ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

Сяський А. О., д.т.н., професор, Кот В. В., здобувач (Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне)

ПЕРЕДАЧА ЗОСЕРЕДЖЕНИХ МОМЕНТІВ ДО КОНТУРУ КРИВОЛІНІЙНОГО ОТВОРУ ПЛАСТИНКИ СИСТЕМОЮ РОЗІМКНЕНИХ ПРУЖНИХ РЕБЕР

Розглянуто задачу про передачу зосередженого моментного навантаження через систему двох пружних ребр, наділених жорсткістю на згин та кручення, до контуру криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці.
Ключові слова: розімкнене пружне ребро, нескінченна пластина, моментне навантаження, напружено-деформований стан.

Рассмотрена задача о передаче сосредоточенной моментной нагрузки через систему двух упругих ребр, наделенных жесткостью на изгиб и кручение, к контуру криволинейной отверстия в бесконечной изотропной пластинке.
Ключевые слова: разомкнутое упругое ребро, бесконечная пластина, моментные нагрузки, напряженно-деформированное состояние.

The problem of transfer of concentrated moment load through the system of two elastic ribs, endowed with stiffness in bending and torsion, to the curvilinear contour of the hole in an infinite isotropic plate.
Keywords: disconnected elastic edge, infinite plate, load moment, the stress-strain state.

Вступ. У машинобудуванні, суднобудуванні та інших галузях інженерної техніки широкого використання набули деталі у вигляді пластин з отворами різної форми. При згині таких деталей на контурі отвору виникають зони з небезпечно високою концентрацією напружень. Тому на практиці їх підсилюють тонкими пружними ребрами сталої чи змінної жорсткості[1-4]. Використання часткового підсилення контурів отворів ребрами змінної жорсткості [5] дозволяє знайти компроміс між надійністю та металомісткістю пластин-частої конструкції.

Підсилювальні ребра, будучи розсіювачами концентрації напружень на контурі отвору, дозволяють передавати через них до пластинки зосереджене

силове і моментне навантаження. Такі задачі без врахування жорсткості підсилення на кручення розглянуто в [6].

У статті пропонується розв'язок задачі про передачу зосередженого моментного навантаження через систему двох розімкнених пружних ребер змінної жорсткості на згин та кручення до контуру криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці.

Постановка задачі. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$, яка послаблена криволінійним отвором, обмеженим гладким контуром L. Систему декартових координат оберемо так, як показано на рис. 1.

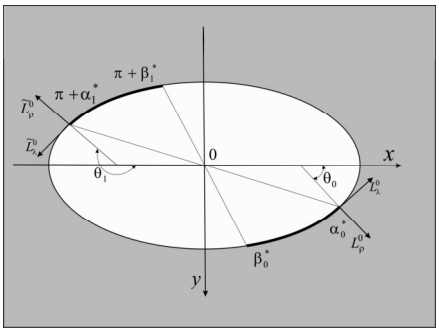

Рис. 1. Розрахункова схема пластинки

На ділянках $L_1 = \left[\alpha_0^*, \beta_0^*\right]$ та $L_2 = \left[\alpha_1^* + \pi, \beta_1^* + \pi\right]$ контур отвору L підсилено тонкими пружними ребрами змінної товщини і сталої висоти. До торців ребер, які визначаються полярними кутами α_0^* і $\alpha_1^* + \pi$, прикладено зосередженні пари сил з моментами L_ρ^0, L_λ^0 та $\tilde{L}_\rho^0, \tilde{L}_\lambda^0$ відповідно, що діють в нормальному та тангенціальному до L напрямках.

Розв'язок задачі полягає у визначенні контактних моментів M_ρ, P в зонах підсилення та кільцевих M_λ і крутних $H_{\rho\lambda}$ моментів на контурі отвору, а також напружень в підсилювальних ребрах.

Основні рівняння задачі. За допомогою раціональної функції

$$\omega(\xi) = R_0\left(\xi + \frac{\varepsilon_1}{\xi} + \frac{\varepsilon_2}{\xi} + \frac{\varepsilon_3}{\xi}\right) \tag{1}$$

здійснимо конформне відображення зовнішності одиничного кола в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає середня площина пластинки. $i = \sqrt{-1}$; R_0 – характерний розмір отвору; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – параметри, які визначають відхилення контуру L від кола. Надаючи параметрам $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ певних значень при $\left|\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3\right| < 1$ одержимо цілий клас отворів з гладкими контурами. Зокрема при $\left|\varepsilon_1\right| < 1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ контур L має форму

еліпса; при $|\varepsilon_2| < 1/2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ – форму правильного трикутника із закругленими кутами; $|\varepsilon_3| < 1/3$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ – форму квадрата із закругленими кутами.

Моделюючи підсилення пружними лініями, наділеними змінною жорсткістю на згин $g_1(s)$ і кручення $g_2(s)$ (s – дуга на L), граничні умови задачі можна записати у вигляді [4]

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \int_{\beta_0}^{\lambda} N(t)\left\{\left(f_2(t) + M_y^*\right)\left[R_2^2(t) + \frac{g_1}{g_2}R_1^2(t)\right] + \right.$$

$$\left. + \left(f_1(t) + M_x^*\right)R_1(t)R_2(t)\left(1 - \frac{g_1}{g_2}\right)\right\}dt + c_1; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \int_{\beta_0}^{\lambda} N(t)\left\{\left(f_2(t) + M_y^*\right)R_1(t)R_2(t)\left(\frac{g_1}{g_2} - 1\right) - \right.$$

$$\left. - \left(f_1(t) + M_x^*\right)\left[R_1^2(t) + R_2(t)\frac{g_1}{g_2}R_2^2(t)\right]\right\}dt + c_2;$$

$$\lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi],$$

де $f_1 + if_2 = i\int_{\alpha_0}^{\lambda}(M_x^* + iP^*)e^{it}dt = \begin{cases} \hat{f}_1 + i\hat{f}_2, \ \lambda \in [\alpha_0, \beta_0] \\ \tilde{f}_1 + i\tilde{f}_2, \ \lambda \in [\alpha_1 + \pi, \beta_1 + \pi] \end{cases}$;

$g_1 + ig_2 = i\begin{cases} g_1^0 + ig_2^0, \ \lambda \in [\alpha_0, \beta_0] \\ \tilde{g}_1 + i\tilde{g}_2, \ \lambda \in [\alpha_1 + \pi, \beta_1 + \pi] \end{cases}$; $N(t) = \dfrac{\sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)}}{g_1}$;

$M_\rho^* + iP^* = (M_\rho + iP)\omega'(\sigma)$; $R_1 + iR_2 = e^{i\theta}$; $\omega'(\sigma) = \alpha + i\beta$;

$c_1 = \begin{cases} C_1^*, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ C_2^*, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}$; $M_x^* + iM_y^* = \begin{cases} M_x^0 + iM_y^0, \ \lambda \in [\alpha_0, \beta_0] \\ \tilde{M}_x + i\tilde{M}_y, \ \lambda \in [\alpha_1 + \pi, \beta_1 + \pi] \end{cases}$;

$M_x^0 + iM_y^0 = (L_\rho^0 + L_\lambda^0)e^{i\theta_0}$; $\tilde{M}_x + i\tilde{M}_y = (\tilde{L}_\rho^0 + \tilde{L}_\lambda^0)e^{i\theta_1}$;

$c_2 = \begin{cases} C_3^*, \lambda \in [\alpha_0; \beta_0] \\ C_4^*, \lambda \in [\alpha_1 + \pi; \beta_1 + \pi] \end{cases}$; $[\alpha_0, \beta_0] \cup [\alpha_1 + \pi, \beta_1 + \pi]$ образ ділянки $[\alpha_0^*, \beta_0^*] \cup [\alpha_1^* + \pi, \beta_1^* + \pi]$ при відображенні (1), c_1, c_2 – дійсні сталі.

Компоненти кута повороту нормалі в контурних точках середньої площини пластинки при заданому навантаженні на підставі [4] запишемо у вигляді

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{k}{3+\nu}\left\{(1+\nu)f_1\ (\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\hat{f}_2'\ (t)\ln\sin\frac{\lambda-t}{2}dt-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\tilde{f}_2'(t)\ln\cos\frac{\lambda-\tilde{t}}{2}dt+Q_1\right\}+C_1;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{k}{3+\nu}\left\{(1+\nu)f_2\ (\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}\hat{f}_1'\ (t)\ln\sin\frac{\lambda-t}{2}dt+\right. \tag{3}$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\tilde{f}_1'(t)\ln\cos\frac{\lambda-\tilde{t}}{2}dt+Q_2\right\}+C_2,\ \lambda\in\gamma.$$

Тут

$$Q_1=\frac{1-\nu}{2\pi}\left[\left(M_x^0+\tilde{M}_x\right)\left(\varepsilon_2\sin\lambda+\varepsilon_3\sin 2\lambda\right)+\right.$$

$$\left.+\left(M_y^0+\tilde{M}_y\right)\left(\varepsilon_2\cos\lambda+\varepsilon_3\cos 2\lambda\right)\right]+\frac{M_x^0+\tilde{M}_x}{2\pi}(1+\nu)\lambda-$$

$$-\tilde{C}_1\left[(3+\nu)\sin\lambda+(1-\nu)(\varepsilon_1\sin\lambda+\varepsilon_2\sin 2\lambda+\varepsilon_3\sin 3\lambda)\right]-$$

$$-\frac{4\varepsilon_3}{k}(\tilde{\alpha}_1\cos\lambda-\tilde{\beta}_1\sin\lambda);$$

$$Q_2=\frac{1-\nu}{2\pi}\left[\left(M_x^0+\tilde{M}_x\right)\left(\varepsilon_2\cos\lambda+\varepsilon_3\cos 2\lambda\right)-\right.$$

$$\left.-\left(M_y^0+\tilde{M}_y\right)\left(\varepsilon_2\sin\lambda+\varepsilon_3\sin 2\lambda\right)\right]+\frac{M_y^0+\tilde{M}_y}{2\pi}(1+\nu)\lambda+$$

$$+\tilde{C}_1\left[(3+\nu)\cos\lambda-(1-\nu)(\varepsilon_1\cos\lambda+\varepsilon_2\cos 2\lambda+\varepsilon_3\cos 3\lambda)\right]-$$

$$-\frac{4\varepsilon_3}{k}(\tilde{\alpha}_1\sin\lambda-\tilde{\beta}_1\cos\lambda);$$

$k=\dfrac{1}{D(1-\nu)}$; $D=\dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$, E, ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуас-

сона матеріалу пластинки; C_1, C_2, $\tilde{C}_1$ – дійсні сталі.

Сталі $\tilde{\alpha}_1$, $\tilde{\beta}_1$ – визначаємо з умов

$$(\chi-\varepsilon_3)\frac{\tilde{\beta}_1}{k}+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}(\hat{f}_1'(t)\cos t-\hat{f}_2'(t)\sin t)dt-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(\tilde{f}_2'(\tilde{t})\cos(\tilde{t})-$$

$$-\tilde{f}_2'(\tilde{t})\sin(\tilde{t}))d\tilde{t}+\tilde{C}_1\varepsilon_1-\varepsilon_2\frac{M_x^0+\tilde{M}_x}{8\pi}(1-\nu)=0; \qquad (4)$$

$$(\chi+\varepsilon_3)\frac{\tilde{\alpha}_1}{k}-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0}(\hat{f}_1'(t)\sin t+\hat{f}_2'(t)\cos t)dt+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}(\tilde{f}_1'(\tilde{t})\sin(\tilde{t})+$$

$$+\tilde{f}_2'(\tilde{t})\cos(\tilde{t}))d\tilde{t}-\varepsilon_2\frac{M_y^0+\tilde{M}_y}{8\pi}(1-\nu)=0,$$

де $\chi=-\dfrac{3+\nu}{1-\nu}$

Підстановка (3) у (2) приводить до системи сингулярних рівнянь для знаходження функцій $\hat{f}_1'$, $f_2^{0\prime}$, $\tilde{f}_1'$, $\tilde{f}_2'$

$$-\int_{\beta_0}^{\lambda}N(t)m\left[\left[f_2(t)+M_y^*\right]\left[R_2^2(t)+\frac{g_1}{g_2}R_1^2(t)\right]+\left[f_1(t)+M_x^*\right]\times\right.$$

$$\left.\times R_1(t)R_2(t)\left(1-\frac{g_1}{g_2}\right)\right]dt+(1+\nu)f_1(\lambda)-\frac{2}{\pi}\int_{\gamma}f_2'(t)\ln\sin\frac{\lambda-t}{2}dt+$$

$$+Q_1+C_1-c_1=0;$$

$$-\int_{\beta_0}^{\lambda}N(t)m\left[\left[f_2(t)+M_y^*\right]R_1(t)R_2(t)\left(\frac{g_1}{g_2}-1\right)-\left[f_1(t)+M_x^*\right]\times\right. \qquad (5)$$

$$\left.\times\left[R_1^2(t)+\frac{g_1}{g_2}R_2^2(t)\right]\right]dt+(1+\nu)f_2(\lambda)+\frac{2}{\pi}\int_{\gamma}f_1'(t)\ln\sin\frac{\lambda-t}{2}dt+$$

$$+Q_2+C_2-c_2=0;$$

$$\lambda\in[\alpha_0;\beta_0]\cup[\alpha_1+\pi;\beta_1+\pi].$$

Тут $m=\dfrac{(3+\nu)}{k}$.

До системи (5) необхідно додати умови рівноваги підсилень [1]

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0}(\hat{f}_2'(t)+i\hat{f}_2')dt=-(M_x^0+iM_y^0)\,,\ \int_{\alpha_1}^{\beta_1}(\tilde{f}_1'(t)+i\tilde{f}_2'(t))d\tilde{t}=-(\tilde{M}_x+i\tilde{M}_y) \quad (6)$$

та умову однозначності прогину пластини [2]

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\Big[-f_1'\big[(\varepsilon_1-\chi)\cos t+\varepsilon_2\cos 2t+\varepsilon_3\cos 3t\big]-f_2'[(\varepsilon_1+\chi)\sin t+$$

$$+\varepsilon_2\sin 2t+\varepsilon_3\sin 3t]\Big]dt+\varepsilon_1\varepsilon_3\frac{\beta_1}{k}+\frac{M_x^*}{8\pi}(1-\nu)(\varepsilon_1\varepsilon_2+ \quad (7)$$

$$+2\varepsilon_2\varepsilon_3)-\tilde{C}_1(\chi+\varepsilon_1^2+2\varepsilon_2^2+3\varepsilon_3^2)=0\,,$$

які служать для визначення невідомих сталих C_1-c_1,. C_2-c_2, $\tilde{C}_1$.

Для сумісності системи (5)-(7) необхідне виконання таких співвідношень

$$\begin{aligned}\hat{f}_1(\lambda)&=\int_{\alpha_0}^{\lambda}\hat{f}_1'(t)dt, & \hat{f}_2(\lambda)&=\int_{\alpha_0}^{\lambda}\hat{f}_2'(t)dt;\\ \tilde{f}_1(\lambda)&=\int_{\alpha_1+\pi}^{\lambda}\tilde{f}_1(t)dt, & \tilde{f}_2(\lambda)&=\int_{\alpha_1+\pi}^{\lambda}\tilde{f}_2'(t)dt.\end{aligned} \quad (8)$$

Якщо функції $f_1'(\lambda)$, $f_2'(\lambda)$ стануть відомі, то контактні моменти визначаються із співвідношень

$$M_\rho+iP=\frac{(f_2'-if_1')\alpha+(f_1'-if_2')\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{-i\lambda},\ \lambda\in\gamma. \quad (9)$$

Кільцеві та крутні моменти на контурі L визначаються за формулами [2]

$$L_\rho=\frac{g_1}{D(1-\nu^2)}(M_\lambda-\nu M_\rho);\quad L_\lambda=\frac{g_2}{D(1-\nu)}H_{\rho\lambda}\,. \quad (10)$$

Наближений розв'язок задачі. Відшукання точного розв'язку системи (5)-(9) надзвичайно складне завдання. Для наближеного її розв'язання необхідно встановити структуру функцій f_1', f_2' на кінцях зони підсилення.

На підставі (6)

$$\hat{f}_1'\alpha_0)=\hat{f}_2(\alpha_0)=\tilde{f}_1(\alpha_1)=\tilde{f}_2(\alpha_1)=0\,,$$

$$\hat{f}_1(\beta_0)+i\tilde{f}_2(\beta_1)=M_x^0+i\tilde{M}_x\,,\ \hat{f}_2(\beta_0)+i\tilde{f}_2(\beta_1)=M_y^0+i\tilde{M}_y\,.$$

Тому функції f_1', f_2' на кінцях ділянок підсилення мають кореневу особливість. З огляду на це наближений розв'язок системи (5)-(9) може бути знайдений методом механічних квадратур і колокації [5].

У якості прикладу на рис. 2-5 наведено результати розрахунку напруженого стану на контурі отвору ($\varepsilon_1 = 0{,}1$, $\varepsilon_2 = 0{,}1$, $\varepsilon_3 = -0{,}1$) до якого на ділянках $L_1 = [-60^\circ, 60^\circ]$ і $L_2 = [120^\circ, 240^\circ]$ передається зосереджене моментне навантаження ($L_\rho^0 = \tilde{L}_\rho^0 = 1$, $L_\lambda^0 = \tilde{L}_\lambda^0 = 0$) системою двох однакових пружних ребер з параметрами $h_0/h = 1$, $b_0/r = 1/20$, $b_0/h_0 = 1{,}3$. Суцільні лінії відповідають випадку $E_0 / E = \infty$ (абсолютно жорстке підсилення), штрихові – $E_0 / E = 5$, пунктирні – $E_0 / E = 10$, штрихпунктирні $E_0 / E = 100$.

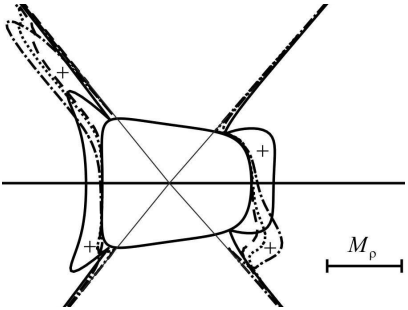

Рис. 2. Епюри розподілу зусиль M_ρ

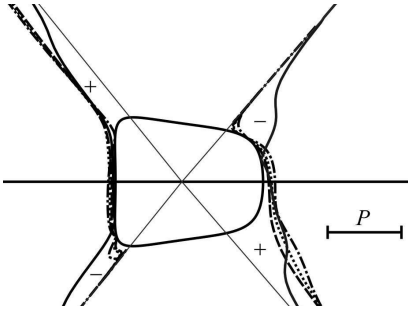

Рис. 3. Епюри розподілу зусиль P

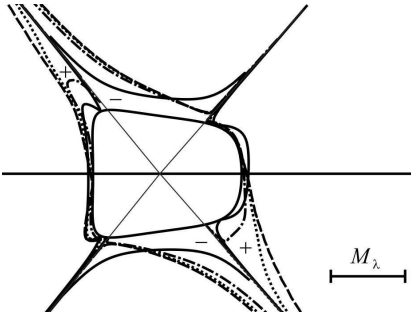

Рис. 4. Епюри розподілу зусиль M_λ

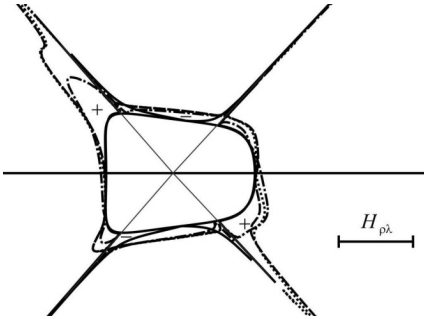

Рис. 5. Епюри розподілу зусиль $H_{\rho\lambda}$

З отриманих результатів випливає, що збільшення жорсткості підсилень призводить до зменшення кільцевих і крутних зусиль на контурі отвору та зростання нормальних і дотичних моментів на ділянках підсилення. Поблизу торців підсилень всі моментні напруження необмежено зростають. При невеликих зонах підсилення взаємовплив ребер незначний.

1. Сяський А. Основні інтегральні співвідношення в технічній теорії згину пластин з отворами/ А. Сяський, С. Гаврюсев // Вісник Тернопільського державного технічного університету, 2006. Т. 11, № 1. – С. 12-17. **2.** Сяський А. А. Упругое равновесие пластинки с частично подкрепленным криволинейным отверстием/ Сяський А. А. // Прикл. математика и механика. – 1986. Т. 50, № 2. – С. 247-254. **3.** Сяський А. А. Изгиб анизотропных пластин с криволинейными ребрами жест кости /А. А. Сяський. – Ровно, 1988. – 14с. – Деп. в УкрНИИНТИ 19.01.1989, № 352-Ук 89. **4.** Сяський А. Напружений стан пластинки з частково підсиленим криволінійним контуром при її циліндричному згині / А. Сяський, В. Кот // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – 2011. – Т. 16, № 2. – С. 30-36. **5.** Сяський А. О. Передача сил до масивних циліндричних тіл через несиметричні розімкнені ребра змінної жорсткості / А. О. Сяський, Н. В. Шевцова // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник за напрямком «Інженерна механіка». – Луцьк, 2008. – Випуск 23. – С. 345-351. **6.** Шевцова Н. Передача сил і пар сил до циліндричних тіл через систему несиметричних тонкостінних елементів змінної жорсткості/ Н. Шевцова, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – Т. 13, № 3. – С. 15-20.

Рецензент: д.т.н., професор Власюк А. П. (НУВГП)