



## МЕТОДИКА ОЦІНКИ НАДІЙНОСТІ ЗАЛІЗОБЕТОННИХ БАЛОК, ПІДСИЛЕНИХ ЗАЛІЗОБЕТОННОЮ ОБОЙМОЮ

### THE METHOD OF RELIABILITY EVALUATION OF REINFORCED CONCRETE BEAMS, STRENGTHENED BY REINFORCED CONCRETE JACKET

Титаренко Р.Ю., асп., Хміль Р.Є., к.т.н., доц. (Національний університет  
«Львівська політехніка», м. Львів)

Tytarenko R. Yu., postgraduate student, <https://orcid.org/0000-0002-4550-6422>  
(Lviv Polytechnic National University, Lviv), Khmil R. Ye., candidate of  
technical sciences, Associate Professor, <https://orcid.org/0000-0001-7578-8750>  
(Lviv Polytechnic National University, Lviv)

Розроблено принципову методику оцінки надійності прямокутних залізобетонних балок, підсилені залізобетонною обоймою при дії навантаження. Запропоновано ряд контрольованих стохастичних параметрів резерву несучої здатності, а також рівня навантаження таких конструкцій в момент підсилення.

The technical literature (scientific articles, normative documents, manuals and recommendations) on the topic of theoretical research is analyzed and, on the basis of this analysis, the problems, which are not sufficiently studied as of today, are highlighted.

On the basis of the calculated model of normal cross section according to engineering methodology, adaptation of the existing methodology of reliability design and also using the fundamental thesis of probability theory, including the recommendations of its use for building constructions, the principal methodology of reliability evaluation (for determining the quantitative indices of reliability) of rectangular reinforced concrete (RC) beams, strengthened by RC jacket under loading, which simulating the real conditions of reconstruction, is developed.

According to the developed method, the number of controlled stochastic parameters of reserve of load capacity of RC beams after strengthening, is proposed. Among them are the following: compressive strength of concrete of existing beam and strengthening jacket, tensile strength and compressive strength of reinforcing bars (variability of strength parameters); dimensions of main and additional cross section (variability of geometric parameters). Additionally, the number of controlled stochastic parameters of acting loading level of RC beam at the moment of strengthening, is also proposed (variability



## of the coefficients of use of cross sections of reinforcing bars and concrete of strengthening jacket).

### Ключові слова:

Залізобетон, балка, підсилення, обойма, навантаження, стохастичність, ймовірність, безвідмовність, надійність, методика.

Reinforced concrete (RC), beam, strengthening, jacket, load, stochasticity, probability, failure-free, reliability, method.

**Вступ.** Станом на сьогоднішній день ймовірнісні методи розрахунку залізобетонних конструкцій стають все більш поширеними, адже дозволяють призначати гарантований рівень надійності того чи іншого конструктивного елемента на стадії проектування – у вигляді показника ймовірності безвідмовної роботи (кількісна оцінка надійності). Беручи до уваги той факт, що нині у світі також фіксується збільшення обсягів робіт із реконструкції (при цьому враховуючи фактори ефективності та економічності методів підсилення), а також продовжується робота з адаптації норм [1] в Україні, проблема оцінки надійності підсилених залізобетонних конструкцій, зокрема залізобетонною обоймою, набуває все більшого значення.

**Аналіз останніх досліджень.** Враховуючи суб'єктивність при підборі критеріїв забезпечення надійності, складність побудови математичних апаратів її розрахунку, а також контролю стохастичних параметрів резерву несучої здатності конструкцій, надійність згинаних залізобетонних елементів, підсилених при дії навантаження, стала предметом досліджень у світі відносно недавно – з кінця ХХ століття. При цьому лише в окремих роботах [2–5] було враховано фактор навантаження при підсиленні, а проблему розрахунку та оцінки надійності конструкцій, підсилених залізобетонною обоймою, на даний час, не було розроблено в принципі.

Приведені вище дослідження стосувались оцінки надійності конструкцій, підсилених при дії навантаження вуглепластиковим армуванням і в них було зафіксовано ряд очевидних недоліків, таких як здійснення об'ємних математичних розрахунків, використання законів розподілу випадкових параметрів, які не повністю відображають роботу саме будівельних конструкцій, а також, що головне, значний розкид отриманих коефіцієнтів безпеки (що не дозволяє використовувати отримані там результати в практиці проектування).

Тому пряма відсутність вивчення проблеми кількісної оцінки надійності залізобетонних згинаних елементів, підсилених залізобетонною обоймою при дії навантаження обумовлює проведення досліджень в цьому напрямку, в тому числі, розроблення принципової методики оцінки надійності.

**Постановка мети і задач теоретичного дослідження.** Метою теоретичного дослідження є розроблення принципової методики оцінки надійності прямокутних залізобетонних балок, підсилених залізобетонною

обоймою при дії навантаження, яка б відображала фактичні експлуатаційні умови роботи конструкції.

Досягнення поставленої мети передбачає виконання суміжних задач:

- включити в алгоритм розрахунку надійності стохастичні міцнісні та геометричні параметри резерву несучої здатності балки після підсилення;
- включити в алгоритм розрахунку надійності стохастичні параметри рівня діючого навантаження в момент підсилення.

Разом з тим припускаємо, що вищенаведені випадкові параметри є взаємнезалежні, а їх розподіл підлягає нормальному закону.

**Методика теоретичного дослідження.** Розробку принципової методики оцінки надійності ведемо на основі розрахункової моделі нормального перерізу відповідно до норм [6], а також адаптації до залізобетонних конструкцій методики [7]. При цьому використаємо загальновідомі положення теорії ймовірностей [8] та рекомендації їх застосування до будівельних конструкцій [9].

Отже, випадкове значення граничного згинального моменту  $\tilde{M}_{ult}$ , що сприймається балкою, підсиленою залізобетонною обоймою при дії навантаження, враховуючи наявність стиснутої арматури у верхній зоні основного перерізу конструкції (при збереженні умови  $\xi \leq \xi_R$ ), запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ult} &= f(\tilde{\sigma}_c, \tilde{\sigma}_{c,add}, \tilde{\sigma}_s, \tilde{\sigma}_{s,add}, \tilde{\sigma}_{sc}, \tilde{b}, \tilde{b}_{add}, \tilde{d}'_{red}, \tilde{h}'_{add}, \tilde{\gamma}_{c,dis}^{add}, \tilde{\gamma}_{s,dis}^{add}) = \\ &= (\tilde{\sigma}_c \tilde{b} + 2\tilde{\sigma}_{c,add} \tilde{b}_{add} \tilde{\gamma}_{c,dis}^{add}) (\tilde{x} - \tilde{h}'_{add}) (\tilde{d}'_{red} + 0,5\tilde{h}'_{add} - 0,5\tilde{x}) + \\ &+ \tilde{\sigma}_{c,add} (\tilde{b} + 2\tilde{b}_{add}) \tilde{h}'_{add} \tilde{\gamma}_{c,dis}^{add} (\tilde{d}'_{red} + 0,5\tilde{h}'_{add}) + \tilde{\sigma}_{sc} A'_s (\tilde{d}'_{red} - a'), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\tilde{\sigma}_c$ ,  $\tilde{\sigma}_{c,add}$  – випадкові значення опору бетону на стиск, розташованого в існуючій балці та обоймі підсилення відповідно (для першої групи граничних станів);  $\tilde{b}$ ,  $2\tilde{b}_{add}$  – випадкові значення ширини основного та додаткового перерізу відповідно (рис. 1);  $\tilde{\gamma}_{c,dis}^{add}$  – випадкове значення коефіцієнту використання перерізу бетону обойми підсилення (залежить від рівня навантаження на балку до підсилення);  $\tilde{h}'_{add}$  – випадкове значення висоти додаткового перерізу над верхньою стиснутою гранню основного перерізу (рис. 1);  $\tilde{d}'_{red}$  – випадкове значення приведенної відстані від верхньої стиснутої грані основного перерізу до центру ваги всієї розтягнутої арматури балки після підсилення (рис. 1);  $\tilde{\sigma}_{sc}$  – випадкове значення опору стрижневої арматури на стиск, розташованої в існуючій балці;  $A'_s$  – площа

перерізу стиснутої арматури існуючої балки (рис. 1);  $a'$  – відстань від центру ваги стиснутої арматури до верхньої стиснутої грані бетону існуючої балки (рис. 1);  $\tilde{x}$  – випадкове значення висоти стиснутої зони перерізу балки після підсилення (рис. 1), яке в даному випадку знайдемо за формулою:

$$\tilde{x} = \frac{\sigma_s A_s + \sigma_{s,add} A_{s,add} \tilde{\gamma}_{s,dis}^{add} - \sigma_{sc} A'_s}{\sigma_c \tilde{b} + 2\sigma_{c,add} \tilde{b}_{add} \tilde{\gamma}_{c,dis}^{add}} - \frac{\tilde{\sigma}_{c,add} (\tilde{b} + 2\tilde{b}_{add}) \tilde{h}'_{add} \tilde{\gamma}_{c,dis}^{add}}{\tilde{\sigma}_c \tilde{b} + 2\tilde{\sigma}_{c,add} \tilde{b}_{add} \tilde{\gamma}_{c,dis}^{add}} + \tilde{h}'_{add}, \quad (2)$$

де  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{s,add}$  – випадкові значення опору стрижневої арматури на розтяг, розташованої в існуючій балці та обойми підсилення відповідно;  $A_s$ ,  $A_{s,add}$  – площі перерізу розтягнутої арматури існуючої балки та обойми підсилення відповідно (рис. 1);  $\tilde{\gamma}_{s,dis}^{add}$  – випадкове значення коефіцієнту використання перерізу арматури обойми підсилення (залежить від рівня навантаження на балку до підсилення).

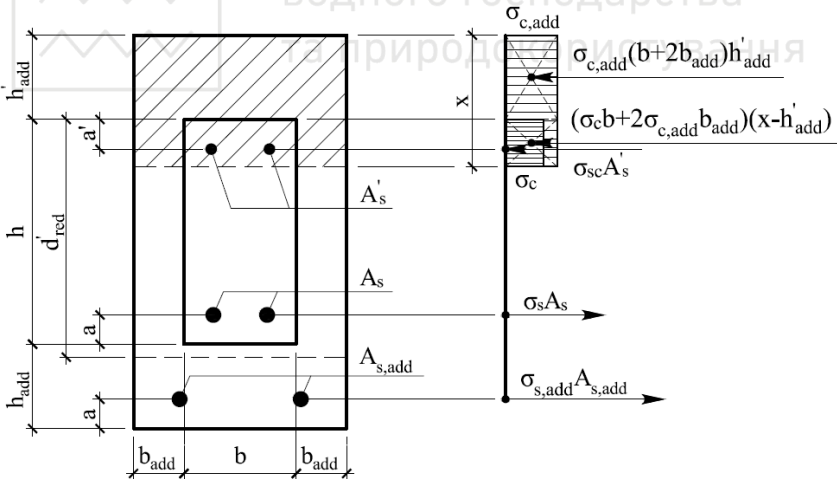


Рис. 1. Схема діючих зусиль і опора напружень в нормальному перерізі балки, підсиленої залізобетонною обоймою

Підставивши вираз (2) для  $\tilde{x}$  в формулу (1) для  $\tilde{M}_{ult}$ , з подальшим поетапним спрощенням, отримаємо:



$$\begin{aligned}
 & \bar{M}_{ult} = (\bar{\sigma}_s A_s + \bar{\sigma}_{s,add} A_{s,add} \gamma_{s,dis}^{add}) \bar{d}'_{red} - \bar{\sigma}_{sc} A'_s a' + \\
 & + \bar{\sigma}_{c,add} \bar{h}'_{add}{}^2 (0,5 \bar{b} + \bar{b}_{add}) \gamma_{c,dis}^{add} - \frac{0,5}{\bar{\sigma}_c \bar{b} + 2 \bar{\sigma}_{c,add} \bar{b}_{add} \gamma_{c,dis}^{add}} \times \\
 & \times \left[ \bar{\sigma}_s^2 A_s^2 + \bar{\sigma}_{s,add}^2 A_{s,add}^2 \gamma_{s,dis}^{add}{}^2 + \bar{\sigma}_{sc}^2 A_s'^2 + \bar{\sigma}_{c,add}^2 \bar{h}'_{add}{}^2 \gamma_{c,dis}^{add}{}^2 \times \right. \\
 & \quad \left. \times (\bar{b}^2 + 4 \bar{b} \bar{b}_{add} + 4 \bar{b}_{add}^2) \right] - \\
 & - \frac{\bar{\sigma}_{s,add} A_{s,add} \gamma_{s,dis}^{add} (\bar{\sigma}_s A_s - \bar{\sigma}_{sc} A'_s) - \bar{\sigma}_s A_s \bar{\sigma}_{sc} A'_s}{\bar{\sigma}_c \bar{b} + 2 \bar{\sigma}_{c,add} \bar{b}_{add} \gamma_{c,dis}^{add}} + \\
 & + \frac{\bar{\sigma}_{c,add} (\bar{b} + 2 \bar{b}_{add}) \bar{h}'_{add} \gamma_{c,dis}^{add} (\bar{\sigma}_s A_s + \bar{\sigma}_{s,add} A_{s,add} \gamma_{s,dis}^{add} - \bar{\sigma}_{sc} A'_s)}{\bar{\sigma}_c \bar{b} + 2 \bar{\sigma}_{c,add} \bar{b}_{add} \gamma_{c,dis}^{add}}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

Математичне сподівання граничного згинального моменту  $\bar{M}_{ult}$  одержимо, підставивши в отриманий вище спрощений вираз (3) математичні сподівання випадкових аргументів.

Для знаходження стандарту граничного згинального моменту підсиленої балки  $\bar{M}_{ult}$  визначаємо коефіцієнти  $D_{\sigma_c}$ ,  $D_{\sigma_{c,add}}$ ,  $D_{\sigma_s}$ ,  $D_{\sigma_{s,add}}$ ,  $D_{\sigma_{sc}}$ ,  $D_{\gamma_{c,dis}^{add}}$ ,  $D_{\gamma_{s,dis}^{add}}$ ,  $D_b$ ,  $D_{b_{add}}$ ,  $D_{d'_{red}}$ ,  $D_{h'_{add}}$  – у вигляді часткових похідних функції  $\bar{M}_{ult} = f(x_1, \dots, x_n)$  за змінними  $x_1, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned}
 D_{\sigma_c} &= \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \sigma_c}; \quad D_{\sigma_{c,add}} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \sigma_{c,add}}; \quad D_{\sigma_s} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \sigma_s}; \quad D_{\sigma_{s,add}} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \sigma_{s,add}}; \\
 D_{\sigma_{sc}} &= \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \sigma_{sc}}; \quad D_{\gamma_{c,dis}^{add}} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \gamma_{c,dis}^{add}}; \quad D_{\gamma_{s,dis}^{add}} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial \gamma_{s,dis}^{add}}; \quad D_b = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial b}; \\
 D_{b_{add}} &= \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial b_{add}}; \quad D_{d'_{red}} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial d'_{red}}; \quad D_{h'_{add}} = \frac{\partial \bar{M}_{ult}}{\partial h'_{add}}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

де  $\bar{\sigma}_c$ ,  $\bar{\sigma}_{c,add}$ ,  $\bar{\sigma}_s$ ,  $\bar{\sigma}_{s,add}$ ,  $\bar{\sigma}_{sc}$ ,  $\gamma_{c,dis}^{add}$ ,  $\gamma_{s,dis}^{add}$  – математичні сподівання параметрів міцності матеріалів й рівня навантаження;  $\bar{b}$ ,  $\bar{b}_{add}$ ,  $\bar{d}'_{red}$ ,  $\bar{h}'_{add}$  – математичні сподівання параметрів геометрії перерізу після підсилення.



Далі запишемо вираз для знаходження стандарту граничного згинального моменту  $\hat{M}_{ult}$ :

$$\hat{M}_{ult} = \sqrt{D_{\sigma_c}^2 \sigma_c^2 + D_{\sigma_{c,add}}^2 \sigma_{c,add}^2 + D_{\sigma_s}^2 \sigma_s^2 + D_{\sigma_{s,add}}^2 \sigma_{s,add}^2 + D_{\sigma_{sc}}^2 \sigma_{sc}^2 + D_{\gamma_{c,dis}^{add}}^2 \gamma_{c,dis}^{add 2} + D_{\gamma_{s,dis}^{add}}^2 \gamma_{s,dis}^{add 2} + D_b^2 \hat{b}^2 + D_{b,add}^2 \hat{b}_{add}^2 + D_{d'_{red}}^2 \hat{d}'_{red}^2 + D_{h'_{add}}^2 \hat{h}'_{add}^2}, \quad (5)$$

де  $\sigma_c$ ,  $\sigma_{c,add}$ ,  $\sigma_s$ ,  $\sigma_{s,add}$ ,  $\sigma_{sc}$ ,  $\sigma_{\gamma_{c,dis}^{add}}$ ,  $\sigma_{\gamma_{s,dis}^{add}}$ ,  $\hat{b}$ ,  $\hat{b}_{add}$ ,  $\hat{b}'_{red}$ ,  $\hat{h}'_{add}$  – стандарти змінних  $x_1, \dots, x_n$ .

Для оцінки надійності балки після підсилення обчислюємо індекс надійності  $\beta$ :

$$\beta = \frac{\bar{M}_{ult} - M_{ult}}{\hat{M}_{ult}}, \quad (6)$$

де  $M_{ult}$  – розрахункова несуча здатність нормального перерізу підсиленої балки.

Насамкінець, на основі індексу надійності  $\beta$ , кількісну оцінку надійності конструкції – у вигляді показника ймовірності її безвідмовної роботи  $P(\beta)$  – встановлюємо за допомогою функції помилок (функції Лапласа)  $\Phi(\beta)$ :

$$P(\beta) = 0,5 + \Phi(\beta). \quad (7)$$

**Висновки.** Розроблено принципову методику оцінки надійності прямокутних залізобетонних балок, підсилених залізобетонною обоймою при дії навантаження. Дана методика дозволяє оперувати стохастичними міцнісними (бетон, арматурна сталь існуючої балки і обоями підсилення) й геометричними (основний, додатковий поперечний переріз) параметрами резерву несучої здатності, а також рівня навантаження таких конструкцій в момент підсилення (коефіцієнти використання перерізів арматури та бетону обоями підсилення).

1. Eurocode EN 1990:2002. Basis of structural design. Brussels: European Committee for Standardization (CEN), 2002. 87 p.
2. Alsayed S. H., Siddiqui N. A. Reliability of shear-deficient RC beams strengthened with CFRP-strips // Construction and Building Materials. 2013. V. 42. P. 238–247.



3. Wang N. Y., Ellingwood B. R., Zureick A. H. Reliability-Based Evaluation of Flexural Members Strengthened with Externally Bonded Fiber-Reinforced Polymer Composites // Journal of Structural Engineering-ASCE. 2010. V. 136. P. 1151–1160.

4. Trentin C., Casas J. R. Safety factors for CFRP strengthening in bending of reinforced concrete bridges // Composite Structures. 2015. V. 128. P. 188–198.

5. Lima J. L., Barros J. A. Reliability analysis of shear strengthening externally bonded FRP models // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. 2011. V. 164. P. 43–56.

6. СНиП 2.03.01-84\*. Бетонные и железобетонные конструкции. М.: Госстрой СССР, 1989. 80 с.

7. Пичугин С. Ф. Надежность стальных конструкций производственных зданий: монография. М.: Изд-во АСВ, 2011. 456 с.

8. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Высшая школа. М., 2001. 575 с.

9. Лычев, А. С. Надежность строительных конструкций: учеб. пособ. М.: Изд-во АСВ, 2008. 184 с.

1. Eurocode: Basis of structural design. EN 1990:2002 (2002). Brussels: European Committee for Standardization (CEN), 87.

2. Alsayed, S. H., Siddiqui, N. A. (2013). Reliability of shear-deficient RC beams strengthened with CFRP-strips. Construction and Building Materials, 42, 238 – 247.

3. Wang, N. Y., Ellingwood, B. R., Zureick, A. H. (2010). Reliability-Based Evaluation of Flexural Members Strengthened with Externally Bonded Fiber-Reinforced Polymer Composites. Journal of Structural Engineering-ASCE, 136, 1151–1160.

4. Trentin, C., Casas, J. R. (2015). Safety factors for CFRP strengthening in bending of reinforced concrete bridges. Composite Structures, 128, 188–198. 5. Lima, J. L., Barros, J. A. (2011). Reliability analysis of shear strengthening externally bonded FRP models. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings, 164, 43–56.

6. СНиП 2.03.01-84\*. Бетонные и железобетонные конструкции (1989). М.: Госстрой СССР, 80.

7. Пичугин, С. Ф. (2011). Надежность стальных конструкций производственных зданий: Монография. М.: Изд-во АСВ, 456.

8. Вентцель, Е. С. (2001). Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 575.

9. Лычев, А. С. (2008). Надежность строительных конструкций: Учебное пособие. М.: Изд-во АСВ, 184.