Національний університет
водного господарства

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра прикладної математики

100-102

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт та самостійної роботи з дисципліни *«ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ »*

для студентів напряму підготовки 6.040301

«Прикладна математика»

денної форми навчання

Частина 3

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Рекомендовано методичною комісією
напряму підготовки
«Прикладна математика»
*Протокол **№5** від 6 березня 2012 р.*

Рівне -2012

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Методичні вказівки до виконання практичних робіт та самостійної роботи з дисципліни «Функціональний аналіз» для студентів напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика» денної форми навчання. Частина 3/ Гладун Л.В. – Рівне: НУВГП, 2012. - 28 с.

Упорядник: Л.В. Гладун, к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики

Відповідальний за випуск: А.П. Власюк, д. т. н., професор, завідувач кафедри прикладної математики

© Гладун Л.В., 2012
© НУВГП, 2012

Національний університет
водного господарства
та природокористування

ЗМІСТ

Вступ **3**

1. Практична робота 1. Лінійні неперервні оператори **4**
2. Практична робота 2. Обернені оператори **19**
3. Література **28**

Вступ

Функціональний аналіз відіграє важливу роль у сучасній математичній освіті фахівця з прикладної математики, якому потрібно використовувати математичні методи при розв'язанні конкретних задач.

Методичні вказівки розроблені для студентів напряму підготовки "Прикладна математика" . Вони також можуть використовуватись для студентів технічних вузів, а також для студентів фізико-математичних напрямів педагогічних вузів.

Перша практична робота, крім понять лінійного, неперервного, обмеженого оператора на нормованому просторі, містить методи знаходження норми лінійного неперервного оператора.

В другій практичній роботі розглянуті оборотні і неперервно оборотні лінійні оператори, а також обернені оператори. Показано використання обернених операторів при розв'язанні інтегральних та диференціальних рівнянь

До кожної практичної роботи надається необхідний теоретичний матеріал. Також наведено приклади розв'язання найбільш типових задач.

У кінці кожної практичної роботи подано завдання для самостійної роботи, які містять значну кількість задач. Вони можуть використовуватися для проведення тестового опитування з відповідних тем.

Задачі, номери яких більші за тридцять, можна віднести до задач підвищеної складності.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практична робота 1. Лінійні неперервні оператори

Нехай X, Y - лінійні нормовані простори. Відображення $A: X \to Y$ називається оператором. Оператор A називається лінійним, якщо для будь-яких чисел $\lambda, \mu \in R$ і будь-яких елементів $x, y \in X$ виконується рівність $A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay$.

Оператор A називається неперервним в точці $x_0 \in X$, якщо $Ax_n \to Ax_0$ при $x_n \to x_0$.

Теорема. Якщо лінійний оператор $A: X \to Y$ неперервний в точці $0 \in X$, тоді він неперервний в будь-якій точці $x_0 \in X$.

Лінійний оператор $A: X \to Y$ називається неперервним, якщо він неперервний в точці $0 \in X$.

Лінійний оператор $A: X \to Y$ називається обмеженим, якщо $\exists M > 0$, що для будь-якого елемента $x \in X$ виконується нерівність $\|Ax\|_Y \le M \|x\|_X$.

Теорема. Лінійний оператор $A: X \to Y$ неперервний тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Нормою лінійного обмеженого оператора $A: X \to Y$ називається число

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y . \qquad (1)$$

Приклад 1. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A: l_1 \to l_1$, $Ax = (\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{2^2} x_2, \frac{1}{2^3} x_3, ...)$ і знайти його норму.

Розв'язування. Для будь-яких дійсних чисел λ, μ і будь-яких послідовностей $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n, ...) \in l_1$ маємо :

$$A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda(x_1, x_2, ..., x_n, ...) + \mu(y_1, y_2, ..., y_n, ...)) =$$
$$= A(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ..., \lambda x_n + \mu y_n, ...) =$$
$$= (\frac{1}{2}(\lambda x_1 + \mu y_1), \frac{1}{2^2}(\lambda x_2 + \mu y_2), ..., \frac{1}{2^n}(\lambda x_n + \mu y_n), ...) =$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= (\frac{1}{2}\lambda x_1, \frac{1}{2^2}\lambda x_2, ..., \frac{1}{2^n}\lambda x_n, ...) +$$

$$+ (\frac{1}{2}\mu y_1, \frac{1}{2^2}\mu y_2, ..., \frac{1}{2^n}\mu y_n, ...) = \lambda Ax + \mu Ay \ .$$

Значить, оператор A є лінійним.

Перевіримо обмеженість оператора. Нехай x – довільний елемент простору l_1. Тоді маємо:

$$\|Ax\| = \left\| (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_2, ..., \frac{1}{2^n}x_n, ...) \right\| =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}|x_i| \le \sup_{1 \le i \le \infty} \frac{1}{2^i} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \frac{1}{2}\|x\| \ .$$

Звідки випливає обмеженість оператора і оцінка норми $\|A\| \le \frac{1}{2}$.

Припустимо, що існує елемент $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}, ...) \in l_1$, $\|x^{(0)}\| = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(0)}| = 1$, для якого $\|Ax^{(0)}\| = \frac{1}{2}$. Тоді $\|Ax^{(0)}\| =$ $= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} |x_i^{(0)}| = \frac{1}{2}$. Рівність виконується при $|x_1^{(0)}| = 1$ і $x_i^{(0)} = 0$ для всіх $i \ge 2$. Візьмемо елемент $x^{(0)} = (1,0,0,...,0,...)$. Він належить простору l_1, має одиничну норму і $\|Ax^{(0)}\| = \frac{1}{2}$. Отже, норма оператора A дорівнює $\frac{1}{2}$.

Приклад 2. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A : c_0 \to c$, $Ax = (x_1, \frac{4}{3}x_2, \frac{6}{4}x_3, \frac{8}{5}x_4, ...)$ і знайти його норму.

Розв'язування. Для довільних дійсних чисел λ, μ і довільних послідовностей x, $y \in c_0$ отримаємо:

Національний університет водного господарства та природокористування

$$A(\lambda x+\mu y)=A(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,...,\lambda x_n+\mu y_n,...)=$$

$$=(\lambda x_1+\mu y_1,\frac{4}{3}(\lambda x_2+\mu y_2),...,\frac{2n}{n+1}(\lambda x_n+\mu y_n),...)=$$

$$=(\lambda x_1,\frac{4}{3}\lambda x_2,...,\frac{2n}{n+1}\lambda x_n,...)+(\mu y_1,\frac{4}{3}\mu y_2,...,\frac{2n}{n+1}\mu y_n,...)=$$

$$=\lambda Ax+\mu Ay\ .$$

Отже, оператор A є лінійним.

Нехай x – будь-який елемент простору c_0. Тоді маємо :

$$\|Ax\|_c=\left\|(x_1,\frac{4}{3}x_2,...,\frac{2n}{n+1}x_n,...)\right\|_c=\sup\{|x_1|,\left|\frac{4}{3}x_2\right|,...,\left|\frac{2n}{n+1}x_n\right|,...\}\le$$

$$\le\sup\{1,\frac{4}{3},...,\frac{2n}{n+1},...\}\sup\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|,...\}=2\|x\|_{c_0}\ ,$$

тобто $\|Ax\|_c\le 2\|x\|_{c_0}$. Значить, оператор A є обмеженим і $\|A\|\le 2$.

Припустимо, що існує елемент $x^{(0)}\in c_0$, $\left\|x^{(0)}\right\|_{c_0}=1$, такий, для якого $\left\|Ax^{(0)}\right\|_c=2$. Згідно задання норми в просторі c, це означає, що виконується рівність $\sup\{\left|x_1^{(0)}\right|,\left|\frac{4}{3}x_2^{(0)}\right|,...,\left|\frac{2n}{n+1}x_n^{(0)}\right|,...\}=2$. Оскільки для будь-якого $n\in N$ справедливі нерівності $\left|x_n^{(0)}\right|\le 1$, $\left|\frac{2n}{n+1}\right|<2$ і , крім того, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{(0)}=0$, то рівність не може виконуватись ні для якого елемента $x^{(0)}\in c_0$ з одиничною нормою. Отримали протиріччя.

Розглянемо послідовність елементів $x^{(1)}=(1,0,0,...)$, $x^{(2)}=(0,1,0,...)$, ..., $x^{(n)}=(\underbrace{0,0,0,...,1}_{n},0,...)$,... із простору c_0. Норма кожного елемента послідовності дорівнює одиниці. Знайдемо норми елементів $Ax^{(1)},Ax^{(2)},...,Ax^{(n)},...$ у просторі c . Отримаємо :

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\left\|Ax^{(1)}\right\|_c = \sup\{1,0,0,...\} = 1,\ \left\|Ax^{(2)}\right\|_c = \sup\{0,\frac{4}{3},0,...\} = \frac{4}{3},\ ...,$$

$$\left\|Ax^{(n)}\right\|_c = \sup\{0,0,0,...,\frac{2n}{n+1},0,...\} = \frac{2n}{n+1},... \quad .$$

Звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|Ax^{(n)}\right\|_c = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1} = 2,$ тобто норма оператора A не може бути меншою за число 2. Оскільки раніше отримали оцінку $\|A\| \le 2$, тому $\|A\| = 2$.

Приклад 3. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A: l_2 \to c_0,\ Ax = (\frac{1}{3}x_1, \frac{3}{6}x_2, \frac{5}{9}x_3, ...)$ і знайти його норму.

Розв'язування. Перевіримо лінійність оператора :

$$A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, ..., \lambda x_n + \mu y_n, ...) =$$

$$= (\frac{1}{3}(\lambda x_1 + \mu y_1), \frac{3}{6}(\lambda x_2 + \mu y_2), ..., \frac{2n-1}{3n}(\lambda x_n + \mu y_n), ...) =$$

$$= (\frac{1}{3}\lambda x_1, \frac{3}{6}\lambda x_2, ..., \frac{2n-1}{3n}\lambda x_n, ...) +$$

$$+ (\frac{1}{3}\mu y_1, \frac{3}{6}\mu y_2, ..., \frac{2n-1}{3n}\mu y_n, ...) = \lambda \mathrm{A}x + \mu \mathrm{A}y\ .$$

Значить, оператор A є лінійним. Для будь-якого елемента $x \in l_2$ маємо :

$$\|Ax\|_{c_0} = \left\|(\frac{1}{3}x_1, \frac{3}{6}x_2, ..., \frac{2n-1}{3n}x_n, ...)\right\|_{c_0} =$$

$$= \sup\{\left|\frac{1}{3}x_1\right|, \left|\frac{3}{6}x_2\right|, ..., \left|\frac{2n-1}{3n}x_n\right|, ...\} \le$$

$$\le \sup\{\frac{1}{3}, \frac{3}{6}, ..., \frac{2n-1}{3n}, ...\} \sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, ...\} =$$

$$= \frac{2}{3}\sup\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|, ...\} \le \frac{2}{3}(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\|x\|_{l_2}.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Звідки випливає обмеженість оператора A і оцінка $\|A\| \le \frac{2}{3}$.

Нехай для деякого елемента $x^{(0)} \in l_2$, норма якого рівна одиниці, виконується рівність $\left\|Ax^{(0)}\right\|_{c_0} = \frac{2}{3}$, тобто $\sup\{\left|\frac{1}{3}x_1^{(0)}\right|, \left|\frac{3}{6}x_2^{(0)}\right|, ..., \left|\frac{2n-1}{3n}x_n^{(0)}\right|, ...\} = \frac{2}{3}$. Оскільки $\left\|x^{(0)}\right\|_{l_2} = 1$, то $\left|x_i^{(0)}\right| \le 1$ для всіх $i \ge 1$. Так як $\frac{2n-1}{3n} < 1$ для будь-якого $n \ge 1$, тоді послідовність чисел $\{x_n^{(0)}\}$ повинна містити підпослідовність $\{x_{n_k}^{(0)}\}$ таку, що $\lim\limits_{n_k \to \infty}\left|x_{n_k}^{(0)}\right| = 1$. Але $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(0)} = 0$. Отримали протиріччя.

Розглянемо послідовність елементів $x^{(1)} = (1,0,0,...)$, $x^{(2)} = (0,1,0,...), ...$, $x^{(n)} = (0,0,0,...,1,0,...), ...$ простору l_2 з одиничними нормами. Знаходимо :

$$\left\|Ax^{(1)}\right\|_{c_0} = \sup\{\frac{1}{3},0,0,...,0,...\} = \frac{1}{3}, \left\|Ax^{(2)}\right\|_{c_0} = \sup\{0,\frac{3}{6},0,..,0,...\} =$$

$$= \frac{3}{6}, ..., \left\|Ax^{(n)}\right\|_{c_0} = \sup\{0,0,0,..., \frac{2n-1}{3n}, 0, ...\} = \frac{2n-1}{3n}, ... \quad .$$

Звідки отримаємо , що $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|Ax^{(n)}\right\|_{c_0} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n} = \frac{2}{3}$, тому норма оператора A не менша за $\frac{2}{3}$. Отже, $\|A\| = \frac{2}{3}$.

Приклад 4. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A : l_1 \to l_2$, $Ax = (\frac{1}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2, \frac{3}{4}x_3, ...)$ і знайти його норму.

Розв'язування. Перевіримо лінійність оператора. Для довільних чисел $\lambda, \mu \in R$ і довільних елементів x, y $\in l_1$ отримаємо :

Національний університет водного господарства та природокористування

$$A(\lambda x+\mu y)=A(\lambda x_1+\mu y_1,\lambda x_2+\mu y_2,...,\lambda x_n+\mu y_n,...)=$$

$$=(\frac{1}{2}(\lambda x_1+\mu y_1),\frac{2}{3}(\lambda x_2+\mu y_2),...,\frac{n}{n+1}(\lambda x_n+\mu y_n),...)=$$

$$=(\frac{1}{2}\lambda x_1,\frac{2}{3}\lambda x_2,...,\frac{n}{n+1}\lambda x_n,...)+$$

$$+(\frac{1}{2}\mu y_1,\frac{2}{3}\mu y_2,...,\frac{n}{n+1}\mu y_n,...)=\lambda Ax+\mu Ay\ .$$

Тобто оператор A лінійний.

Візьмемо будь-який елемент $x\in l_1$ і оцінимо норму елемента Ax в просторі l_2. Маємо :

$$\|Ax\|_{l_2}=\left\|(\frac{1}{2}x_1,\frac{2}{3}x_2,...,\frac{n}{n+1}x_n,...)\right\|_{l_2}=(\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{i}{i+1}x_i)^2)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le(\sup_{1\le i\le\infty}(\frac{i}{i+1})^2\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2)^{\frac{1}{2}}=(\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2)^{\frac{1}{2}}\le[(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|)^2]^{\frac{1}{2}}=\|x\|_{l_1}\ .$$

Звідки випливає, що оператор A є обмеженим і $\|A\|\le 1$.

Нехай існує елемент $x^{(0)}$ є l_1 такий, що $\|x^{(0)}\|_{l_1}=1$ і $\|Ax^{(0)}\|_{l_2}=1$. Тоді має місце рівність $\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{i}{i+1}x_i^{(0)})^2=1$. Згідно припущення $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(0)}|=1$. Оскільки для кожного $i\ge 1$ дріб $\frac{i}{i+1}$ менший за одиницю і $|x_i^{(0)}|\le 1$, то отримаємо :

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{i}{i+1}x_i^{(0)})^2<\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^{(0)})^2\le\sum_{i=1}^{\infty}|x_i^{(0)}|=1,$$

тобто протиріччя.

Для послідовності елементів $x^{(1)}=(1,0,0,...)$, $x^{(2)}=(0,1,0,...),...,\ x^{(n)}=(0,0,0,...,1,0,...),...$ простору l_1 з одиничними нормами маємо :

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\left\|Ax^{(1)}\right\|_{l_2} = \left\|(\frac{1}{2},0,0,...)\right\|_{l_2} = \frac{1}{2},\ \left\|Ax^{(2)}\right\|_{l_2} = \left\|(0,\frac{2}{3},0,...)\right\|_{l_2} = \frac{2}{3},...,$$

$$\left\|Ax^{(n)}\right\|_{l_2} = \left\|(0,0,0,...,\frac{n}{n+1},0,...)\right\|_{l_2} = \frac{n}{n+1},... \ .$$

Звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|Ax^{(n)}\right\|_{l_2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$. Значить, норма оператора A не може бути меншою за одиницю. Раніше отримали оцінку $\|A\| \le 1$, тому $\|A\| = 1$.

Приклад 5. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = (2x(1) - 3x(0))t^3$ і знайти його норму.

Розв'язування. Для будь-яких дійсних чисел λ, μ і довільних неперервних на відрізку [0,1] функцій $x(t), y(t)$ маємо :

$$(A(\lambda x + \mu y))(t) = (2(\lambda x(1) + \mu y(1)) - 3(\lambda x(0) + \mu y(0)))t^3 =$$

$$= (2\lambda x(1) - 3\lambda x(0))t^3 + (2\mu y(1) - 3\mu y(0))t^3 =$$

$$= \lambda(2x(1) - 3x(0))t^3 + \mu(2y(1) - 3y(0))t^3 = \lambda(Ax)(t) + \mu(Ay)(t).$$

Значить, оператор A є лінійним.

Для будь-якої функції $x \in C[0,1]$ отримаємо :

$$\|Ax\| = \left\|(2x(1) - 3x(0))t^3\right\| = \max_{0\le t\le 1}\left|(2x(1) - 3x(0))t^3\right| =$$

$$= \left|2x(1) - 3x(0)\right| \max_{0\le t\le 1}\left|t^3\right| \le 2|x(1)| + 3|x(0)| \le 5\|x\| \ .$$

Отже, оператор A обмежений і маємо оцінку $\|A\| \le 5$.

Нехай існує функція $x_0 \in C[0,1]$ така, що $\|x_0\| = 1$ і $\|Ax_0\| = 5$. Тоді справедлива рівність $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|(2x_0(1) - 3x_0(0))t^3\right| = 5$. Оскільки найбільше значення функції t^3 на відрізку [0,1] дорівнює 1, тому $\left|2x_0(1) - 3x_0(0)\right| = 5$. Звідси випливає, що значення функції x_0 в точках $t = 1, t = 0$ повинні бути по модулю рівні 1 і відрізнятися лише знаком. Розглянемо функцію $x_0(t) = 2t - 1, \ \forall t \in [0,1]$. Вона

Національний університет водного господарства та природокористування

неперервна на відрізку $[0,1]$, її норма $\|x_0\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|2t-1| = 1$ і $\|Ax_0\| = \|5t^3\| = 5$. Звідси випливає, з врахуванням раніше отриманої оцінки $\|A\| \le 5$, що $\|A\| = 5$.

Приклад 6. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = (t-2)x(t)$ і знайти його норму.

Розв'язування. Перевіримо лінійність оператора.

$$(A(\lambda x + \mu y))(t) = (t-2)(\lambda x(t) + \mu y(t)) =$$

$$= \lambda(t-2)x(t) + \mu(t-2)y(t) = \lambda(Ax)(t) + \mu(Ay)(t),$$

тобто оператор A лінійний.

Перевіримо обмеженість оператора. Нехай x - довільна функція з простору $C[0,1]$, тоді отримаємо :

$$\|Ax\| = \|(t-2)x(t)\| = \max_{0\le t\le 1}|(t-2)x(t)| \le$$

$$\le \max_{0\le t\le 1}|t-2| \max_{0\le t\le 1}|x(t)| = 2\|x\|.$$

Звідки випливає обмеженість оператора і оцінка норми $\|A\| \le 2$.

Припустимо, що існує функція $x_0 \in C[0,1]$ з одиничною нормою така, для якої $\|Ax_0\| = 2$, тобто $\max\limits_{0\le t\le 1}|(t-2)x_0(t)| = 2$. Ця рівність справджується, якщо модуль значення $x_0(0)$ дорівнює 1. Розглянемо функцію $x_0(t) = 1, \forall t \in [0,1]$. Ця функція належить простору $C[0,1]$, норма її рівна 1 і $\|Ax_0\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|t-2| = 2$. Отже, норма оператора A дорівнює 2.

Приклад 7. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int\limits_0^1 3^{r-2t}x(r)dr$, і знайти його норму.

Розв'язування. Перевіримо лінійність оператора.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$(A(\lambda x+\mu y))(t)=\int_0^1 3^{r-2t}(\lambda x(r)+\mu y(r))dr=\int_0^1 3^{r-2t}\lambda x(r)dr+$$

$$+\int_0^1 3^{r-2t}\mu y(r)dr=\lambda(Ax)(t)+\mu(Ay)(t).$$

Отже, оператор A лінійний.

Для довільної функції $x\in C[0,1]$ маємо:

$$\|Ax\|=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 3^{r-2t}x(r)dr\right|=\max_{0\le t\le 1}\left|3^{-2t}\int_0^1 3^{r}x(r)dr\right|=$$

$$=\max_{0\le t\le 1}\left|3^{-2t}\right|\cdot\left|\int_0^1 3^{r}x(r)dr\right|\le\int_0^1\left|3^{r}x(r)\right|dr\le$$

$$\le\max_{0\le r\le 1}|x(r)|\int_0^1 3^{r}dr=\frac{3^r}{\ln 3}\Big|_0^1\|x\|=\frac{2}{\ln 3}\|x\|.$$

Тому оператор A є обмеженим і $\|A\|\le\dfrac{2}{\ln 3}$.

Покажемо, що норма оператора рівна $\dfrac{2}{\ln 3}$. Розглянемо функцію $x_0(t)=1,\forall t\in[0,1]$. Ця функція належить простору $C[0,1]$ і має одиничну норму. Знайдемо норму функції Ax_0:

$$\|Ax_0\|=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^1 3^{r-2t}dr\right|=\max_{0\le t\le 1}\left|3^{-2t}\right|\left|\int_0^1 3^{r}dr\right|=\frac{2}{\ln 3}.$$

Отже, норма оператора $\|A\|=\dfrac{2}{\ln 3}$.

Приклад 8. Перевірити лінійність, обмеженість оператора $A:C[0,\pi]\to C[0,1],(Ax)(t)=\int_0^{\pi} t\cos rx(r)dr$ і знайти його норму.

Розв'язування. Для будь-яких $\lambda,\mu\in R$ і довільних функцій $x,y\in C[0,\pi]$ маємо :

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$(A(\lambda x+\mu y))(t)=\int_0^{\pi} t\cos r(\lambda x(r)+\mu y(r))dr=\lambda\int_0^{\pi} t\cos rx(r)dr+$$

$$+\mu\int_0^{\pi} t\cos ry(r)dr=\lambda(Ax)(t)+\mu(Ay)(t)\ ,$$

тобто оператор A лінійний.

Нехай x – будь-яка функція з простору $C[0,\pi]$. Оцінимо норму функції Ax в просторі $C[0,1]$. Отримаємо :

$$\|Ax\|_{C[0,1]}=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^{\pi} t\cos rx(r)dr\right|=\left|\int_0^{\pi}\cos rx(r)dr\right|\max_{0\le t\le 1}|t|\le$$

$$\le\int_0^{\pi}|\cos r\|x(r)|dr\le\max_{0\le r\le\pi}|x(r)|\int_0^{\pi}|\cos r|dr=2\|x\|_{C[0,\pi]}.$$

Звідки випливає обмеженість оператора і оцінка норми $\|A\|\le 2$.

Припустимо, що існує функція $x_0\in C[0,\pi]$, $\|x_0\|_{C[0,\pi]}=1$, така, для якої $\|Ax_0\|_{C[0,1]}=2$. Тоді виконується рівність $\max\limits_{0\le t\le 1}\left|\int\limits_0^{\pi} t\cos rx_0(r)dr\right|=2$. Оскільки $\max\limits_{0\le t\le 1}|t|=1$, то маємо $\left|\int\limits_0^{\pi}\cos rx_0(r)dr\right|=2$. Функція $\cos r$ на відрізку $[0,\pi]$ один раз міняє знак в околі точки $r=\dfrac{\pi}{2}$ з плюса на мінус, і, крім того, $\int\limits_0^{\pi}|\cos r|dr=2$. А це означає, що рівність $\left|\int\limits_0^{\pi}\cos rx_0(r)dr\right|=2$ може виконуватись тоді і тільки тоді, коли $x_0(r)=\pm sign(r-\dfrac{\pi}{2})$. Функція $sign(r-\dfrac{\pi}{2})$ не належить простору $C[0,\pi]$. Значить, отримали протиріччя.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Розглянемо послідовність функцій :

$$x_n(t)=\begin{cases}1, & 0\le t\le \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n},\\ -nt+\dfrac{n\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n}\le t\le \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n},\\ -1, & \dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\le t\le \pi.\end{cases} \qquad n\in N.$$

Кожна функція $x_n(t)$ є неперервною на відрізку $[0,\pi]$ і, як не важко переконатись, $\|x_n\|_{C[0,\pi]}=1.$

Знайдемо норму функції Ax_n в просторі $C[0,1]$. Отримаємо :

$$\|Ax_n\|_{C[0,1]}=\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^{\pi} t\cos r x_n(r)dr\right|=\max_{0\le t\le 1}|t|\left|\int_0^{\pi}\cos r x_n(r)dr\right|=$$

$$=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\cos r dr+\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}\cos r(-nr+\frac{n\pi}{2})dr-\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi}\cos r dr\right|.$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Так як

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}\cos r dr=\sin r\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}=\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})=\cos\frac{1}{n},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}\cos r(-nr+\frac{n\pi}{2})dr=\left|\begin{array}{l}u=-nr+\dfrac{n\pi}{2}\\ du=-ndr\\ dv=\cos r dr\\ v=\sin r\end{array}\right|=$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$= (-nr + \frac{n\pi}{2}) \sin r \Big|_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} + n \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} \sin r dr =$$

$$= [(-nr + \frac{n\pi}{2}) \sin r - n \cos r] \Big|_{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}} = 2n \sin \frac{1}{n} - 2 \cos \frac{1}{n},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi} \cos r dr = \sin r \Big|_{\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}}^{\pi} = -\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) = -\cos \frac{1}{n},$$

то дістанемо :

$$\|Ax_n\|_{C[0,1]} = \left| \cos \frac{1}{n} + 2n \sin \frac{1}{n} - 2 \cos \frac{1}{n} + \cos \frac{1}{n} \right| = 2n \sin \frac{1}{n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} 2n \sin \frac{1}{n} = 2 \lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 2$, тому $\|Ax_n\|_{C[0,1]} \to 2$

при $n \to \infty$. А це означає , що $\|A\| \geq 2$. Але раніше отримали оцінку $\|A\| \leq 2$. Отже, норма оператора $\|A\| = 2$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Завдання для самостійної роботи

Перевірити, що оператори є лінійними, обмеженими і знайти їх норми.

1. $A : c_0 \to c_0$, $Ax = (x_1, x_3, x_5, \ldots)$.
2. $A : l_1 \to l_1$, $Ax = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$.
3. $A : l_2 \to l_2$, $Ax = (\frac{1}{2} x_1, \frac{1}{3} x_3, \frac{1}{4} x_5, \ldots)$.
4. $A : l_1 \to c_0$, $Ax = (x_2, x_1, x_4, x_3, \ldots)$.
5. $A : l_1 \to l_2$, $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, \ldots)$.
6. $A : c_0 \to c_0$, $Ax = (x_1, -2x_2, x_3, -2x_4, \ldots)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

7. $A: c_0 \to l_1,\ Ax = (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^2}x_3, \frac{1}{2^3}x_5, \ldots)$.

8. $A: c_0 \to l_2,\ Ax = (\frac{1}{4}x_1, \frac{1}{5}x_3, \frac{1}{6}x_5, \ldots)$.

9. $A: c_0 \to c,\ Ax = (\frac{3}{5}x_1, -\frac{4}{6}x_3, \frac{5}{7}x_5, -\frac{6}{8}x_7, \ldots)$.

10. $A: c \to l_1,\ Ax = (x_1, \frac{1}{2!}x_2, \frac{1}{3!}x_3, \ldots)$.

11. $A: c \to l_1,\ Ax = (\frac{1}{2!}x_2, \frac{1}{3!}x_4, \frac{1}{4!}x_6, \ldots)$.

12. $A: l_1 \to l_1,\ Ax = (\frac{1}{2}x_3, -\frac{2}{3}x_5, \frac{3}{4}x_7, -\frac{4}{5}x_9, \ldots)$.

13. $A: l_1 \to c_0,\ Ax = (\frac{1}{3}x_1, -\frac{1}{4}x_2, \frac{1}{5}x_3, -\frac{1}{6}x_4, \ldots)$.

14. $A: l_1 \to l_2,\ Ax = (\frac{1}{3}x_2, \frac{2}{5}x_4, \frac{3}{7}x_6, \ldots)$.

15. $A: l_2 \to c_0,\ Ax = (\frac{1}{3}x_1, -\frac{1}{4}x_2, \frac{1}{5}x_3, -\frac{1}{6}x_4, \ldots)$.

16. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = (2x(0) + x(1))t$.

17. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = (4x(0) - 3x(1))t^2$.

18. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x(t^2)$.

19. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = t^2 x(t)$.

20. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = e^t x(t)$.

21. $A: C^1[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x(t)$.

22. $A: C^1[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = x'(t)$.

23. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^t x(r)dr$.

24. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 t^3 r^2 x(r)dr$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

25. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 t^2 r^3 x(r)dr$.

26. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 \sqrt{t} r^2 x(r)dr$.

27. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 t^3 \sqrt{r} x(r)dr$.

28. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 e^{3t-2r} x(r)dr$.

29. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 2^{t-2r} x(r)dr$.

30. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int_0^1 \sin 2t \cos r x(r)dr$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

31. $A: c_0 \to c,\ Ax = (-\frac{1}{2}x_2, \frac{2}{3}x_4, -\frac{3}{4}x_6, \ldots)$.

32. $A: c_0 \to l_1,\ Ax = (\frac{1}{3}x_2, \frac{1}{3^2}x_4, \frac{1}{3^3}x_6, \ldots)$.

33. $A: l_1 \to c_0,\ Ax = (\frac{1}{3}x_2, \frac{2}{5}x_4, \frac{3}{7}x_6, \ldots)$.

34. $A: l_1 \to c_0,\ Ax = (x_1, \frac{3}{2}x_2, \frac{5}{3}x_3, \frac{7}{4}x_4, \ldots)$.

35. $A: l_1 \to c_0,\ Ax = (x_3, -\frac{5}{4}x_5, \frac{8}{6}x_7, -\frac{11}{8}x_9, \ldots)$.

36. $A: l_1 \to l_2,\ Ax = (\frac{1}{4}x_1, -\frac{2}{6}x_3, \frac{3}{8}x_5, -\frac{4}{10}x_7, \ldots)$.

37. $A: l_2 \to l_1,\ Ax = (\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2^3}x_3, \frac{1}{2^5}x_5, \ldots)$.

38. $A: l_2 \to c_0,\ Ax = (x_2, -\frac{5}{4}x_4, \frac{8}{6}x_6, -\frac{11}{8}x_8, \ldots)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

39. $A: c_0 \to l_1,\ Ax = (x_1, \frac{1}{2!}x_2, \frac{1}{3!}x_3, \ldots)$.

40. $A: c_0 \to l_1,\ Ax = (-\frac{1}{2!}x_2, \frac{1}{3!}x_4, -\frac{1}{4!}x_6, \frac{1}{5!}x_8, \ldots)$.

41. $A: c_0 \to l_2,\ Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots)$.

42. $A: c_0 \to l_2,\ Ax = (-\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_4, -\frac{1}{4}x_6, \frac{1}{5}x_8, \ldots)$.

43. $A: c_0 \to l_1,\ Ax = (x_1, \frac{1}{2^2}x_2, \frac{1}{3^2}x_3, \ldots)$.

44. $A: R^n \to l_2,\ Ax = (\frac{x_1}{1}, \ldots, \frac{x_n}{1}, \ldots, \frac{x_1}{k}, \ldots, \frac{x_n}{k}, \ldots)$.

45. $A: l_2 \to l_2,\ Ax = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots),\ \sup\limits_{n\geq 1}|a_n| < +\infty$.

46. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = (4x(1) - 3x(0))t^3$.

47. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = (x(1) - 2x(0))x(t^2)$.

48. $A: C[-1,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = 3tx(-1)$.

49. $A: C[-1,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = (3x(-1) - 2x(0))t$.

50. $A: C[-1,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = (2x(0) + 3x(-1))x(t^2)$.

51. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 t^3\sqrt{r}\,x(r)dr$.

52. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 e^{2r-3t}x(r)dr$.

53. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = \int\limits_0^1 \cos 2t \cos r\,x(r)dr$.

54. $A: C[0,1] \to C[0,1],\ (Ax)(t) = t\int\limits_0^1 x(r)dr - 2x(0)$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

55. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = t^2 \int_0^1 x(r)dr + 2x(1)$.

56. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $(Ax)(t) = \delta(t)x(t)$, $\delta(t) \in C[a,b]$.

57. $A: C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = \int_0^1 t^\alpha r^\beta x(r)dr$, $\alpha \geq 0$, $\beta > -1$.

58. $A: C^1[a,b] \to C[a,b]$, $(Ax)(t) = x'(t)$.

59. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $(Ax)(t) = \int_a^t x(r)dr$.

60. $A: C[a,b] \to C[a,b]$, $(Ax)(t) = \int_a^b p(t)g(r)x(r)dr$,

$p, g \in C[a,b]$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Практична робота 2. Обернені оператори

Нехай X, Y - банахові простори, $A: X \to Y$ - лінійний неперервний оператор.

Ядром оператора A називають множину $KerA = \{x \in X : Ax = 0\}$.

Множину значень оператора A (множину $\{Ax : x \in X\}$) позначають $R(A)$.

Банахів простір усіх лінійних неперервних операторів з X в Y позначають $L(X,Y)$.

Оператор $A \in L(X,Y)$ називається оборотним, якщо для довільного $y \in R(A)$ рівняння

$$Ax = y \tag{1}$$

має єдиний розв'язок, тобто $KerA = \{0\}$.

Якщо оператор $A \in L(X,Y)$ оборотний, то кожному $y \in R(A)$ можна поставити у відповідність єдиний елемент $x \in X$, який є розв'язком рівняння (1). Оператор, який здійснює таку відповідність, називається оберненим до A і позначається A^{-1}.

Національний університет водного господарства та природокористування

Оператор $A \in L(X,Y)$ називається неперервно оборотним, якщо: 1) $KerA = \{0\}$; 2) $R(A) = Y$; 3) $A^{-1} \in L(Y,X)$. У цьому випадку A^{-1} називають неперервним оберненим до A оператором.

Теорема (теорема Банаха про обернений оператор). Якщо X, Y - банахові простори і оператор $A \in L(X,Y)$ здійснює взаємно однозначне відображення простору X на простір Y, тоді оператор A є неперервно оборотним, тобто $A^{-1} \in L(Y,X)$.

Приклад 1. Чи є оператор $A: l_1 \to l_2$, $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$ неперервно оборотним? Знайти оператор A^{-1}.

Розв'язування. Рівняння $Ax = 0$ має вигляд $(0, x_1, x_2, ...) = (0,0,0,...)$. Звідки $x_1 = 0$, $x_2 = 0, ...$, тобто $KerA = \{0\}$. Значить, оператор A оборотний.

Так як, наприклад, елемент $y = (1,0,0,...) \in l_2$ не належить множині значень оператора $R(A)$, то оператор A не є неперервно оборотний.

Національний університет водного господарства та природокористування

Знайдемо обернений оператор $A^{-1}: l_2 \to l_1$. Візьмемо довільний елемент $y = (0, y_2, y_3, ...) \in R(A)$ і розглянемо рівняння $Ax = y$. Маємо $(0, x_1, x_2, ...) = (0, y_2, y_3, ...)$, звідки $x_1 = y_2$, $x_2 = y_3, ..., x_n = y_{n+1}, ...$ Отже, обернений оператор має вигляд $A^{-1}y = A^{-1}(0, y_2, y_3, ...) = (y_2, y_3, y_4, ...)$.

Приклад 2. Показати, що лінійний неперервний оператор $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_1, x_3, x_4, ...)$ неперервно оборотний і знайти оператор A^{-1}.

Розв'язування. Знайдемо ядро оператора $KerA$. Із рівності

$$(x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_1, x_3, x_4, ...) = (0,0,0,0,...)$$

отримаємо $x_1 - 2x_2 = 0$, $x_2 - 3x_1 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0, ...$ Оскільки система рівнянь

$$x_1 - 2x_2 = 0,$$
$$x_2 - 3x_1 = 0,$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

має тільки нульовий розв'язок $x_1 = 0,\ x_2 = 0$, то $KerA = \{0\}$. Значить, оператор A оборотний.

Так як простір l_2 банахів, то якщо для довільного $y \in l_2$ рівняння $Ax = y$ має єдиний розв'язок, тоді, згідно теореми Банаха про обернений оператор, A буде неперервно оборотним. Рівняння $Ax = y$ в даному випадку має вигляд

$$(x_1 - 2x_2, x_2 - 3x_1, x_3, x_4, ...) = (y_1, y_2, y_3, y_4, ...).$$

Отримаємо $x_1 - 2x_2 = y_1,\ x_2 - 3x_1 = y_2,\ x_k = y_k$ для всіх $k \geq 3$. Звідки знаходимо $x_1 = -\dfrac{y_1 + 2y_2}{5},\ x_2 = -\dfrac{3y_1 + y_2}{5}$, $x_k = y_k$ для всіх $k \geq 3$. Тобто рівняння має розв'язок

$$x = (-\frac{y_1 + 2y_2}{5}, -\frac{3y_1 + y_2}{5}, y_3, y_4, ...).$$

Отже, оператор A неперервно оборотний і дія оберненого оператора $A^{-1} : l_2 \to l_2$ задається формулою

$$A^{-1}(y) = (-\frac{y_1 + 2y_2}{5}, -\frac{3y_1 + y_2}{5}, y_3, y_4, ...).$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Приклад 3. Показати, що оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{2t+3s} x(s)ds$ неперервно оборотний і знайти A^{-1}.

Розв'язування. Оператор A визначений на всьому просторі $C[0,1]$ і лінійний. Для будь-якої функції $x(t) \in C[0,1]$ маємо:

$$\|Ax\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| x(t) + \int_0^1 e^{2t+3s} x(s)ds \right| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)| + \max_{0 \leq t \leq 1} \left| e^{2t} \int_0^1 e^{3s} x(s)ds \right| \leq$$

$$\leq \|x\| + \max_{0 \leq t \leq 1} |e^{2t}| \left| \int_0^1 e^{3s} x(s)ds \right| \leq \|x\| + e^2 \max_{0 \leq s \leq 1} |e^{3s} x(s)| \int_0^1 ds \leq$$

$$\leq \|x\| + e^2 e^3 \|x\| = (1 + e^5)\|x\|.$$

Із отриманої оцінки випливає обмеженість оператора A, тобто $A \in L(C[0,1], C[0,1])$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Простір $C[0,1]$ є банаховим простором. Значить, для того щоб встановити неперервну оборотність оператора A, досить (згідно теореми Банана про обернений оператор) показати, що для будь-якої функції $y(t) \in C[0,1]$ рівняння

$$(Ax)(t) = x(t) + \int_0^1 e^{2t+3s} x(s)ds = y(t) \qquad (2)$$

має єдиний розв'язок.

Нехай $x(t)$ - розв'язок рівняння (2). Тоді має місце рівність

$$x(t) + \int_0^1 e^{2t+3s} x(s)ds = y(t). \qquad (3)$$

Позначимо через $a = \int_0^1 e^{3s} x(s)ds$. Запишемо (3) наступним чином

$$x(t) = y(t) - e^{2t} a. \qquad (4)$$

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Помножимо рівність (4) на функцію e^{3t} і проінтегруємо від 0 до 1. У результаті отримаємо

$$\int_0^1 e^{3t} x(t)dt = \int_0^1 e^{3t} y(t)dt - a\int_0^1 e^{3t} e^{2t} dt. \qquad (5)$$

Оскільки $\int_0^1 e^{3t} x(t)dt = a$, $\int_0^1 e^{3t} e^{2t} dt = \frac{1}{5}(e^5 - 1)$, то рівність (5) запишеться у вигляді

$$a = \int_0^1 e^{3t} y(t)dt - \frac{a}{5}(e^5 - 1).$$

Звідки знаходимо

$$a = \frac{5}{4 + e^5} \int_0^1 e^{3t} y(t)dt.$$

Підставимо отримане значення a в формулу (4). Дістанемо

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$x(t) = y(t) - \frac{5}{4+e^5}\int_0^1 e^{2t}e^{3s}\,y(s)ds\,. \qquad (6)$$

Формула (6) визначає єдиний розв'язок рівняння (2).

Отже, оператор A неперервно оборотний, а дія оберненого оператора $A^{-1}: C[0,1] \to C[0,1]$ визначається так

$$(A^{-1}y)(t) = y(t) - \frac{5}{4+e^5}\int_0^1 e^{2t+3s}\,y(s)ds\,.$$

Приклад 4. Нехай X - простір неперервно диференційованих на $[0,1]$ функцій $x(t)$ таких, що $x(t)=0$, з нормою $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Показати, що оператор $A: X \to C[0,1]$, $(Ax)(t) = x'(t) - 2tx(t)$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}.

Розв'язування. Лінійність оператора A і його визначеність на всьому просторі X очевидна. Покажемо обмеженість оператора.

Візьмемо довільну функцію $x \in X$ і оцінимо норму елемента Ax в просторі $C[0,1]$. Маємо:

$$\|Ax\| = \max_{0\le t\le 1}|x'(t) - 2tx(t)| \le \max_{0\le t\le 1}|x'(t)| + 2\max_{0\le t\le 1}|tx(t)| \le$$

$$\le 2(\max_{0\le t\le 1}|x'(t)| + \max_{0\le t\le 1}|x(t)|) = 2\|x\|.$$

Значить, оператор A є обмеженим, тобто $A \in L(X, C[0,1])$.

Простір X є банаховим простором. Розглянемо рівняння

$$(Ax)(t) = x'(t) - 2tx(t) = y(t)\,, \qquad (7)$$

де $y(t)$ - довільний елемент простору $C[0,1]$.

Рівняння (7) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням вигляду

$$x'(t) + p(t)x(t) = y(t)\,. \qquad (8)$$

Загальний розв'язок рівняння (8) задається формулою

$$x(t) = e^{-\int_0^t p(s)ds}\left(c + \int_0^t y(s)e^{\int_0^s p(r)dr}\,ds\right). \qquad (9)$$

Тому, згідно формули (9), розв'язками рівняння (7) є функції

Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$x(t) = e^{2\int_0^t sds}\left(c + \int_0^t y(s)e^{-2\int_0^s rdr}\,ds\right) = e^{t^2}\left(c + \int_0^t y(s)e^{-s^2}\,ds\right). \quad (10)$$

Оскільки $x(0) = 0$, то з (10) отримаємо єдиний розв'язок

$$x(t) = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}\,y(s)ds\,.$$

Отже, оператор A є неперервно оборотним. Обернений оператор $A^{-1} : C[0,1] \to X$ діє наступним чином

$$(A^{-1}y)(t) = e^{t^2}\int_0^t e^{-s^2}\,y(s)ds\,.$$

Завдання для самостійної роботи

Чи є оператор $A : X \to Y$ неперервно оборотним? Знайти оператор A^{-1}.

1. $A : c_0 \to c_0,\ Ax = (x_3, x_1, x_2, x_4, x_5, ...)$.
2. $A : l_2 \to l_2,\ Ax = (2x_1, 3x_3, x_2, x_4, x_5, ...)$.
3. $A : l_1 \to l_1,\ Ax = (-x_1, 3x_2, -x_3, x_4, x_5, ...)$.
4. $A : c_0 \to c_0,\ Ax = (x_1, 0, x_2, x_3, x_4, ...)$.
5. $A : l_1 \to l_1,\ Ax = (0, 0, x_1, x_2, x_3, ...)$.
6. $A : l_1 \to c_0,\ Ax = (2x_2, x_1, 4x_3, x_4, x_5, ...)$.
7. $A : l_2 \to c_0,\ Ax = (3x_2, -x_1, 2x_3, x_4, x_5, ...)$.
8. $A : l_1 \to l_2,\ Ax = (-2x_1, 3x_3, -x_2, x_4, x_5, ...)$.
9. $A : l_1 \to l_1,\ Ax = (x_1, x_2, x_2, x_3, x_4, ...)$.
10. $A : l_2 \to l_2,\ Ax = (x_1, x_2, x_1, x_3, x_4, ...)$.

Показати, що оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}.

11. $(Ax)(t) = (t+1)x(t)$.
12. $(Ax)(t) = x(t)\cos t$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

13. $(Ax)(t) = x(t) + 2\int_0^1 t^2 s^3 x(s)ds$.

14. $(Ax)(t) = x(t) - 3\int_0^1 t^3 s^2 x(s)ds$.

15. $(Ax)(t) = x(t) + 3\int_0^1 e^{3t+2s} x(s)ds$.

16. $(Ax)(t) = x(t) - 2\int_0^1 3^{2t+4s} x(s)ds$.

17. $(Ax)(t) = x(t) + 2\int_0^1 e^{2s-3t} x(s)ds$.

18. $(Ax)(t) = x(t) + 3\int_0^1 te^{3s} x(s)ds$.

19. $(Ax)(t) = x(t) - 4\int_0^1 te^{-4s} x(s)ds$.

20. $(Ax)(t) = x(t) + 2\int_0^1 e^{3t} sx(s)ds$.

Нехай X - простір неперервно диференційованих на [0,1] функцій $x(t)$ таких, що $x(t) = 0$, з нормою $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Показати, що оператор $A: X \to C[0,1]$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}.

21. $(Ax)(t) = x'(t) + 4x(t)$.

22. $(Ax)(t) = x'(t) - 3x(t)$.

23. $(Ax)(t) = 4x'(t) - x(t)$.

24. $(Ax)(t) = 2x'(t) - 3x(t)$.

25. $(Ax)(t) = x'(t) - tx(t)$.

26. $(Ax)(t) = x'(t) + 2t^2 x(t)$.

Національний університет водного господарства

27. $(Ax)(t) = x'(t) + t^3 x(t)$.

28. $(Ax)(t) = x'(t) - 3t^2 x(t)$.

29. $(Ax)(t) = x'(t) + e^t x(t)$.

30. $(Ax)(t) = (t+1)x'(t) - x(t)$.

Чи є оператор $A: X \to Y$ неперервно оборотним? Знайти оператор A^{-1}.

31. $A: c_0 \to c_0$, $Ax = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, ...)$.

32. $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ...)$.

33. $A: l_1 \to l_1$, $Ax = (3x_3, x_1, 2x_2, x_4, x_5, ...)$.

34. $A: c_0 \to c_0$, $Ax = (2x_1, x_2 + x_3, x_3 - 2x_2, x_4, x_5, ...)$.

35. $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (x_2 - x_3, x_3 - 2x_2, 2x_1, x_4, x_5, ...)$.

36. $A: l_2 \to c_0$, $Ax = (x_2 - 2x_3, x_2 + 3x_3, -x_1, x_4, x_5, ...)$.

37. $A: l_1 \to c_0$, $Ax = (x_2 - x_3, x_3 - 2x_2, -2x_1, x_4, x_5, ...)$.

38. $A: l_1 \to l_2$, $Ax = (x_2 - 2x_3, 3x_1, x_2 + 3x_3, x_4, x_5, ...)$.

39. $A: l_1 \to l_2$, $Ax = (x_2 - 2x_1, 3x_3, x_2 + x_1, x_4, x_5, ...)$.

40. $A: l_2 \to l_2$, $Ax = (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3, ...)$, $\inf\limits_{n \geq 1} |a_n| > 0$, $\sup\limits_{n \geq 1} |a_n| < +\infty$.

Показати, що оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}.

41. $(Ax)(t) = (t^2 - 2t + 3)x(t)$.

42. $(Ax)(t) = b(t)x(t)$, $b(t) \in C[0,1]$, $\forall t \in [0,1]$ $b(t) \neq 0$.

43. $(Ax)(t) = x(t) + 2\int\limits_0^1 (3t - 1)e^{3s} x(s)ds$.

44. $(Ax)(t) = x(t) - 4\int\limits_0^1 e^{2t}(2s - 1)x(s)ds$.

45. $(Ax)(t) = x(t) + 2\int\limits_0^1 t^2 e^{3s} x(s)ds$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

46. $(Ax)(t) = x(t) - 3\int_0^1 e^{2t} s^2 x(s)ds$.

47. $(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 \sin\frac{\pi t}{2}\cos\frac{\pi s}{2}x(s)ds$.

48. $(Ax)(t) = x(t) + 3\int_0^1 \cos\frac{\pi t}{2}\sin\frac{\pi s}{2}x(s)ds$.

49. $(Ax)(t) = x(t) - \int_0^1 \cos\frac{\pi t}{2}\, sx(s)ds$.

50. $(Ax)(t) = x(t) + 2\int_0^1 \sin\frac{\pi t}{2}sx(s)ds$.

Нехай X - простір неперервно диференційованих на $[0,1]$ функцій $x(t)$ таких, що $x(0) = 0$, з нормою $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1}|x(t)| + \max\limits_{0\le t\le 1}|x'(t)|$. Показати, що оператор $A: X \to C[0,1]$ є неперервно оборотним і знайти A^{-1}.

51. $(Ax)(t) = (t^2+1)x'(t) - 2tx(t)$.

52. $(Ax)(t) = (t^2-2)x'(t) + 2tx(t)$.

53. $(Ax)(t) = e^t x'(t) - 2tx(t)$.

54. $(Ax)(t) = e^{2t}x'(t) + (3t+1)x(t)$.

55. $(Ax)(t) = (t+1)x'(t) - (2t+1)x(t)$.

56. $(Ax)(t) = (2-t)x'(t) + (2t+1)x(t)$.

57. $(Ax)(t) = (t^3+1)x'(t) - 3t^2x(t)$.

58. $(Ax)(t) = e^t x'(t) - t^2 x(t)$.

59. $(Ax)(t) = x'(t) + a(t)x(t),\ a(t) \in C[0,1]$.

60. $(Ax)(t) = b(t)x'(t) + a(t)x(t)$, $b(t), a(t) \in C[0,1]$, $\forall t \in [0,1]\ \ b(t) \neq 0$.

Національний університет
водного господарства
та природокористування

Література

1. Банах С.С. Курс функціонального аналізу. – Київ : Радянська школа, 1948. – 216 с.
2. Навчальні завдання до практичних занять з функціонального аналізу / Укладачі М.Ф.Городній, О.Ю.Костантінов, О.Н.Нестеренко, А.В.Чайковський. – К.: ВПЦ ”Київський університет”, 2006.-103 с
3. Городецкий В.В., Нагнибида Н.И., Настасиев П.П, Методы решения задач по функциональному анализу. – К.: Выща школа, 1990.-479 с.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. -744 с.
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1984. – 496 с.
6. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М.: Наука, 1984. – 256 с.

Національний університет
водного господарства
та природокористування