Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та природокористування
Навчально-науковий інститут автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки

Кафедра вищої математики

04-02-48М

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни **«Вища математика»** для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за *освітньо-професійними програмами*: «Фінанси, банківська справа та страхування», «Міжнародний бізнес», «Облік і оподаткування», «Маркетинг», «Менеджмент», «Економіка підприємства», «Управління персоналом і економіка праці», «Економічна кібернетика», «Управління інформаційними комунікаціями», «Публічне управління та адміністрування» *спеціальностей*: 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 292 «Міжнародні економічні відносини», 071 «Облік і оподаткування», 075 «Маркетинг», 073 «Менеджмент», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», 051 «Економіка», 029 «Інформаційна, бібліотечна та архівна справа», 281 «Публічне управління та адміністрування»
денної та заочної форм навчання
Частина 1

Рекомендовано науково-методичною радою
з якості ННІЕМ
Протокол № 1 від 04.01.2021 р.

Рівне – 2021

Методичні вказівки до самостійної роботи та підготовки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за *освітньо-професійними програмами*: «Фінанси, банківська справа та страхування», «Міжнародний бізнес», «Облік і оподаткування», «Маркетинг», «Менеджмент», «Економіка підприємства», «Управління персоналом і економіка праці», «Економічна кібернетика», «Управління інформаційними комунікаціями», «Публічне управління та адміністрування» *спеціальностей*: 072 «Фінанси, банківська справа та страхування», 292 «Міжнародні економічні відносини», 071 «Облік і оподаткування», 075 «Маркетинг», 073 «Менеджмент», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність», 051 «Економіка», 029 «Інформаційна, бібліотечна та архівна справа», 281 «Публічне управління та адміністрування» денної та заочної форм навчання. Частина 1 [Електронне видання] / Цецик С. П., Самолюк І. В. – Рівне : НУВГП, 2021. – 62 с.

Укладачі: Цецик С. П, к.п.н, доцент кафедри вищої математики;
Самолюк І. В., асистент кафедри вищої математики.

Відповідальний за випуск:
Тадеєв П. О., к.фіз.-мат.н., д.п.н., професор, завідувач кафедри вищої математики.

Керівники груп забезпечення:

072, Мельник Л. М., к.е.н., доцент кафедри фінансів та економіки природокористування;
292, Качан О. І., к.е.н., доцент кафедри економіки підприємства і міжнародного бізнесу;
071, Позняковська Н. М., к.е.н., завідувач кафедри обліку і аудиту;
075, Попко О. В., к.е.н., доцент кафедри маркетингу;
073, Кожушко Л. Ф., д.т.н., професор, завідувач кафедри менеджменту;
076, Кушнір Н. Б., к.е.н., доцент кафедри економіки підприємства і міжнародного бізнесу;
051, Юрчик Г. М., к.е.н., доцент кафедри трудових ресурсів і підприємництва;
051, Грицюк П. М., д.е.н.,завідувач кафедри комп'ютерних технологій та економічної кібернетики;
029, Цецик Я. П, к.і.н., доцент кафедри державного управління документознавства та інформаційної діяльності;
281, Антонова С. Є., к.е.н., доцент кафедри державного управління документознавства та інформаційної діяльності.

© Цецик С. П., Самолюк І. В., 2021
© НУВГП, 2021

ЗМІСТ

Вступ

Мета навчальної дисципліни «Вища математика» – формування системи теоретичних знань і практичних навичок з основ математичного апарату.

Завдання навчальної дисципліни «Вища математика» – вивчення основних принципів та інструментарію математичного апарату, який використовується для розв’язування задач за фахом.

У результаті вивчення даного курсу студент повинен:

знати: правила аналітичних перетворень, методи розв’язання математичних задач; означення основних математичних понять; формулювання та доведення основних теорем; основні властивості математичних об'єктів та можливості їх застосування до розв’язання конкретних економічних задач;

уміти: використовувати набуті математичні знання для розв'язання економічних задач; розв'язувати типові математичні задачі з доведенням їх до практичного прийнятного результату з використанням різних обчислювальних засобів; аналізувати одержані результати та на їх основі розробляти практичні рекомендації; самостійно вивчати навчальну літературу з математики.

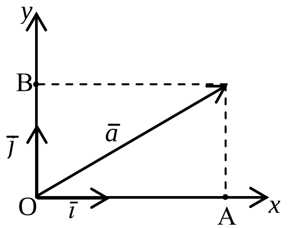
У методичних рекомендаціях подано кроткі теоретичні відомості, необхідні для розв’язання задач з чотирьох розділів курсу вищої математики: «Елементи лінійної і векторної алгебри», «Елементи аналітичної геометрії», «Вступ до математичного аналізу», «Диференціальне числення функції однієї змінної». Вони представлені у вигляді таблиць, що сприяє систематизації й узагальненню знань з навчального предмету.

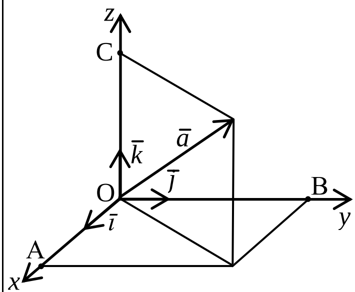
Також наведено приклади розв’язання типових задач, що виносяться на модульні роботи. Для закріплення здобутих студентами знань і формування навичок розв’язання задач, наведено завдання для самоконтролю та самостійної роботи.

Короткі теоретичні відомості

Елементи лінійної алгебри та аналітичної геометрії

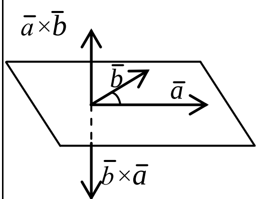
Назва	Формули та позначення
Визначник 2-го порядку	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
Визначник 3-го порядку	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$ $+ a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$
Визначник 3-го порядку у вигляді розкладу його за елементами першого рядка	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$	Формули Крамера $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$ де $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0;\ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$ $\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix};\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

<table>
<tr><th colspan="2">Розклад вектора за базисом</th></tr>
<tr><th>Алгебраїчний запис</th><th>Геометрична ілюстрація</th></tr>
<tr><td>$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$</td><td>

$x=OA=$ пр$_{Ox}\,\bar{a}$,
$y=OB=$ пр$_{Oy}\,\bar{a}$</td></tr>
<tr><td>$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$</td><td>

$x=OA=$ пр$_{Ox}\,\bar{a}$,
$y=OB=$ пр$_{Oy}\,\bar{a}$,
$z=OC=$ пр$_{Oz}\,\bar{a}$
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти</td></tr>
</table>

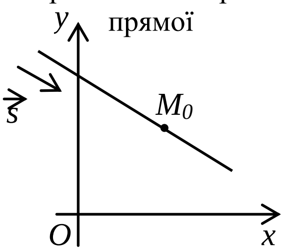
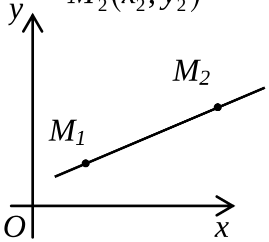
Лінійні операції над векторами, заданими в координатній формі	
Назва операції	**Виконання операції**
Додавання векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$	$\vec{a} + \vec{b} = (x_1; y_1; z_1) + (x_2; y_2; z_2) = = (x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2)$
Віднімання векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$	$\vec{a} - \vec{b} = (x_1; y_1; z_1) - (x_2; y_2; z_2) = = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2)$
Множення вектора $\vec{a}$ на скаляр λ	$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1; y_1; z_1) = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$
Лінійна комбінація векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$	$\lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} = \lambda_1(x_1; y_1; z_1) + \lambda_2(x_2; y_2; z_2) = = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2; \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)$

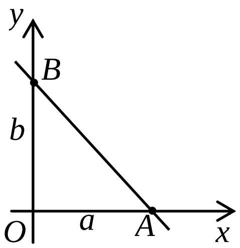
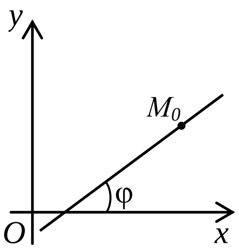
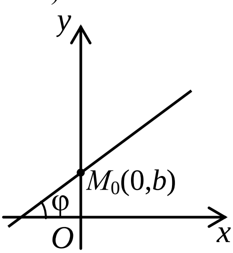
<table>
<tr><td colspan="4">Основні види добутків векторів
$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$; $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$; $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$</td></tr>
<tr><td>Назва і позначення</td><td>Означення</td><td>Координатна форма</td><td>Резуль-тат</td></tr>
<tr><td>Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$:
$\vec{a}\cdot\vec{b}$</td><td>$\vec{a}\cdot\vec{b}$
$=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})$
або
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert np_{\vec{a}}\vec{b}=$
$=\lvert\vec{b}\rvert np_{\vec{b}}\vec{a}$</td><td>$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$</td><td>число</td></tr>
<tr><td>Векторний добуток:
$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$</td><td>1. $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}$;
2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - права трійка;

3. $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})$</td><td>$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}$
або
$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\vec{i}-$
$-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\vec{k}$</td><td>вектор</td></tr>
<tr><td>Мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:
$\vec{a}\vec{b}\vec{c}$</td><td>$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$</td><td>$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}$</td><td>число</td></tr>
</table>

Основні формули векторної алгебри, які використовують для обчислення геометричних величин $\left(\vec{a}=(x_1;y_1;z_1),\ \vec{b}=(x_2;y_2;z_2),\ \vec{c}=(x_3;y_3;z_3)\right)$		
Назва	**Векторна форма**	**Координатна форма**
1	2	3
Довжина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{\vec{a}^2}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$
Орт вектора $\vec{a}$	$\vec{a}^0=\dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$	$\vec{a}^0=\left(\dfrac{x_1}{\lvert\vec{a}\rvert};\dfrac{y_1}{\lvert\vec{a}\rvert};\dfrac{z_1}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$
Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$	$\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{i}}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\beta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{j}}{\lvert\vec{a}\rvert}$, $\cos\gamma=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{k}}{\lvert\vec{a}\rvert}$ $(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+$ $+\cos^2\gamma=1)$	$\cos\alpha=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$
Косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$	$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=$ $=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$
Площа трикутника ABC	$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$, де $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$	$S_{\Delta ABC}=$ $=\dfrac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}^2}$

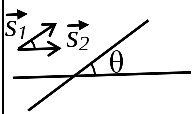
1	2	3
Об’єм трикутної піраміди *SABC*	$V_{nip} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$ $(\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AC},$ $\vec{c} = \overrightarrow{AS}\ )$	$V_{nip} = \frac{1}{6}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Елементи аналітичної геометрії

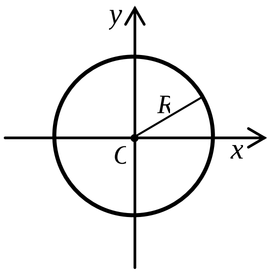
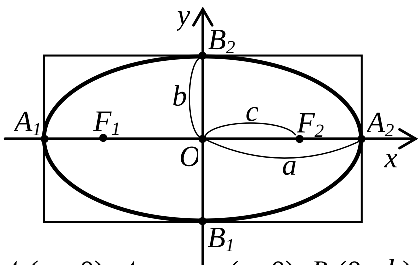
Види рівнянь прямої на площині		
Вихідні дані	**Вид рівняння**	**Назва рівняння**
1	2	3
$M_0(x_0;y_0)$– точка прямої; $\vec{s} = (m;n)$ – напрямний вектор прямої 	$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$ $\begin{cases} x = x_0 + tm; \\ y = y_0 + tn, \end{cases}$ $-\infty < t < +\infty$ $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$	Векторне рівняння прямої Параметричні рівняння прямої Канонічне рівняння прямої
Дві точки прямої $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ 	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Рівняння прямої, що проходить через дві точки

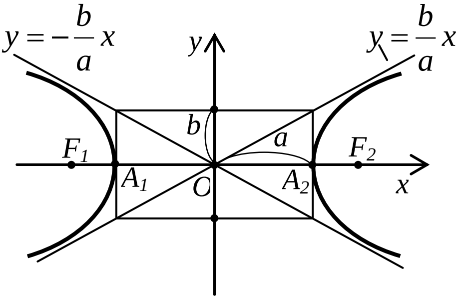
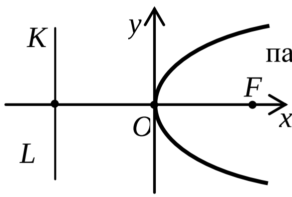
1	2	3
 Точки $A(a;0)$ і $B(0;b)$ прямої розміщені на координатних осях	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	Рівняння прямої у відрізках на осях
Точка $M_0(x_0;y_0)$ прямої; кут φ, який утворює пряма з додатним напрямом осі *OX* а)  б) 	а) $y-y_0=k(x-x_0)$, $k=\mathrm{tg}\varphi$ б) $y=kx+b$, $k=\mathrm{tg}\varphi$	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

1	2	3
Точка $M_0(x_0;y_0)$ прямої; вектор $\vec{n}$ =*(A;B)*, перпендикулярний до прямої	$A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)=0$	Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до вектора $\vec{n}$
	$Ax+By+C=0$	Загальне рівняння прямої

Взаємне розміщення двох прямих на площині			
Вихідні дані	**Кут між прямими**	**Умова паралельності прямих**	**Умова перпендикуляр-ності прямих**
1	2	3	4
$\vec{s}_1=(m_1;n_1)$, $\vec{s}_2=(m_2;n_2)$ - напрямні вектори прямих 	$\cos\theta=\dfrac{\lvert\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\rvert}{\lvert\vec{s}_1\rvert\lvert\vec{s}_2\rvert}=$ $=\dfrac{\lvert m_1m_2+n_1n_2\rvert}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}$	$\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$	$\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$ <=> $m_1m_2+n_1n_2=0$
$\vec{n}_1=(A_1;B_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2)$ - вектори нормалей прямих	$\cos\theta=\dfrac{\lvert\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2\rvert}{\lvert\vec{n}_1\rvert\lvert\vec{n}_2\rvert}=$ $=\dfrac{\lvert A_1A_2+B_1B_2\rvert}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$	$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$ <=> $A_1A_2+B_1B_2=0$

1	2	3	4
k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих	$\operatorname{tg}\ \theta = \left\lvert \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right\rvert$ $k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1,$ $k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2$	$k_1 = k_2$	$k_1 k_2 = -1$

Канонічні рівняння кривих другого порядку		
Назва кривої	**Геометричне зображення у прямокутній системі координат і основні характеристики кривої**	**Канонічне рівняння кривої та основні залежності між параметрами**
1	2	3
Коло	 O – центр кола; R – радіус кола.	$x^2 + y^2 = R^2,$ R - радіус
Еліпс	 $A_1(-a;\ 0)$, A_2 $(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$, $B_2\ (0; b)$ – вершини еліпса; $F_1\ (-c;\ 0)$, $F_2\ (c;\ 0)$ – фокуси еліпса	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$ a – велика піввісь; b – мала піввісь ($b<a$); c – фокальна піввісь; $c^2=a^2-b^2$; ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a},\ 0 < \varepsilon < 1;$

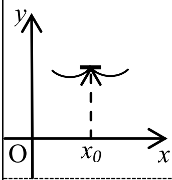
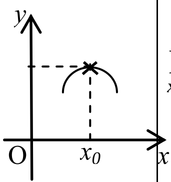
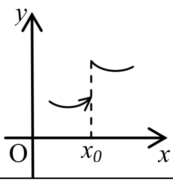
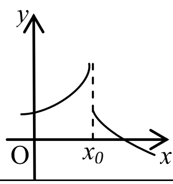
1	2	3
Гіпербо ла	 $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$– вершини гіперболи; F_1 (-с; 0), F_2 (c; 0) – фокуси гіперболи	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, a – дійсна піввісь; b – уявна піввісь; c – фокальна піввісь; $c^2=a^2+b^2$; ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $\varepsilon>1$; рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x$
Парабол а	 O (0;0) – вершини параболи; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ - фокус параболи; KL – директриса параболи	$y^2=2px$, $p=FL$ – параметр параболи; ексцентриситет $\varepsilon=1$; рівняння директриси: $x=-\frac{p}{2}$

Основні теореми про границі	
Якщо існують $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$, то мають місце теореми:	**Аналітичний запис**
Границя алгебраїчної суми двох (скінченної кількості) функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій.	$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\pm\varphi(x)\big)= =\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$
Границя добутку двох (скінченної кількості) функцій дорівнює добутку границь цих функцій.	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))= =\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$
Границя частки двох (скінченної кількості) функцій дорівнює частці границь цих функцій за умови, що границя дільника не дорівнює нулеві	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\neq 0$
Сталий множник можна виносити за знак границі.	$\lim\limits_{x\to a} kf(x)=k\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $(k=const)$
Границя цілого додатного степеня функції дорівнює тому ж степеню границі функції.	$\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)\big)^n=\Big(\lim\limits_{x\to a} f(x)\Big)^n$

Визначні границі та їх наслідки	
Назва	**Аналітичний запис**
Перша визначна границя	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
Наслідки	1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k,\ k\neq 0.$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}x}{x}=1.$ 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{tg}kx}{x}=k,\ k\neq 0.$ 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1.$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{arctg}x}{x}=1.$
Друга визначна границя	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e,$ де $e=2{,}718281\ldots$
Наслідки	1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$ 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}.$

Неперервність функції в точці	
Назва поняття	**Означення**
1	2
x_0 – точка неперервності функції $f(x)$	1. $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі. 2. Існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
	3. Виконується рівність

	$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.
x_0 – точка розриву функції $f(x)$	Не виконується одна з умов 1-3.

Класифікація точок розриву функції	
Назва	**Означення**
x_0 – точка розриву першого роду: а) усувний розрив   	$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, але $f(x_0)$ невизначена або $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
б) неусувний розрив (розрив типу „стрибка”)  	$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, але обидві границі скінченні
x_0 – точка розриву другого роду  	Хоча б одна з границь $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ не існує або дорівнює нескінченності.

Назва поняття, позначення	Означення	Аналітичний запис
Похідна функції *y=f(x)* в точці *x* (похідна першого порядку); $y', f'(x), y'_x$, $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$	Похідною функції *y=f(x)* в точці *x* називається границя відношення приросту функції Δy в цій точці до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.	$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Диференціальне числення функції однієї змінної

Правила диференціювання

Нехай *u(x)* та *v(x)* – деякі диференційовні функції, *c*- стала, тоді:

1. $c' = 0$;
2. $(x)' = 1$;
3. $(cu)' = cu'$;
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
5. $(uv)' = u'v + uv'$;
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$;
7. $\left(\dfrac{u}{c}\right)' = \dfrac{u'}{c}$;
8. $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}, \ v \neq 0$;

Правило диференціювання складеної функції.

Якщо *y=f(u)* і *u=u(x),* тобто *y=f(u(x)),* де функції *f* і *u* – мають похідні, то $y'_x = f'_u \cdot u'_x$.

Таблиця похідних	
елементарних функцій	*складеної диференційовної функції* $u=u(x)$
1. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1};$	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u';$
2. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}};$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$
3. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2};$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u';$
4. $(a^x)' = a^x \ln a;$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$
5. $(e^x)' = e^x;$	$(e^u)' = e^u \cdot u';$
6. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u';$
7. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u';$
1	*2*
8. $(\sin x)' = \cos x;$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
9. $(\cos x)' = -\sin x;$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
10. $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x;}$	$(\mathrm{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
11. $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$	$(\mathrm{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
12. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
13. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$
14. $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$	$(\mathrm{arctg} u)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u';$
15. $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2};$	$(\mathrm{arcctg} u)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'.$

Таблиця диференціалів Нехай *u=u(x)* – диференційовна функція, тоді:	
1	2
1. $d(u^{\alpha}) = \alpha u^{\alpha-1}du;$	9. $d(\cos u) = -\sin u du;$
2. $d\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}du;$	10. $d(\mathrm{tg}u) = \frac{du}{\cos^2 u};$
3. $d(\sqrt{u}) = \frac{du}{2\sqrt{u}};$	11. $d(\mathrm{ctg}u) = -\frac{du}{\sin^2 u};$
4. $d(a^u) = a^u \ln a du;$	12. $d(\arcsin u) = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$
5. $d(e^u) = e^u du;$	13. $d(\arccos u) = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}};$
6. $d(\ln u) = \frac{du}{u};$	14. $d(\mathrm{arctg}u) = \frac{du}{1+u^2};$
1	2
7. $d(\log_a u) = \frac{du}{u \ln a};$	15. $d(\mathrm{arcctg}u) = -\frac{du}{1+u^2}.$
8. $d(\sin u) = \cos u du;$	

Тема 1. Елементи лінійної і векторної алгебри

Визначники другого і третього порядків визначаються рівностями:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Числа a_{ij} $(i,j = 1,2,3)$ називаються елементами визначника. Мінором будь-якого елемента a_{ij} називається визначник M_{ij}, одержаний з даного визначника, що не містить рядка і стовпця на перетині яких знаходиться цей елемент. Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника є число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення. Це можна використовувати як ще один метод обчислення визначників.

В багатьох випадках спрощує обчислення визначників використання властивостей визначника, зокрема, спільний множник всіх елементів деякого рядка або стовпця можна винести за знак визначника, якщо відповідні елементи двох рядків чи стовпців пропорційні, то визначник дорівнює нулю; якщо всі елементи деякого рядка або стовпця визначника задані у вигляді суми двох елементів, то визначник можна представити у вигляді суми двох визначників, в одному з яких елементи відповідного рядка чи стовпця є першими доданками, а в другому – другими доданками; якщо до елементів будь-якого рядка чи стовпця додати відповідні елементи іншого рядка або стовпця, помножені на одне і те ж число, то визначник не змінить своєї величини.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Якщо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

То дана система має єдиний розв’язок $\{x_1, x_2, x_3\}$, який знаходиться за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.1. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання. $\Delta = (-3) \cdot 4 - 2 \cdot 5 = -22$.

Приклад 1.2. Обчислити мінор M_{12} і алгебраїчне доповнення A_{12} визначника третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix}.$$

Розв’язання.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 42 = -52,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -1 \cdot (-52) = 52.$$

Приклад 1.3. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 6 & -3 & 8 \end{vmatrix}$$

безпосередньо та розкладом за елементами першого рядка.

Розв'язання.

$$\Delta = 3\cdot 2\cdot 8 + 4\cdot 5\cdot 6 + (-1)\cdot(-3)\cdot 2 - 6\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot(-1)\cdot 8 - (-3)\cdot 5\cdot 3 = 227$$

.

Той самий результат отримаємо якщо розкласти даний визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta = 3\cdot A_{11} + 4\cdot A_{12} + 2\cdot A_{13} = 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 31 - 4\cdot(-38) + 2\cdot(-9) = 227.$$

Користуючись властивістю незмінності визначника при додаванні до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) помножених на одне і те ж число, можна заданий визначник звести до визначника у якому всі елементи будь-якого рядка (стовпця), крім одного, будуть рівні нулю.

Приклад 1.4. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 8, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12 - 8 + 3 - 8 - 2 - 18 = -45 \neq 0,$$

отже, система має єдиний розв'язок.

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}8&-2&1\\3&4&2\\1&1&-3\end{vmatrix}=-96+3-4-4-16-18=-135;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&8&1\\3&3&2\\2&1&-3\end{vmatrix}=-9+32+3-6-2+72=90;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&-2&8\\3&4&3\\2&1&1\end{vmatrix}=4-12+24-64-3+6=-45.$$

За формулами Крамера:

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-135}{-45}=3;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{90}{-45}=-2;$$

$$x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-45}{-45}=1.$$

Розв'язок системи: $\{(3;-2;1)\}$.

Впорядкована таблиця чисел, що містить m рядків і n стовпців називається матрицею і записується у вигляді:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\ a_{12}\ldots\ a_{1n}\\ a_{21}\ a_{22}\ldots\ a_{2n}\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ a_{m1}\ a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Пара чисел (m, n) визначає розмір матриці. Якщо $m\neq n$, то матриця називається прямокутною. Якщо $m=n$, то матриця називається квадратною, а число $m=n$ називається порядком цієї матриці.

Сумою двох матриць однакового розміру є матриця, елементи якої дорівнюють сумі відповідних елементів цих матриць. При множенні матриці на число потрібно всі її елементи помножити на це число.

Помножити матрицю A на матрицю B можна якщо число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B. Елемент

C_{ik} матриці $C = A \cdot B$ дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи k-го стовпця матриці B. В цьому випадку, якщо (m, n) – розмір матриці A, а (n, p) – розмір матриці B, то (m, p) – розмір матриці C.

Матриця A', одержана з матриці A шляхом заміни рядків відповідними стовпцями і навпаки, називається транспонованою по відношенні до матриці A.

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної матриці A, якщо $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – одинична матриця (всі елементи, які лежать на головній діагоналі рівні одиниці, а всі інші – нулі). Для існування оберненої матриці A^{-1} необхідно і достатньо, щоб визначник матриці A не дорівнював нулю. Такі матриці називаються неособливими.

Щоб знайти матрицю A^{-1}, обернену до неособливої матриці A, потрібно:

1. Обчислити визначник $\det A = \Delta$;
2. Знайти алгебраїчні доповнення A_{ik} елементів a_{ik} визначника Δ;
3. Скласти із чисел A_{ik} матрицю A^*;
4. Транспонувати матрицю A^*, утворивши матрицю $\tilde{A} = (A^*)'$. Матриця $\tilde{A}$ називається приєднаною до матриці А;
5. Скласти обернену матрицю A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A}$.

Матричний метод розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай задана система рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Складемо матриці:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матриця системи;

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець з вільних членів;

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матриця-стовпець з невідомих.

Дану систему рівнянь записуємо в матричній формі – матричним рівнянням $AX=B$.

Якщо матриця А неособлива $(\det A=\Delta\neq 0)$, то отримуємо розв’язок системи рівнянь в матричній формі: $X=A^{-1}B$.

Приклад 1.5. Знайти $3A+2B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання.

$$3A+2B=3\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 & -3 & 6 \\ 15 & 6 & -9 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ 6 & -8 & 4 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 19 & 1 & 8 \\ 21 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.6. Знайти $A\cdot B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матиці B, тому матриці можна перемножувати:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}5 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ -1 & 5\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 3 & 5\cdot 3+(-2)\cdot 5+3\cdot 4\\ 2\cdot 2+1(-1)+4\cdot 3 & 2\cdot 3+1\cdot 5+4\cdot 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}21 & 17\\ 15 & 27\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.7. Знайти $A\cdot B$**,** якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & -2 & 1\\ 3 & 5 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+1+15 & 4+2+6 & 8+3+3\\ 12-2+5 & 8-4+2 & 16-6+1\\ 9+5-10 & 6+10-4 & 12+15-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}22 & 12 & 14\\ 15 & 6 & 11\\ 4 & 12 & 25\end{pmatrix}.$$

Приклад 1.8. Знайти матрицю A^{-1}, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & 2\\ 4 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислюємо визначник матриці:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & -1 & 2\\ 4 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=12-6+8+4+9+16=43\neq 0\,.$$

Знаходимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}=7;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-10;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -16; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 17; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7.$$

Складаємо матрицю:

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & -10 & 6 \\ 6 & -16 & 1 \\ -1 & 17 & 7 \end{pmatrix} \text{ і транспонуємо її: } \tilde{A} = (A^*)' = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо матрицю A^{-1}, обернену до матриці А:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \frac{1}{43}\begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -10 & -16 & 17 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.9. Розв’язати систему рівнянь матричним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Розв’язання. Запишемо систему рівнянь в матричній формі – матричним рівнянням $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці А – коефіцієнтів при невідомих системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0\,.$$

Розв’язок системи рівнянь в матричній формі: $X = A^{-1} \cdot B$. Знайдемо обернену матрицю A^{-1}, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення визначника заданої системи:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}=11;\quad A_{13}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=7;\quad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7;\quad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}-11.$$

Складаємо матриці:

$$A^*=\begin{pmatrix}-1 & 11 & 7\\ 7 & -5 & -1\\ 5 & -7 & -11\end{pmatrix} \text{ і } \tilde{A}=(A^*)'=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ 11 & -5 & -7\\ 7 & -1 & -11\end{pmatrix}.$$

Обернена матриця: $A^{-1}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ 11 & -5 & -7\\ 7 & -1 & -11\end{pmatrix}.$

Шуканий розв'язок: $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{24}\begin{pmatrix}-1 & 7 & 5\\ 11 & -5 & -7\\ 7 & -1 & -11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}6\\ 5\\ -1\end{pmatrix}=$

.

$$=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}-6+35-5\\ 66-25+7\\ 42-5+11\end{pmatrix}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}24\\ 48\\ 48\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 2\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\{(1;2;2)\}$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це напрямний відрізок прямої, довжина якого називається модулем вектора; записують $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор $\vec{a}$ заданий координатами a_x, a_y, a_z записують у вигляді: $\vec{a}=(a_x, a_y, a_z)$ або $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори, напрями яких співпадають з додатними напрямками осей координат (орти).

Якщо початок вектора міститься в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець – в точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. При додаванні (відніманні) векторів їх відповідні координати додаються (віднімаються), при множенні вектора на число всі його координати множаться на це число.

Якщо вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ колінеарні, то:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Число $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2$ – скалярний квадрат вектора $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Якщо вектори задані координатами $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ і $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \ = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Кут $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ знаходиться за формулою: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$,

проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ знаходиться за формулою:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Приклад 1.10. Дано точки: *A*(3; -1; 2), *B*(4; 3; 1), *C*(5; 2; 3). Знайти вектор $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання.

$\overrightarrow{AB}$= (4-3; 3+1; 1-2) = (1; 4; -1), $\overrightarrow{BC}$ = (5-4; 2-3; 3-1) = (1; -1; 2),

3 $\overrightarrow{AB}$= (3; 12; -3), 4$\overrightarrow{BC}$ = (4; -4; 8), $\vec{a}$ = (3+4; 12-4; -3+8) = (7; 8; 5).

Приклад 1.11. Знайти: $\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ (кут між $\vec{a}$ і $\vec{b}$).

Розв'язання.

$$\left(4\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=4\vec{a}^{\,2}+3\vec{b}\cdot\vec{a}-8\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^{\,2}=4\left|\vec{a}\right|^2-5\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi-6\left|\vec{b}\right|^2=$$

$$=4\cdot4-5\cdot2\cdot3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-6\cdot9=-23.$$

Приклад 1.12. Знайти: $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|$, якщо $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=2$, кут між векторами $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

Розв'язання.

$$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^{\,2}-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4\left|\vec{a}\right|^2-12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\varphi+9\left|\vec{b}\right|^2}=$$

$$=\sqrt{4\cdot16-12\cdot4\cdot\frac{1}{2}-9\cdot4}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}.$$

Приклад 1.13. Дано трикутник з вершинами в точках: A(1; 1; -2), B(3; 2; 1), C(2; 4; -1). Знайти внутрішній кут φ при вершині B і проекцію вектора $\overrightarrow{BA}$ на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Розв'язання. Шуканий кут φ – це кут між векторами $\overrightarrow{BA}$ та $\overrightarrow{BC}$. В даному випадку, маємо $\overrightarrow{BA}$ = (-2; -1; -3) і $\overrightarrow{BC}$ = (-1; 2; -2). Тому

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{(-2)(-1)+(-1)2+(-3)(-2)}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{6}{3\sqrt{14}}=\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\varphi=\arccos\frac{2}{\sqrt{14}}.$$

$$np_{\overrightarrow{BA}}\overrightarrow{BC}=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{6}{3}=2.$$

Приклад 1.14. Дано координати вершин піраміди $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$, $Д(4;-1;5)$. Знайти:

а) координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ та їх модулі;

б) проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$;

в) $\overline{AB}\cdot(\overline{CA}+2\overline{AD})$;

г) кут між векторами $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$.

Розв'язання. а) Знаходимо координати векторів та їх модулі:

$$\overline{AB}=(1-2;1-(-1);1-3)=(-1;2;-2);$$

$$\overline{AC}=(0-2;0-(-1);5-3)=(-2;1;2);$$

$$\overline{AD}=(4-2;-1-(-1);5-3)=(2;0;2);$$

$$\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{9}=3;$$

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3;$$

$$\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{2^2+0+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

б) Проекцію вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{AD}$ знайдемо за формулою

$Пр_{\overline{AD}}\overline{AB}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\left|\overline{AD}\right|}$, де $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$ – скалярний добуток цих векторів. Оскільки $\overline{AB}\cdot\overline{AD}$ = (-1)·2 + 2·0 + (-2)·2= -6, а $\left|\overline{AD}\right|=2\sqrt{2}$, то $Пр_{\overline{AD}}\overline{AB}=\dfrac{-6}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\approx-2{,}12.$

в) Знайдемо спочатку координати векторів $\overrightarrow{CA}$, $2\overrightarrow{AD}$ та $\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AD}$: $\overline{CA}=-\overline{AC}=(2;-1;-2)$, $2\overline{AD}=(4;0;4)$,

$$\overline{CA}+2\overline{AD}=(2+4;-1+0;-2+4)=(6;-1;2).$$

Тоді $\overline{AB}\cdot(\overline{CA}+2\overline{AD})=(-1)\cdot6+2\cdot(-1)+(-2)\cdot2=-12.$

г) Оскільки внутрішній кут φ при вершині A трикутника ABC – це кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, то $\cos\varphi = \cos\left(\overline{AB},^\wedge \overline{AC}\right) = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|}$.

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC} = (-1)\cdot(-2) + 2\cdot 1 + (-2)\cdot 2 = 0,\ \left|\overline{AB}\right| = 3,\ \left|\overline{AC}\right| = 3,$$

$$\cos\varphi = \frac{0}{3\cdot 3} = 0,\ \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, шуканий кут дорівнює $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, тобто вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ – перпендикулярні.

Приклад 1.15. Обчислити роботу, яку виконує сила $\overline{F}$ =(1;-3;2) при прямолінійному переміщенні матеріальної точки з положення A(0;1;0) в положення B(1;0;1).

Розв'язання. Роботу сили $\overline{F}$ по переміщенню матеріальної точки з положення A в положення B знайдемо за формулою $A = \overline{F}\cdot\overline{AB}$.

Знайдемо координати вектора переміщення $\overline{AB}$ =(1;-1;1). Тоді A=1·1+(-3)·(-1)+2·1=6.

Завдання для самоконтролю

1. Розв’язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 5, \\ 6x_1 - 8x_2 = 10; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 6, \\ 4x_1 - 6x_2 = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21, \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases}$

2. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Знаючи, що $\left|\overline{a}\right| = 4$, $\left|\overline{b}\right| = 5$, обчислити:

а) $\overline{a} \cdot \overline{b}$; б) $\left(3\overline{a} + 2\overline{b}\right)\left(\overline{b} - 2\overline{a}\right)$; в) $Пр_{\overline{a}}(2\overline{a} + \overline{b})$;

г) $\left|\overline{p}\right|$, якщо $\overline{p} = 2\overline{a} + \overline{b}$.

3. Дано точки A(3;-1;0), B(2;1;1), C(3;0;-2). Знайти:

а) координати векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та їх модулі;

б) кут між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$;

в) $Пр_{\overline{AC}}(2\overline{AB} + \overline{BC})$.

4. При якому значенні α вектори $\overline{p}$ =(2;0;α) і $\overline{q}$ =(3;4;2) перпендикулярні?

Тема 2. Елементи аналітичної геометрії

Віддаль між двома точками.

Якщо в прямокутній декартовій системі координат задані дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то віддаль між двома точками знаходиться за формулою:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Поділ відрізка у заданому відношенні.

Нехай $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ – дві точки, які є кінцями відрізка *AB*. Координати точки $C(x_c; y_c; z_c)$, яка ділить цей відрізок у відношенні $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$ знаходяться за формулами:

$$x_c = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}; \quad y_c = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}; \quad z_c = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\,.$$

Якщо точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ділить відрізок навпіл, то

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}\,.$$

Найпростішою лінією на площині є пряма лінія. Основні види рівнянь прямої лінії на площині в прямокутній системі координат XOY :

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{N}(A;B)$ (вектор $\vec{N} \neq \vec{0}$ називається нормальним вектором) задається у вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0\,.$$

2. Будь-яке рівняння першого степеня відносно *x* і *y*, тобто

$$Ax + By + C = 0\,,$$

де A, B, C – сталі коефіцієнти і $A^2 + B^2 \neq 0$ визначає на площині пряму лінію. Це рівняння називається загальним рівнянням прямої.

3. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0)$ паралельно вектору $\vec{S}(m;n)$ (вектор $\vec{S} \neq \vec{0}$ напрямний вектор) задається у вигляді:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}.$$

Це рівняння називається канонічним рівнянням прямої.

4. Пряма лінія, яка проходить через дві точки $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ визначається рівнянням:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

5. Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ з заданим кутовим коефіцієнтом k ($k=tg\,\alpha$, де α – кут нахилу прямої з додатнім напрямком осі Ox):

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Гострий кут між двома прямими, що мають кутові коефіцієнти k_1 і k_2, визначається за формулою:

$$tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|.$$

Умова паралельності двох прямих: $k_1=k_2$. Умова перпендикулярності двох прямих: $k_1\cdot k_2=-1$.

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Коло. Колом називається множина точок площини, віддаль яких від фіксованої точки, яка називається центром кола, є величина стала, яка називається радіусом.

Рівняння кола з центром $O_1(x_0;y_0)$ і радіусом R в прямокутній системі координат має вигляд:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

Зокрема якщо центр кола лежить в початку координат, то одержуємо канонічне рівняння кола:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Еліпс. Еліпсом називається множина точок площини, сума віддалей яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (іі позначають $2a$), при умові, що ця стала більша за віддаль між фокусами (яку позначають 2 c).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси еліпса лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат, то отримується канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $b^2=a^2-c^2$, $a>b$, a – велика піввісь, b – мала піввісь еліпса. Величина $\varepsilon=\frac{c}{a}<1$ називається ексцентриситетом.

Еліпс, центр якого знаходиться в точці $(x_0;y_0)$ а осі паралельні осям координат, описується рівнянням:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Гіпербола. Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці віддалей яких до двох заданих точок, які називаються фокусами, є величина стала (іі позначають $2a$), при умові, що ця стала менша за віддаль між фокусами (яку позначають 2 c).

Якщо систему координат вибрати так, щоб фокуси гіперболи лежали на осі Ox симетрично відносно початку координат, то одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

де $b^2=c^2-a^2$, a – дійсна піввісь, b – уявна піввісь. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon=\frac{c}{a}>1$. Прямі $y=\pm\frac{b}{a}x$ називається асимптотами гіперболи.

Рівняння $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ є рівнянням гіперболи, центр якої лежить в точці $(x_0;y_0)$, а осі гіперболи паралельні осям координат.

Парабола. Параболою називається множина точок площини рівновіддалених від даної точки, яка називається фокусом і даної прямої, яка називається директрисою.

Якщо директриса параболи є пряма $x = -\frac{p}{2}$ або $x = \frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ або $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$, де $p > 0$, то маємо канонічні рівняння параболи:

$$y^2 = 2px \text{ або } y^2 = -2px.$$

У випадку, якщо директриса параболи є пряма $y = -\frac{p}{2}$ або $y = \frac{p}{2}$, а фокусом – точка $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ або $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$, де $p > 0$, то маємо ще два канонічних рівняння:

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0), \quad (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0).$$

Нехай задане загальне рівняння другого степеня, яке не містить добутку змінних $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то в результаті виділення повних квадратів, відносно кожної змінної, вихідне рівняння може набути одного з розглянутих нижче ліній другого порядку з осями симетрії паралельними до осей координат.

Приклад 2.1. Дано координати вершин трикутника *A*(0;1), *B*(2;11), *C*(10;7). Методами аналітичної геометрії знайти:

а) загальні рівняння прямих *AB* і *AC*, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

б) рівняння прямої *AB* у відрізках;

в) загальне рівняння прямої *AK*, яка містить медіану трикутника *ABC;*

г) загальне рівняння висоти *CE* та її довжину;

д) внутрішній кут φ при вершині *A* трикутника *ABC*;

е) рівняння прямої, що проходить через точку *B*:

1. паралельно до прямої *AC*;

2. перпендикулярно до прямої AC;

є) координати центра ваги трикутника.

Зробити рисунок.

Розв'язання. Зробимо рисунок.

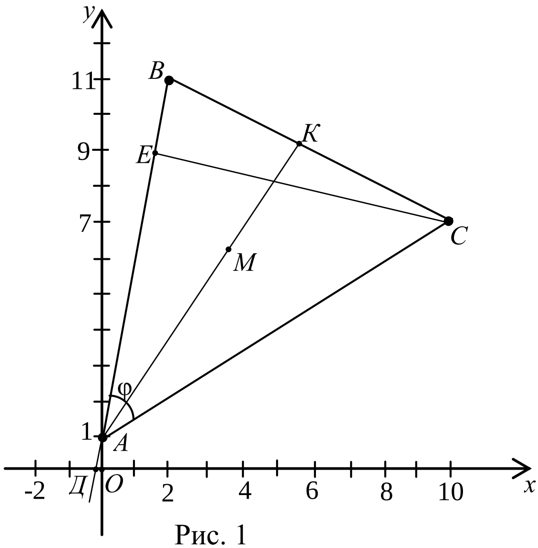


Рис. 1

а) Підставивши в рівняння прямої, що проходить через дві дані точки координати точок A і B, отримаємо рівняння прямої AB:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},\ \frac{x-0}{2-0}=\frac{y-1}{11-1},\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{10},\ 10x=2(y-1),$$

$5x - y + 1 = 0$ – загальне рівняння прямої AB, $\overline{n_1}=(5;-1)$ – нормальний вектор прямої.

Розв'яжемо рівняння прямої AB відносно змінної y: $y=5x+1$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, де $k_{AB}=5$.

Аналогічно знаходимо загальне рівняння прямої AC.

$$\frac{x-x_A}{x_C-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A},\ \frac{x-0}{10-0}=\frac{y-1}{7-1},\qquad \frac{x}{10}=\frac{y-1}{6},$$

$6x=10(y-1),$

$3x - 5y + 5 = 0$ – загальне рівняння, $\overline{n_2} = (3;-5)$ – нормальний вектор прямої.

$y = \frac{3}{5}x + 1$ – рівняння прямої AC з кутовим коефіцієнтом, де $k_{AC} = \frac{3}{5}$.

б) Зведемо загальне рівняння прямої AB до рівняння у відрізках. Для цього перенесемо вільний член заданого рівняння в праву частину рівності і поділимо на нього обидві частини рівняння. Отримаємо: $5x - y = -1$, $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{1} = 1$.

З цього рівняння видно, що пряма відтинає на осях координат відрізки $a = -\frac{1}{5}$ і $b = 1$, тобто, проходить через точки $Д(-\frac{1}{5};0)$ та $A(0;1)$.

в) Знайдемо спочатку координати точки K, як середини відрізка BC.

$$x_K = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2+10}{2} = 6, \quad y_K = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{11+7}{2} = 9,$$

тобто, $K(6;9)$.

Знайдемо рівняння медіани AK як рівняння прямої, що проходить через точки A і K:

$$\frac{x - x_A}{x_K - x_A} = \frac{y - y_A}{y_K - y_A}, \quad \frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{9-1}, \quad 4x - 3y + 3 = 0.$$

г) Оскільки нормальний вектор $\overline{n_1} = (5;-1)$ прямої AB буде напрямним до прямої CE, то, скориставшись канонічним рівнянням прямої, знайдемо рівняння висоти :

$$\frac{x - x_C}{5} = \frac{y - y_C}{-1}, \quad \frac{x-10}{5} = \frac{y-7}{-1}, \quad -(x-10) = 5(y-7).$$

Звідки $x + 5y - 45 = 0$ – шукане рівняння.

Довжину цієї висоти знайдемо як відстань від точки C до прямої AB:

$$|CE| = \frac{|5\cdot 10 - 7 + 1|}{\sqrt{5^2 + (-1)^2}} = \frac{44}{\sqrt{26}} \approx 8{,}63 \text{ (лін. од.)}$$

д) Внутрішній кут φ при вершині A заданого трикутника, знайдемо як кут між прямими AB і AC.

Оскільки $\overline{n_1} = (5;-1)$, $\overline{n_2} = (3;-5)$ - нормальні вектори цих прямих,

то $\cos\varphi = \cos\left(\overline{n_1},^\wedge \overline{n_2}\right) = \dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{\left|\overline{n_1}\right|\cdot\left|\overline{n_2}\right|} = \dfrac{5\cdot 3 + (-1)\cdot(-5)}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{3^2+(-5)^2}} =$

$$= \frac{20}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{34}} \approx 0{,}673.$$

Тоді $\varphi \approx \arccos 0{,}673 \approx 47^0$.

е) 1. Запишемо рівняння в’язки прямих, що проходять через точку $B(2;11)$: $y - 11 = k\ (x - 2)$. Оскільки шукана пряма паралельна до прямої AC ($k_{AC} = \dfrac{3}{5}$ знайдено вище), то їх кутові коефіцієнти пов’язані співвідношенням $k = k_{AC} = \dfrac{3}{5}$. Тоді рівняння прямої, що проходить через точку B і паралельна до прямої AC запишеться так:

$y - 11 = \dfrac{3}{5}(x - 2)$ або $3x - 5y + 49 = 0$.

2. Аналогічно до випадку 1 маємо $y - 11 = k\ (x - 2)$ – рівняння в’язки прямих, що проходять через точку B. Кутовий коефіцієнт шуканої прямої знайдемо з умови її перпендикулярності до прямої AC, тобто, $k\cdot k_{AC} = -1$, $k = -\dfrac{1}{k_{AC}} = -\dfrac{5}{3}$. Тоді $y - 11 = \dfrac{5}{3}(x - 2)$ або $5x$ +

$3y$–43 =0 – рівняння прямої, що проходить через задану точку *B* перпендикулярно до прямої *AC*.

є) *I спосіб*. Координати точки *M* – центра ваги трикутника *ABC,* знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0+2+10}{3} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{1+11+7}{3} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Шукана точка $M(4;6\frac{1}{3})$.

II спосіб. Координати центра ваги трикутника співпадають з точкою перетину його медіан. Оскільки медіани в точці перетину діляться у відношенні 2:1 $\left(\lambda = \frac{|AM|}{|MK|} = 2\right)$, то координати точки *M* – центра ваги трикутника, знайдемо за формулами:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_K}{1+\lambda} = \frac{0+2\cdot 6}{1+2} = 4,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda \cdot y_K}{1+\lambda} = \frac{1+2\cdot 9}{1+2} = \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}.$$

Отже, $M(4;6\frac{1}{3})$.

Приклад 2.2. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(2;-1)$ і $B(4;5)$ є кінцями одного з діаметрів.

Розв'язання. Знаходимо центр і радіус кола. Центром кола є середина діаметра *AB*, тому маємо:

$$x_0 = \frac{2+4}{2} = 3; \quad y_0 = \frac{-1+5}{2} = 2: \quad O_1(3;2).$$

Приклад 2.3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо відстань між фокусами рівна 18, а велика піввісь – 12.

Розв'язання. За умовою задачі $2c=18$, $a=12$. Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо $b^2=12^2-9^2=144-81=63$.

Отже, рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{63}=1.$

Приклад 2.4. Скласти рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь дорівнює 8, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{2}$.

Розв'язання. За умовою задачі a=8, $\varepsilon=\frac{3}{2}$. Оскільки $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$, то $c=\frac{3\cdot 8}{2}=12.$ Із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ маємо $b^2=12^2-8^2=144-64=80$.

Отже, рівняння гіперболи $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1.$

Приклад 2.5. Знайти координати центра, півосі та ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням $9x^2-18x+25y^2+100y-116=0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки, які містять однакові змінні, і доповнимо отримані вирази до повних квадратів. Маємо:

$$(9x^2-18x)+(25y^2+100y)-116=0,$$

$$9(x^2-2x)+25(y^2+4y)-116=0,$$

$$9\left[(x^2-2x+1)-1\right]+25\left[(y^2+4y+4)-4\right]-116=0,$$

$$9(x-1)^2+25(y+2)^2-225=0.$$

Звідси $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{9}=1.$

Центр еліпса знаходиться в точці C(1;-2), півосі a=5, b=3. Оскільки $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$, то ексцентриситет еліпса $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8.$

Приклад 2.6. Знайти координати вершини і значення параметра p параболи, заданої рівнянням $2y^2-12y-x+14=0$.

Розв'язання. Згрупуємо доданки із змінною y і виділимо повний квадрат. Маємо $2(y^2-6y)-x+14=0;\ 2\left[(y-3)^2-9\right]-x+14=0$ або $2(y-3)^2=x+4,\ (y-3)^2=\frac{1}{2}(x+4).$

Координати вершин параболи знаходяться в точці A(-4;3). Параметр p знаходимо з умови $2p=\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{4}.$ Вісь симетрії параболи паралельна до осі OX.

Приклад 2.7. Побудувати плоску фігуру, обмежену лініями $y=-x^2+2x+7$ і $y=-x+3$.

Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину параболи і прямої, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y=-x^2+2x+7, \\ y=-x+3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x+3, \\ x^2-3x-4=0; \end{cases} \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=4.$$

Отже, $A(-1;4)$ і $B(4;-1)$ – точки перетину ліній.

Побудуємо лінії та заштрихуємо фігуру Φ, яка обмежена зверху параболою, а знизу – прямою (рис.2).

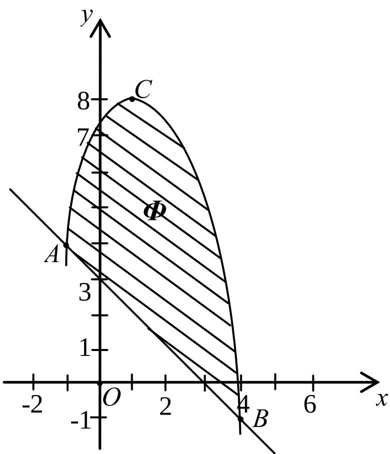


Рис. 2

Для знаходження вершини параболи зведемо її рівняння до канонічного виду:

$$y=-(x^2+2x)+7,$$

$$y=-\left[(x-1)^2-1\right]+7,$$

$$y=-(x-1)^2+8,$$

$$(x-1)^2=-(y-8).$$

Отже, вершина параболи знаходиться в точці C(1;8), вітки направлені вниз, вісь симетрії $x=1$.

Завдання для самоконтролю

1. Дано вершини трикутника *A*(4;3), *B*(-3;-3), *C*(2;7).Знайти:

а) рівняння прямих *AB* і *AC*, нормальні вектори та кутові коефіцієнти цих прямих;

б) рівняння прямої *AC* у відрізках;

в) рівняння прямої *AK*, що містить медіану трикутника *ABC;*

г) рівняння висоти *CE* та її довжину;

д) внутрішній кут φ при вершині *A*;

е) рівняння прямої, що проходить через точку *B*:

1. перпендикулярно до прямої *AC*;
2. паралельно до прямої *AC*;

є) координати центра ваги трикутника.

Зробити рисунок.

2. Знайти рівняння кола, якщо кінці одного з його діаметрів знаходяться в точках *A*(3;9) і *B*(7;3).

3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь a=12, а ексцентриситет ε =0,5.

4. Знайти півосі, координати фокусів і ексцентриситет еліпса $9x^2+4y^2=36$. Зробити рисунок.

5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її дійсна піввісь a=8, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

6. Звести до канонічного виду рівняння гіперболи $9x^2-16y^2=144$. Знайти координати її фокусів, ексцентриситет і рівняння асимптот. Зробити рисунок.

7. Визначити точки перетину прямої $x+y-3=0$ і параболи $x^2=4y$.

8. Встановити, яку криву задає рівняння (зробити рисунок):

а) $x^2+y^2-4x+6y+4=0$;

б) $4x^2+9y^2+32x-54y+109=0$;

в) $x^2-6y^2-12x+36y-48=0$;

г) $x^2-8x+2y+18=0$.

Тема 3. Вступ до математичного аналізу

Нехай задані дві множини дійсних чисел X і Y. Функцією називається правило, за яким кожному елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$, при умові, що кожному елементу $y \in Y$ відповідає хоча б один елемент $x \in X$.

Множина X називається областю визначення, а множина Y називається множиною значень функції.

Якщо функція $y = f(x)$ задана аналітично (у вигляді формули), то областю визначення є множина значень аргументна при яких вона існує, тобто приймає певне дійсне значення.

При знаходженні області визначення функції потрібно пам'ятати, що: корінь парного степеня існує лише для невід'ємних чисел; знаменник дробу має бути відмінним від нуля; логарифм існує тільки для додатних чисел; вирази, що стоять під знаком функцій $\arcsin U$ та $\arccos U$, за модулем не перевищують одиниці.

Приклад 3.1. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$; б) $f(x) = \arcsin\dfrac{x-3}{2} - \lg(4-x)$.

Розв'язання.

а) При знаходженні області визначення даної функції потрібно згадати, що корінь парного степеня може існувати лише для невід'ємних чисел, а знаменник дробу повинен бути відмінним від нуля. Ці умови повинні виконуватись одночасно. А тому шукана область визначення являє собою розв'язок системи:

$$\begin{cases} 4 - x^2 \ge 0, \\ x - 1 \ne 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \le 4, \\ x \ne 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x| \le 2, \\ x \ne 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 2, \\ x \ne 1. \end{cases}$$

Зобразимо її на рисунку.

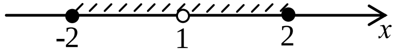


Рис.3

Відповідь: $D(y)=\{x : x\in[-2;1)\cup(1;2]\}$.

б) З того, що логарифм існує для строго додатних чисел, а вираз, який міститься під знаком функції arcsin, за модулем не перевищує одиниці, маємо систему:

$$\begin{cases} 4-x>0, \\ \left|\dfrac{x-3}{2}\right|\le 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4, \\ -2\le x-3\le 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<4, \\ 1\le x\le 5. \end{cases}$$

Зобразимо область визначення даної функції на рисунку.

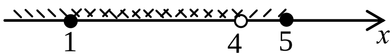


Рис.4

Відповідь: $D(y)=\{x : x\in[1;4)\}$.

Розглянемо функцію $y=f(x)$, визначену у деякому околі точки $x=a$, крім можливо самої точки. З цього околу виберемо довільну послідовність значень аргументу x :

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots, \quad x_n \ne a \,,$$

яка збігається до a .

Нехай вибраній послідовності відповідає послідовність значень функції $y=f(x)$:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots, f(x_n), \ldots,$$

яка збігається до числа A, тоді число A називають границею функції $y=f(x)$ в точці a і записують $\lim\limits_{n\to a} f(x)=A$.

Якщо $A=0$, то функція $y=f(x)$ називається нескінченно малою при $x\to a$, якщо A – один із символів $\infty, +\infty, -\infty$, то функція $y=f(x)$ називається нескінченно великою при $x\to a$.

Зазначимо, що в усіх розглянутих означеннях a може бути $\infty, +\infty$ або $-\infty$.

Нескінченно малі і нескінченно великі функції пов’язані між собою, а саме:

Якщо $f(x)$ – нескінченно мала функція в точці a і в деякому околі цієї точки $f(x) \neq 0$, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно велика в точці a. Якщо $f(x)$ – нескінченно велика в точці a, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала в цій точці.

У випадку коли при $x \to a$ функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ мають скінченні границі, то:

$$\lim_{x\to a}\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x);$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \text{ при умові що } \lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0.$$

Якщо функція $f(x)$ елементарна і визначена в точці a, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Якщо функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ при $x \to a$ одночасно або нескінченно малі або нескінченно великі, то при знаходженні $\lim\limits_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$. Розглянемо приклади на розкриття цих невизначеностей.

Приклад 3.2. Обчислити границі:

$$a)\ \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - 5x + 7}{4x^3 + x^2 - 3}; \quad б)\ \lim_{x\to\infty} \frac{4x^3 + x - 3}{5x^3 - 3x^2 + 2}; \quad в)\ \lim_{x\to\infty} \frac{2x^5 + 3x - 4}{5x^4 - 2x^2 + 5}$$

.

Розв’язання. У всіх трьох випадках маємо невизначеності типу $\frac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельники і знаменники дробів на найбільший степінь полінома в кожному знаменнику, тобто в першому і другому випадку на x^3, а в третьому – на x^4. Отримаємо:

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-5x+7}{4x^3+x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{4+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{0}{4}=0$$

;

$$б)\ \lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x-3}{5x^3-3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right)}=\frac{4}{5}$$

;

$$в)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^5+3x-4}{5x^4-2x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+\frac{3}{x^3}-\frac{4}{x^4}}{5-\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^4}}=\infty\,.$$

Приклад 3.3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-16}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Розкладемо поліноми, які є в чисельнику і знаменнику, на множники. Відомо, що $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1, x_2 – корені рівняння ax^2+bx+c, а також $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

Отримуємо: для чисельника $x_1=2,\ 2x_2=6,\ x_2=3$, тому $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$; для знаменника $x_1=2,\ 2x_2=-\dfrac{16}{3}$, $x_2=-\dfrac{8}{3}$, тому $3x^2+2x-16=3(x-2)(x+\dfrac{8}{3})=(x-2)(3x+8)$.

Отже,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{3x^2+2x-16}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(3x+8)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{3x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{2-3}{6+8}=$$

$= -\dfrac{1}{14}$. Зауважимо, що скорочення на $x-2$ можливе, оскільки $x \to 2$, але $x \neq 2$.

Границі такого типу можна знаходити іншим способом. Досить поділити поліноми чисельника і знаменника на $x-a$, не розкладаючи їх на множники. Цей метод особливо зручний для поліномів вищих степенів.

Приклад 3.4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Поділимо чисельник і знаменник на $x-3$:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2-3x-9 & \underline{x-3} \\ \underline{2x^2-6x} & 2x+3; \\ \quad 3x-9 & \\ \quad \underline{3x-9} & \\ \quad\quad 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 3x^2-5x-12 & \underline{x-3} \\ \underline{3x^2-9x} & 3x+4. \\ \quad 4x-12 & \\ \quad \underline{4x-12} & \\ \quad\quad 0 & \end{array}$$

Отримаємо: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-12} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+3}{3x+4} = \dfrac{9}{13}$.

Приклад 3.5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$.

Розв'язання. В цьому випадку маємо невизначеність $\dfrac{0}{0}$. Помножимо і поділимо дріб, який є під знаком границі, на вираз $\sqrt{2x+1}+3$, спряжений чисельнику. У результаті отримаємо:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{2x+1-9}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

При знаходженні границь часто доводиться використовувати дві важливі границі. Зокрема, при розкритті невизначеностей $\frac{0}{0}$, що містять тригонометричні функції використовують границю $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, яка називається першою важливою границею.

Для розкриття невизначеності виду 1^{∞} використовується друга важлива границя

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\text{, або }\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

та як наслідок

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}\text{ і }\lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^{k},$$

де e – число Ейлера, k – будь-яке дійсне число.

Приклад 3.6. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x+2}$.

Розв'язання.

а) Для знаходження даної границі використаємо наслідок з першої визначної границі $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=k.$ У нашому випадку

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x^{2}}=\left|1-\cos 8x=2\sin^{2}4x\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^{2}4x}{x^{2}}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\right)^{2}=$$

$$=2\cdot 4^{2}=32.$$

б) При $x\to\infty$ маємо неозначеність виду $\left(1^{\infty}\right)$. Щоб її розкрити скористаємося наслідком з другої визначної границі $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=e^{k}.$

Для цього поділимо чисельник і знаменник основи степеня на $2x$. Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2x-1}{2x}}{\frac{2x+3}{2x}}\right)^{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{3x+2}}{\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x+1}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}\right]^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^2}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3}{2x}\right)^{x}\right]^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x}\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3}\cdot 1}{e^{\frac{3}{2}\cdot 3}\cdot 1}=\frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{9}{2}}}=e^{-6}=\frac{1}{e^6}.$$

Функція $y=f(x)$ називається неперервною в точці x_0, якщо вона визначена в околі цієї точки і в самій точці, і якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Елементарна функція неперервна в точках, у яких вона визначена.

Якщо функція є неперервною в точці x_0, то ця точка називається точкою розриву.

Якщо x_0 – точка розриву, але існують границі $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то вона називається точкою розриву першого роду. Зокрема, якщо ці границі рівні то точка x_0 називається точкою усувного розриву. Якщо ж хоча б одна з границь $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ нескінченна або не існує, то x_0 називається точкою розриву другого роду.

Приклад 3.7. Дослідити на неперервність функцію $y=\frac{x+4}{x^2+2}$.

Розв'язання. Задана функція елементарна і визначена на всій числовій осі. Тому функція неперервна на всій числовій осі.

Приклад 3.8. Дослідити на неперервність функцію $y = \dfrac{x^2+5}{x-2}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. В усіх точках області визначення функція неперервна. В точці $x = 2$ функція невизначена, тому точка $x = 2$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{x^2+5}{x-2} = -\infty; \ \lim_{x\to 2+0} \frac{x^2+5}{x-2} = +\infty.$$

Отже, $x = 2$ – точка розриву другого роду.

Приклад 3.9. Дослідити на неперервність функцію $y = arctg\dfrac{1}{x-3}$.

Розв'язання. Область визначення функції $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Функція є неперервною для $x \neq 3$ як елементарна функція. Точка $x = 3$ є точкою розриву. Знаходимо односторонні границі:

оскільки $\lim\limits_{x\to 3-0} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$ і $\lim\limits_{x\to 3+0} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$, то маємо

$$\lim_{x\to 3-0} arctg\frac{1}{x-3} = -\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to 3+0} arctg\frac{1}{x-3} = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3+0} f(x)$, тому точка $x = 3$ є точкою розриву першого роду.

Приклад 3.10. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{якщо } x \le 2, \\ 5 - x, & \text{якщо } x > 2. \end{cases}$$

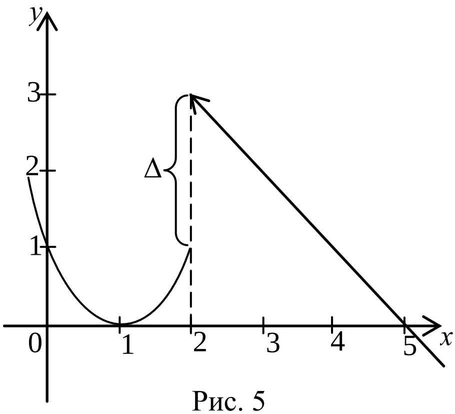


Рис. 5

Розв'язання. Функція визначена для всіх $x \in R$. Розрив можливий лише в точці x=2, при переході через яку функція змінює свій аналітичний вираз. Знаходимо односторонні границі:

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = 1,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} (5-x) = 3.$$

В точці x=2 функція має скінченний розрив (розрив першого роду).

"Стрибок" функції: $\Delta = f(2+0) - f(2-0) = 3 - 1 = 2.$

Завдання для самоконтролю

1. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x) = \sqrt{x+1}$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$; в) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 - x^2}} + \arccos\dfrac{x-2}{x}$;

д) $f(x) = 2^{x^2+3} + \mathrm{arctg}(7x+1)$.

2. Знайти границі функцій:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 6x + 1}{5x^2 + x - 2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x+1}{x^2 - 5x + 3}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^2 - 6x + 7}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$; д) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{3 - 5x - 2x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$;

є) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x^2}$; з) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x+1}{8x+5}\right)^{x+1}$.

3. Дослідити функцію на неперервність і побудувати її графік:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ якщо } x<1, \\ x^2+2, \text{ якщо} \geq 1. \end{cases}$$

Тема 4. Диференціальне числення функції однієї змінної

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x називається границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Похідна позначається символами $f'(x)$, y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$. Якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ нескінченна або не існує, то будемо говорити, що похідна в точці x не існує. Функція називається диференційованою в точці, якщо вона в ній має похідну.

Щоб знайти похідну функції $y=f(x)$ за означенням, потрібно знайти в такій послідовності: 1) $f(x+\Delta x)$; 2) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;
3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$; 4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Фізичний зміст похідної: якщо деякий процес описується функцією $f(x)$, то похідна $f'(x)$ є швидкість зміни цього процесу.

Геометричний зміст: похідна функції $f(x)$ в точці x_0 – кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції в точці $(x_0;\, f(x_0))$. Тому дотична і нормаль до графіка функції $y=f(x)$ в точці $(x_0;\, f(x_0))$ задаються відповідно рівняннями:

$$y-f(x_0)=y'(x_0)(x-x_0) \text{ і } y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Розглянемо складну функцію $y=f(u)$, де $u=u(x)$. Якщо функція $u=u(x)$ диференційована в точці x, а функція $y=f(u)$ диференційована у відповідній точці $u=u(x)$, то складна функція $y=f(u(x))$ диференційована в точці x, при чому $y'=f'(u)u'(x)$.

Приклад 4.1. Знайти похідну функції $y=tg4x$, виходячи з її означення.

Розв'язання. Надаємо x деякого приросту Δx і знаходимо:

1) $f(x+\Delta x)=tg(4x+4\Delta x);$

2) $\Delta y = tg(4x+4\Delta x)-tg4x=\dfrac{\sin 4\Delta x}{\cos(4x+4\Delta x)\cdot\cos 4x};$

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sin 4\Delta x}{\Delta x\cdot\cos(4x+4\Delta x)\cdot\cos 4x};$

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin 4\Delta x}{\Delta x}\cdot\dfrac{1}{\cos(4+4\Delta x)\cdot\cos 4x}=\dfrac{4}{\cos^2 4x}.$

Приклад 4.2. Знайти похідну функції:

а) $y=3x^3-4x^2+5x-3;$ *б)* $y=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{5}{x^4};$

в) $y=3^{sin^3 4x};$ *г)* $y=sin^4 3x;$ *д)* $y=x^3 cos\, x;$

е) $y=\dfrac{cos\, x}{1-sin\, x};$ *є)* $y=x^{cos\, x}.$

Розв'язання.

а) $y'=\left(3x^3-4x^2+5x-3\right)'=9x^2-8x+5;$

б) Ввівши від'ємні показники, перетворимо дану функцію: $y=2x^{-1}+3x^{-2}-5x^{-4}$, тоді

$y'=-2x^{-2}-6x^{-3}+20x^{-5}=-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{6}{x^3}+\dfrac{20}{x^5};$

в) Використавши формулу для обчислення похідної складної функції маємо: $y'=3^{\sin^3 4x}\ln 3\cdot 3\sin^2 4x\cdot\cos 4x\cdot 4=$

$=12\cdot 3^{\sin^3 4x}\ln 3\cdot\sin^2 4x\cdot\cos 4x;$

г) $y'=4\sin^3 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=12\sin^3 3x\cdot\cos 3x;$

д) Для знаходження похідної функції $y=x^3\cos x$, використаємо формулу похідної добутку:

$y'=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=3x^2\cos x-x^3\sin x;$

е) Користуючись правилом диференціювання частки, маємо:

$$y'=\frac{-\sin x(1-\sin x)+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x};$$

є) Використаємо метод логарифмічного диференціювання. Для цього про логарифмуємо обидві частини рівності $y=x^{\cos x}$:

$\ln y=\cos x\cdot\ln x$. Знайдемо похідну обох частин цієї рівності:

$$(\ln y)'=\frac{y'}{y}=(\cos x\cdot\ln x)'=-\sin x\cdot\ln x+\frac{\cos x}{x}.$$

Отже, $y'=x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\cdot\ln x\right).$

Приклад 4.3. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні $y_x^{/}$ заданих функцій:

а) $\begin{cases} x=t^4e^{at}, \\ y=t^3e^{at}, \text{ де } a>0; \end{cases}$ *б)* $y=\text{tgx},\ y_x''-?$

Розв'язання.

а) Похідну $y_x^{/}$ параметрично заданої функції визначимо за формулою $y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}$ $\begin{cases} x=t^4e^{at}, \\ y=t^3\cdot e^{at}, \text{ де } a>0; \end{cases}$ $(uv)'=u'v+uv';$

Знаходимо $y_t^{/}=3t^2e^{at}+at^3e^{at}=t^2e^{at}(3+at);$ $(e^{2t})'=2e^{2t}$

$x_t^{/}=4t^3e^{at}+at^4e^{at}=t^3e^{at}(4+at).$

Тоді $y'_x = \dfrac{t^2 e^{at}(3+at)}{t^3 e^{at}(4+at)} = \dfrac{3+at}{t(4+at)}$. $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2}\cdot u'$;

е) Знаходимо послідовно першу і другу похідні даної функції:

$$y' = (\mathrm{tg}x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad y'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = -\frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Приклад 4.4. Обчислити наближено $\mathrm{arctg}\,0{,}98$.

Розв'язання. Для знаходження наближеного значення функції,

використаємо формулу $f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$ В нашому випадку $\mathrm{arctg}\,0{,}98$ – значення функції $f(x) = \mathrm{arctg}x$ при $x = \ = x_0 + \Delta x$ =0,98. Покладемо x_0=1 (значення, близьке до 0,98, при

якому $\mathrm{arctg}x$ легко обчислюється без таблиці: $\mathrm{arctg}x_0 = \mathrm{arctg}1 =$

$= \dfrac{\pi}{4}$). Тоді $\Delta x = 0{,}98 - 1 = -0{,}02.$

Оскільки $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, то $f'(x_0) = f'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Отже,

$$\mathrm{arctg}\,0{,}98 = \mathrm{arctg}(1 + (-0{,}02)) \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(-0{,}02) \approx 0{,}7754.$$

Приклад 4.5. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = x^4 + 3$ в точці $M_0(1;4)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$ відповідно мають вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{і} \quad y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Знайдемо похідну заданої функції і її значення в точці M :

$f'(x) = 4x^3, \quad f'(1) = 4.$ Тоді $y - 4 = 4(x - 1)$ або $4x - y = 0$ - рівняння дотичної, а $y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 1), \quad x + 4y - 17 = 0$ – рівняння нормалі.

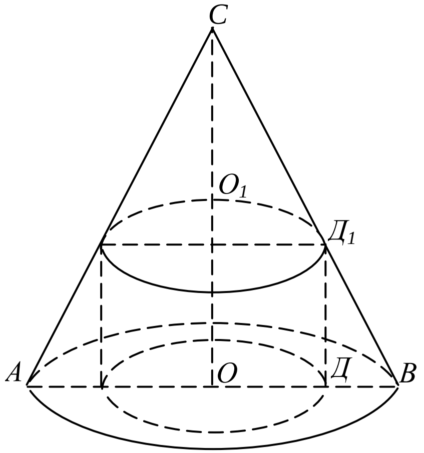


Рис. 6

Приклад 4.6. Знайти найбільший об'єм циліндра, вписаного в заданий конус.

Розв'язання.

1) *Визначаємо, які величини фіксовані (відомі з умови задачі), а які змінні.*

Оскільки задано конус, то $AO=R$ і $OC=H$ – фіксовані величини.

В конус можна вписати багато циліндрів, змінюючи його висоту OO_1 і радіус $O_1Д_1$. Тому $OO_1=x$ і $O_1Д_1=y$ – змінні величини (невідомі).

2) *Вибираємо незалежну змінну.*

Нехай висота циліндра $OO_1=x$ – незалежна змінна – аргумент, причому x є $[0;H]$.

3) *За умовою задачі визначаємо функцію двох змінних $z = f(x;y)$.*

У нашому випадку об'єм циліндра $V=V(x;y)=\pi xy^2$ – шукана функція.

4) *Виражаємо одну змінну через іншу.*

Для нашого випадку виразимо змінну y через змінну x.

З подібності трикутників BOC і $Д_1O_1C$ випливає, що $\frac{R}{y} = \frac{H}{H - x}, \; y = \frac{R(H - x)}{H}.$

Тоді $V=\pi x\left(\dfrac{R(H-x)}{H}\right)^2=\dfrac{\pi R^2}{H^2}x(H-x)^2$ - досліджувана функція.

5) *Знаходимо критичні точки знайденої функції.*

$$V'(x)=\frac{\pi R^2}{H^2}\left((H-x)^2-2x(H-x)\right)=\frac{\pi R^2}{H^2}(H-x)(H-3x).$$

$$V'(x)=0 \Rightarrow x_1=H \;\; і \;\; x_2=\frac{H}{3}.$$

Оскільки при $x<\dfrac{H}{3}$ $V'(x)>0$, а при $x>\dfrac{H}{3}$ $V'(x)<0$ то в точці $x=\dfrac{H}{3}$ - функція має максимум.

Отже, максимальний об'єм циліндра

$$V=V\left(\frac{H}{3}\right)=\frac{\pi R^2}{H^2}\cdot\frac{H}{3}\left(H-\frac{H}{3}\right)^2=\frac{4}{27}\pi R^2 H.$$

Приклад 4.7. Подати число 66 у вигляді суми двох доданків так, щоб добуток цих чисел був найбільшим.

Розв'язання. Нехай одне із задуманих чисел x, а друге – y. За умовою задачі $x+y=66$, звідки $y=66-x$. Добуток чисел $P=xy=x(66--x)=66x-x^2$ – досліджувана функція. Знаходимо $P'(x)=66-2x.$ $P'(x)=0$ при $x=33$. Ця точка буде критичною. Оскільки $P''(x)=-2<0$, то в точці $x=33$ досліджувана функція має максимум. При цьому $y=66-33=33$.

Отже, добуток чисел буде найбільшим, якщо $x=y=33$.

Завдання для самоконтролю

1. Користуючись правилами диференціювання, знайти похідні y'_x заданих функцій:

а) $y=4^{\cos^2 x}+x^7\mathrm{arctg}2\mathrm{x}$; б) $y=\ln\sqrt[8]{\left(\dfrac{8x-1}{x^8+3}\right)^5}$;

в) $y=(\cos x)^{\mathrm{arctg}\,x}$; г) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\dfrac{t}{t+1}; \end{cases}$ д) $y=x^2\sin 2x,\ y^{///}-?$

2. Обчислити наближено

а) $\ln 0{,}9$; б) $\sqrt[4]{15{,}8}$.

3. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y=\dfrac{3x-4}{2x-3}$ в точці $M_0(2;2)$.

4. Визначити найменшу площу рівнобедреного трикутника, описаного навколо кола радіуса r.

Відповіді до завдань для самоконтролю

Тема 1

1. а) $\{(2;3)\}$; б) $\left\{\left(x_1\in R; x_2=\dfrac{3x_1-5}{4}\right)\right\}$; в) несумісна;

г) $\{(2;-1;0)\}$; д) несумісна;

е) $\left\{\left(x_1=\dfrac{9-x_3}{4}; x_2=\dfrac{3x_3+3}{2}; x_3\in R\right)\right\}$.

2. а) 10; б) -56; в) 10,5; г) $\sqrt{129}$.

3.а) $\overline{AB}$ =(-1;2;1), $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{6}$; $\overline{AC}$ =(0;1;-2), $\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{5}$; б) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$;

в) $\sqrt{5}$.

4. α = -3.

Тема 2

1.а) AB: $6x-7y-3=0$, $\overline{n}_1=(6;-7)$, $k_{AB}=\dfrac{6}{7}$;

AC: $2x+y-11=0$, $\overline{n}_2=(2;1)$, $k_{AC}=-2$; б) $\dfrac{x}{\frac{11}{2}}+\dfrac{y}{11}=1$;

в) $2x-9y+19=0$; г) $7x+6y-56=0$, $|CE|\approx 4{,}34$ (лін.од.);

д) $\varphi\approx 76^0$; е) 1. $x-2y-3=0$, 2. $2x+y+9=0$; є) $\left(1;\dfrac{7}{3}\right)$.

2. $(x-5)^2+(y-6)^2=13$.

3. $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{108}=1$.

4. a=3, b=2, $F_1(0;-\sqrt{5})$, $F_2(0;\sqrt{5})$, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

5. $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{36}=1$.

6. $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$, $\varepsilon=\dfrac{5}{4}$, $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.

7. (2;1), (-6;9).

8. а) $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ – коло;

б) $\dfrac{(x+4)^2}{9}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$ – еліпс; в) $\dfrac{(x-6)^2}{30}-\dfrac{(y-3)^2}{5}=1$ – гіпербола; г) $(x-4)^2=-2(y+1)$ – парабола.

Тема 3

1. а) $x\in[-1;+\infty)$; б) $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)\cup(3;+\infty)$;
в) $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; г) $x\in[1;3)$; д) $x\in R$.

2. а) $\frac{3}{5}$; б) 0; в) ∞; г) $\frac{1}{2}$; д) $-\frac{3}{7}$; е) $\frac{1}{4}$; є) $\frac{3}{2}$; ж) $\frac{25}{2}$; з) $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. x=1 – точка розриву І-го роду.

Тема 4

1. а) $y' = -4^{\cos^2 x}\ln 4 \sin 2x + 7x^6 \operatorname{arctg} 2x + \frac{2x^7}{1+4x^2}$;

б) $y' = \frac{5}{8x-1} - \frac{5x^7}{x^8+3}$;

в) $y' = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}\left(\frac{\ln\cos x}{1+x^2} - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arctg} x\right)$; г) -1;

д) $y''' = -4(2x^2\cos 2x + 6x\sin 2x - 3\cos 2x)$.

2. а) -0,1; б) $\approx$ 1,994.

3. $x+y-4=0;$ $x-y=0$.

4. $3\sqrt{3}r^2$.

Використана та рекомендована література

1. Антонюк Р. А. Вища математика : навчальний посібник. Рівне : НУВГП, 2005. 246 с.
2. Бараненков Г. С. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под ред. Демидовича Б. П. М. : Наука. 1972. 480 с.
3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1, 2. М. : Высшая школа, 1986.
4. Каплан И. А. Практические занятия по высшей математике. Ч.1-3. Харьков : ХГУ, 1972. 946 с.
5. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М. : Наука. 1980. 240 с.
6. Лубенська Т. В., Чупаха Л. Д. Вища математика в таблицях : довідник. К. : МАУП, 1999. 88 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т. 1, 2. М. : Наука, 1987.