в межах 1 октанту одна і та сама сторона площини, якщо дивитися за способом прямокутного проеціювання спереду (спостерігач дивиться на π_2), і зверху (спостерігач дивиться на π_1). У площині v (рис. 4, 5) є видимими різні сторони, якщо дивитися на неї спереду і зверху. Площини, подібні до площини v, називаються «висхідними», а площини, подібні до площини v, – «низхідними». Важливо при розв’язуванні за-

дач з нарисної геометрії знати, яка зображена площина – «висхідна» чи «низхідна», що дозволяє визначити видимість точок відносно заданої площини. Приведемо значення параметрів *а*, *в* і *с*, при яких утворюється «висхідна» або «низхідна» площини (таблиця).

Площина, яка має три сліди в межах 1 октанта, може бути «висхідною» при *а*, *в*, *с* > 0 і «низхідною» при *а*, *в* > 0 і *с* < 0. Першу площину називають «гострокутною», а другу – «тупокутною», оскільки в «гострокутній» площині сліди утворюють між собою гострі кути (площина ω, рис. 2), а в «тупокутній» площині – тупі кути (площина *v*, рис. 5). На епюрі це виражається в тому, що суміжні кути між віссю *x* і слідами h_o і f_o для «гострокутної» площини гострі, а для «тупокутної» – один гострий, а другий тупий (рис. 3, 4).

Таблиця

Параметри *а*, *в*, *с*, при яких утворюється «висхідна» або «низхідна» площини

Параметри			Тип площини загального положення
а	*в*	*с*	
>0	>0	>0	Висхідна
>0	>0	<0	Низхідна
>0	<0	<0	Висхідна
>0	<0	>0	Низхідна
<0	>0	>0	Висхідна
<0	<0	>0	Низхідна
<0	<0	<0	Висхідна
<0	>0	<0	Низхідна

За рівними кутами нахилу даної площини до площин проекцій π_1 і π_2 сліди $h_{o\Omega}$ і $f_{o\Omega}$ площини утворюють з віссю x також рівні кути як в просторі, так і на епюрі, на якому вони зображуються збігаючими в одну пряму (рис. 6). Ця площина Ω загального положення має два параметри в і с рівними за величинами, але протилежними за знаком, тому слід $p_{o\Omega}$ завжди складає 450 з віссю у, оскільки точки сходу слідів в даному випадку збігаються в одній точці ($Y_\Omega \equiv Z_\Omega$).

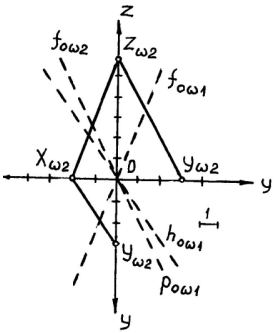

Рис. 6. Епюр площини $\boldsymbol{\Omega}$ із слідами, що збігаються

Таку площину називають площиною із слідами, що збігаються, або площиною, яка рівнонахилена до площин проекцій π_1 і π_2.

Дамо аналіз рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$, коли один або декілька коефіцієнтів дорівнюють 0.

1. При D = 0 рівняння (1) площини має вигляд $Ax + By + Cz + D = 0$ і визначає площину загального положення, що проходить через

початок координат. Побудова епюрів цієї площини викликає труднощі, оскільки площина не перетинає осей координат.

Розглянемо два запропонованих авторами способи побудови епюрів цієї площини.

1 спосіб полягає в тому, що будується епюр площини загального положення з D ≠ 0 і яка паралельна до площини з D = 0, а потім через початок координат проводять сліди площини з D = 0, паралельно до слідів площини з D ≠ 0 (рис. 7).

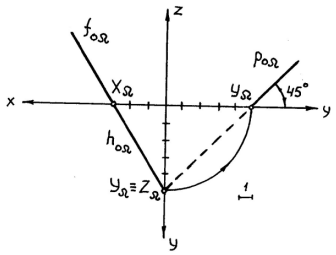

Рис. 7. Побудова за 1 способом епюра площини, що проходить через початок координат

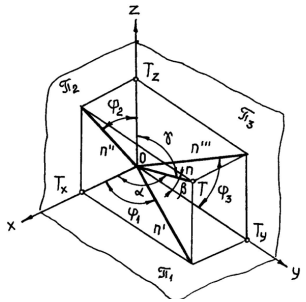

Рис. 8. Роз'яснення суті побудови за 2 способом площини, що проходить через початок координат

Приклад. Побудувати епюр площини $3x + 2y + z = 0$.

Розв'язування: Позначимо задану площину через ω_1. Вона проходить через початок координат і паралельна до будь-якої площини з коефіцієнтом D ≠ 0 і з A = 3, B = 2, C = 1, наприклад до площини, заданої рівнянням $3x + 2y + z - 6 = 0$. Позначимо останню площину через ω_2 і її рівняння в відрізках має вигляд: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$. Будуємо епюр площини ω_2, а потім проводимо через початок координат сліди площини ω_1 паралельно до однойменних слідів площини ω_2: $h_{o\omega 1} \parallel h_{o\omega 2}$, $f_{o\omega 1} \parallel f_{o\omega 2}$, $po_{\omega 1} \parallel po_{\omega 2}$.

За 2 способом спочатку будують проекції прямої *n*, що перпендикулярна до заданої площини (рис. 1), а потім проводять сліди площини, перпендикулярно до однойменної проекції перпендикуляра.

Для того, щоб побудувати проекції перпендикуляра, треба визначити кути нахилу φ_1, φ_2, φ_3 проекцій перпендикуляра до осей *x*, *y*, *z* залежно від кутів α, β, γ, які утворює пряма *n* з відповідними координатними осями *x*, *y*, *z*.

Розглянемо рис. 8. Пряма *n* – діагональ прямокутного паралелепіпеда; *n'*, *n''*, *n'''* – відповідно горизонтальна, фронтальна та профільна проекції прямої *n* на площини проекцій π_1, π_2, π_3; OT – це відстань від точки O до площини ω як це показано на рис. 1. Тоді *n'*, *n''*, *n'''* – це проекції відрізка OT на π_1, π_2, π_3.

Позначимо кут нахилу n' до осі x через φ_1: $\varphi_1 = (n',\hat{}x)$; n'' до осі z через φ_2: $\varphi_2 = (n'',\hat{}z)$; n''' до осі y через φ_3: $\varphi_3 = (n'',\hat{}y)$.

Знайдемо залежність, яка зв'язує φ_1 з кутами нахилу n до осей координат: $\frac{OT}{n'} = \cos\varphi_{1,}$ $\frac{OT}{n} = \cos\alpha$.

Звідси маємо:

$$OTx = n' \cdot \cos\varphi_1, \tag{4}$$

$$OTx = n \cdot \cos\alpha, \tag{5}$$

де $\frac{n'}{n} = \cos\left(90^0 - \gamma\right) = \sin\gamma$, *тобто* $n' = n \cdot \sin\gamma$.

Тоді рівняння (4) має вигляд:

$$OT_x = n \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi_1. \tag{6}$$

Прирівнюючи (5) і (6), маємо: $n \cdot \cos\alpha = n \cdot \sin\gamma \cdot \cos\varphi_1$.

Звідки

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}. \tag{7}$$

Аналогічно

$$\cos\varphi_2 = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}, \tag{8}$$

$$\cos\gamma_3 = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}. \tag{9}$$

З рівнянь (7) - (9) можна визначити кути φ_1, φ_2, φ_3 нахилу проекцій перпендикуляра n до заданої площини за відомими значеннями кутів α, β і γ.

Розглянемо приклад. Побудувати епюр площини ω, що заданий рівнянням $x - 2y + 2z = 0$.

Розв'язування: Зводимо задане рівняння площини до нормального рівняння. Нормуючий множник $M = \pm\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \pm\frac{1}{3}$. Тоді нормальне рівняння площини ω: $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0$ або, $-\frac{1}{3} + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0$ тобто $\cos\alpha = \pm\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \pm\frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \pm\frac{2}{3}$. Для $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ маємо α = 289,5° і α = 70.5°; для $\cos\beta = -\frac{2}{3}$ маємо β = 132° і β = 228°; для $\cos\gamma = \frac{2}{3}$ маємо γ = 48° і γ = 312°. Оскільки кут нахилу перпендикуляра n з координатними осями x, y, z не може бути більшим 180°, отримуємо, що α = 70,5°, β = 132° і

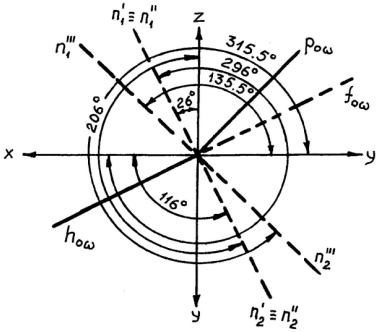

Рис. 9. Побудова за 2 способом епюра площини, що проходить через початок координат

γ = 48°, тобто перший перпендикуляр до заданої площини *ω*, проведений з точки О, проходить в 2 октанті. Другий перпендикуляр, проведений з точки О, до заданої площини *ω* буде мати такі кути нахилу до координатних осей: α = 109.5°, β = 48° і γ = 132° і буде проходити в 8 октанті. Звичайно, обидва перпендикуляри до площини *ω* лежать на одній прямій.

Тепер визначаємо кути нахилу до осей *x*, *y*, *z* проекцій перпендикуляра, що проходить в 2 октанті:

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos 70.5^0}{\sin 48^0} = 0.44, \quad \textit{має мо} \quad \varphi_1 = 296^0$$

(а не φ_1 = 64°, оскільки перпендикуляр до площини проходить не в першому октанті, а в другому);

$$\cos\varphi_2 = \frac{\cos 48^0}{\sin 132^0} = 0.9, \quad \textit{має мо} \quad \varphi_2 = 26^0;$$

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos 132^0}{\sin 70.5^0} = -0.71, \quad \textit{має мо} \quad \varphi_3 = 135.5^0.$$

Визначаємо кути φ_1, φ_2, φ_3 для проекцій другого перпендикуляра до площини, що проходить в 8 октанті:

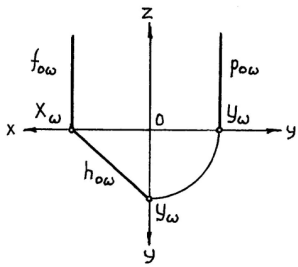

Рис. 10. Епюр горизонтально-проеціюючої площини ω, що зображена 3 слідами

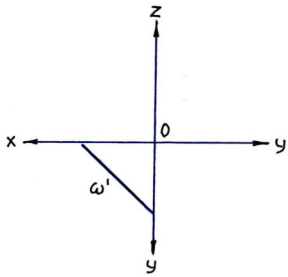

Рис. 11. Епюр горизонтально-проеціюючої площини ω, що зображена слідом-проекцією

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos 109.5^0}{\sin 132^0} = -0.44, \quad має мо \quad \varphi_1 = 116^0;$$

$$cos\varphi_2 = \frac{\cos 132^0}{\sin 48^0} = -0.9, \quad має мо \quad \varphi_2 = 206^0;$$

$$cos\varphi_3 = \frac{\cos 48^0}{\sin 109.5^0} = 0.71, \quad має мо \quad \varphi_3 = 315.5^0.$$

Кути φ_1, φ_2, φ_3 для проекцій другого перпендикуляра можна і не визначати за формулами (7)-(9), оскільки проекції обох перпендикулярів лежать на одній прямій.

Знаючи φ_1, φ_2, φ_3 для першого перпендикуляра n_1 до площини ω, будуємо його проекції n_1', n_1'', n_1''', враховуючи, що n_1 знаходиться в 2 октанті (рис. 9). На рис. 9 побудовано також проекції другого перпендикуляра n_2, хоча для побудови слідів площини ω будувати проекції другого перпендикуляра до площини не обов'язково. Потім проводимо сліди площини ω перпендикулярно до однойменних проекцій перпендикуляра, враховуючи видимість слідів (проекції перпендикулярів n_1 і n_2, які знаходяться в 2 і 8 октантах є невидимими).

2. Розглянемо площини часткового положення, які перпендикулярні або паралельні хоча би до однієї з площин проекцій. Проеціюючим площинам, які перпендикулярні до площин проекцій, відповідає рівняння (1) при $A = 0 (B = 0, C = 0)$.

При C = 0 рівняння площини має вигляд $Ax + By + D = 0$ і визначає горизонтально – проеціюючу площину ω, перпендикулярну до π_1. Розглядаючи це рівняння на площині xOy, тобто на π_1, будемо мати пряму лінію (рис. 10, 11). Розглядаючи рівняння $Ax + By + D = 0$ в просторі, будемо мати геометричне місце точок, які проектуються на π_1 в точки вказаної прямої, тобто рівняння $Ax + By + D = 0$ – це рівняння сліду-проекції горизонтально-проеціюючої площини; горизонтальні проекції точок, прямих та плоских фігур, що лежать в горизонтально-проеціюючій площині будуть знаходитися саме на сліді-проекції ω' площини ω.

Приклад. За епюром горизонтально-проеціюючої площини τ скласти відомі рівняння площини (рис. 12).

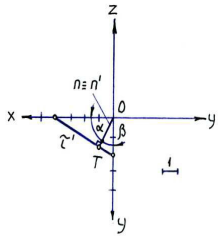

Рис. 12. Приклад на складання рівняння площини за її епюром

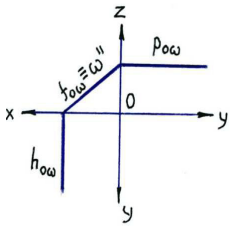

Рис. 13. Епюр фронтально-проеціюючої площини ω

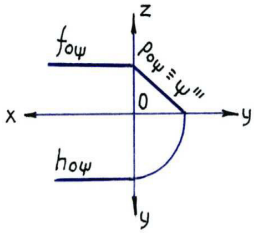

Рис. 12. Епюр профільно-проеціюючої площини φ

Розв'язування: За епюром площини τ складаємо рівняння площини у відрізках: $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$, звідки рівняння першого степеня: $x+2y=4$, а нормальне рівняння площини τ: $0.45x+0.9y-1.8=0$ (нормуючий множник $M=+\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0.45$).

Тобто відстань від початку координат до площини τ дорівнює 1,8 од. довжини (p = 1,8); $cos\alpha$ = 0,45, звідки $\alpha \approx 63°$ і $cos\beta$ = 0.9, звідки β = 27°. На епюрі ці величини можна знайти геометричним вимірюванням.

Рівняння горизонтально-проеціюючої площини $Ax+By+D=0$ визначає площину паралельну осі z.

3. При B = 0, рівняння площини має вигляд $Ax+By+D=0$ і визначає фронтально-проеціюючу площину ω, перпендикулярну до площини Oxz, тобто до π_2, і паралельну осі y (рис. 13).

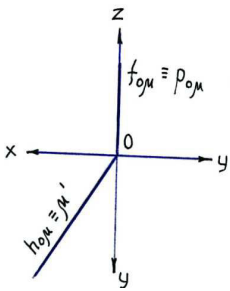

Рис. 13. Епюр горизонтально-проеціюючої площини μ, що проходить через вісь z

4. При A = 0, рівняння площини має вигляд $By+Cz+D=0$ і визначає профільно-проеціюючу площину ψ, перпендикулярну до площини Oyz, тобто до π_3, і паралельну осі x (рис. 14).

5. При C = D = 0, рівняння площини має вигляд $Ax+By=0$ і визначає горизонтально-проеціюючу площину μ, що проходить через вісь z (рис. 15).

6. При B= D = 0 рівняння площини має вигляд $Ax+Cz=0$ і визначає фронтально-проеціюючу площину ρ, що проходить через вісь y (рис. 16).

7. При A = D = 0 рівняння площини має вигляд

$By + Cz = 0$, визначає профільно-проеціюючу площину η, що проходить через вісь *x* (рис. 17).

8. Площинам рівня, які паралельні до площин проекцій, відповідає рівняння (1) при A = B = 0 (A = C = 0, B = C = 0).

При A = B = 0 рівняння площини має вигляд $Cz = D = 0$, визначає горизонтальну площину рівня ω, яка паралельна до осей *x* і *y*, тобто паралельна до π_1 (рис. 18).

Представимо рівняння $Cz = D = 0$ у вигляді $z = -D/C$. Згідно з цим рівнянням всі точки площини мають однакові координати ($z = -D/C$) і, отже, розміщені на одній відстані від площини π_1, тобто $f_{o\omega}$ *і* $p_{o\omega}$ є слідпроекціями площини ω.

Звідси видно, що – D/C є величина відрізка, який відсікає площина ω на осі *z*, рахуючи від початку координат, тобто рівняння C*z* = 0 або *z* = 0 визначає площину проекцій π_1.

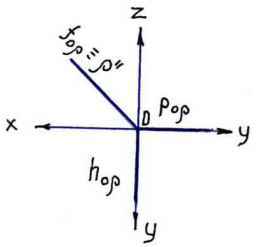

Рис. 16. Епюр фронтально-проеціюючої площин P, що проходить через вісь *y*

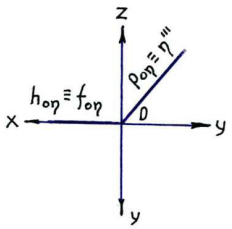

Рис. 17. Епюр прфільно-проеціюючої площини η, що проходить через вісь *x*

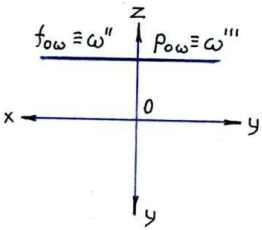

Рис. 18. Епюр горизонтальної площини рівня ω

Знаючи, що горизонтальна площина проекцій π_1 визначається рівнянням *z* = 0, легко алгебраїчним способом визначити координати слідів прямих на π_1, що є важливою задачею в нарисній геометрії.

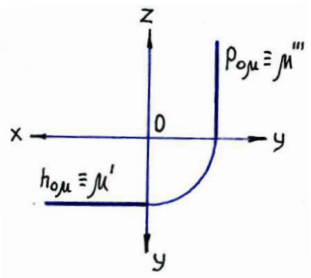

Рис. 19. Епюр фронтальної площини рівня μ

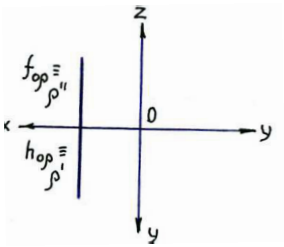

Рис. 20. Епюр профільної площини рівня ρ

9. При A=C=0 рівняння площини має вигляд $By + D = 0$, визначає фронтальну площину рівня μ, яка паралельна до осей *x* і *z*, тобто паралельна до π_3 (рис. 19). Рівняння $By = 0$ або $y = 0$ визначає фронтальну площину проекцій π_2.

10. При B = C = 0 рівняння площини має вигляд $Ax + D = 0$, визначає профільну площину рівня ρ, яка паралельна до осей *y* і *z*, тобто паралельна до π_3 (рис. 20).

Рівняння $Ax = 0$ або $x = 0$ визначає профільну площину проекцій π_3.

Приведений аналіз загального рівняння площини з використанням апарату нарисної та аналітичної геометрії дозволяє студентам ґрунтовніше засвоїти класифікацію площин в просторі, застосовуючи для їх вивчення алгебраїчний аналіз, розв'язувати задачі нарисної геометрії за допомогою ЕОМ, поєднати описовий характер вивчення нарисної геометрії з чітким математичним аналізом геометричних фігур, що розглядаються.

1. Привалов И. И. Аналитическая геометрия / И. И. Привалов. – М. : ГИИТЛ, 1955. – 299 с.

Рецензент: д.т.н., доцент Науменко Ю. В. (НУВГП)