

Бомба А. Я., д.т.н., професор, Мороз І. П., к.ф.-м.н., доцент
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ЧИСЕЛЬНО-АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ МОДЕЛЬНИХ ЗАДАЧ ПРО СТАЦІОНАРНИЙ РОЗПОДІЛ НОСІІВ ЗАРЯДУ В АКТИВНІЙ ОБЛАСТІ P-I-N-ДІОДІВ

Розроблено метод прогнозування стаціонарного розподілу концентрації електронно-діркової плазми в *i*-області об'ємних *p-i-n*-діодів, який забезпечує можливість адекватно описувати стан плазми не тільки всередині активної області діода (відтворюючи результати застосування наближення амбіполярної дифузії), але й, що важливо, поблизу зон *p-i*- та *n-i*-контактів. Побудовано відповідну математичну модель у вигляді нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи рівнянь неперервності струму носіїв заряду та Пуассона. Отримано її наближений розв'язок у вигляді відповідних асимптотичних рядів за степенями малого параметра. Проведено комп'ютерний експеримент.

Ключові слова: метод збурень; сингулярно збурена задача; асимптотичний ряд; примежова функція; дифузійно-дрейфовий процес; об'ємний *p-i-n*-діод.

Вступ. Базова математична модель

P-i-n-діоди – нелінійні активні елементи надвисокочастотної (НВЧ) техніки, які широко використовуються для комутації електромагнітного поля. Робота такого пристрою ґрунтується на зміні провідності *i*-області (активної області) діода під дією струму управління. Базові характеристики *p-i-n*-діода – згасання, що вноситься у лінію передач, швидкодію – визначає накопичений в *i*-області заряд (електронно-діркова плазма) [1; 2].

Для оцінки інтегральних характеристик *p-i-n*-діода (провідність, ємність, індуктивність) широко використовується метод еквівалентних схем (наприклад, [3; 4]). Більш інформативними є дифузійно-дрейфові математичні моделі (наприклад, [5; 6]), які дозволяють отримати базові характеристики діода на основі дослідження (у межах гідродинамічного наближення) процесу

протікання електронно-діркового струму через пристрій з урахуванням фізичних властивостей напівпровідникового матеріалу, рекомбінаційно-генераційних ефектів, розігріву тощо.

У загальному випадку математична модель р-і-n-діода у гідродинамічному наближенні подається нелінійною системою диференціальних рівнянь в частинних похідних, які доповнюються відповідними граничними умовами.

В основу базової математичної моделі, яка описує розподіл концентрації дірок (n), електронів (p) та потенціалу (φ) в активній області р-і-n-діодів (області $\Omega = \{(\rho, \theta, z) : 0 < \rho < R, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < H\}$) у стаціонарному режимі роботи пристрою, покладено рівняння неперервності струмів дірок, електронів та рівняння Пуассона [1; 6; 7]:

$$\begin{cases} \Delta n = \frac{e}{kT} (\nabla n \nabla \varphi + n \Delta \varphi) + \frac{1}{D_n \tau_n^*} n, \\ \Delta p = \frac{e}{kT} (-\nabla p \nabla \varphi - p \Delta \varphi) + \frac{1}{D_p \tau_p^*} p, \\ \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{e} \Delta \varphi = -(p - n + N_l), \end{cases} \quad (1)$$

де τ_p^* , τ_n^* – характерні релаксаційні часи життя дірок та електронів в і-області (у загальному випадку залежні від локальної концентрації електронів та дірок і визначаються певним механізмом рекомбінації носіїв заряду); $N_l = N_a - N_d \equiv N_l(z)$ – задана функція профілю легування (описує різницю концентрацій акцепторів і донорів в активній області); D_p , D_n – коефіцієнти дифузії відповідно дірок та електронів; k – постійна Больцмана; T – температура; e – заряд електрона; ε , ε_0 – відносна діелектрична проникність напівпровідника та діелектрична стала.

Граничні умови на інжекційних контактах (поверхні $\partial\Omega_n$, $\partial\Omega_p$) записують з урахуванням припущення про те, що через межу $\partial\Omega_n$ струм переносять лише електрони, відповідно через $\partial\Omega_p$ – дірки (при широкій активній області більша частина інжекттованих носіїв заряду рекомбінує в і-області і не встигає потрапити в область протилежного контакту) [2; 6]:

$$\left((\vec{j}_n - \vec{j}_{nr}) \cdot \vec{\nu} \right)_{\partial\Omega_n} = J, \quad \left((\vec{j}_p - \vec{j}_{pr}) \cdot \vec{\nu} \right)_{\partial\Omega_p} = 0, \quad (2)$$

$$\left((\vec{j}_p - \vec{j}_{pr}) \cdot \vec{v} \right) \Big|_{\partial\Omega_p} = J, \quad \left((\vec{j}_n - \vec{j}_{nr}) \cdot \vec{v} \right) \Big|_{\partial\Omega_p} = 0, \quad (3)$$

де J – стала, що визначає густину інжекційного струму (струму управління); \vec{v} – вектор нормалі до границі області; $\vec{j}_{n,p}$ – густина струму електронів і дірок; $\vec{j}_{rn,rp}$ – густина рекомбінаційного струму.

Враховуючи співвідношення $\vec{j}_p = e\mu_p p \vec{E} - eD_p \text{grad} p$, $\vec{j}_n = e\mu_n n \vec{E} + eD_n \text{grad} n$, $\vec{j}_{rp} = e\alpha_p p \vec{v}$, $\vec{j}_{rn} = e\alpha_n n \vec{v}$, можна показати, що умови (2, 3) еквівалентні наступним:

$$\left. \frac{\partial n}{\partial v} - \gamma_n n \right|_{\partial\Omega_n} = \frac{J}{eD_n}, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial v} \right|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial v} - \gamma_p p \right|_{\partial\Omega_p} = -\frac{J}{eD_p}, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial v} \right|_{\partial\Omega_p} = 0, \quad (5)$$

де $\gamma_n = \left(\frac{\alpha_n}{\mu_n} - \frac{\alpha_p}{\mu_p} \right) \frac{\mu_n}{D_n}$, $\gamma_p = \left(\frac{\alpha_n}{\mu_n} - \frac{\alpha_p}{\mu_p} \right) \frac{\mu_p}{D_p}$, $\alpha_{n,p}$ – коефіцієнти

поверхневої рекомбінації відповідно електронів і дірок.

Для потенціалу використовують наступні граничні умови:

$$\varphi \Big|_{\partial\Omega_n} = 0, \quad \varphi \Big|_{\partial\Omega_p} = U, \quad (6)$$

де U – стала, що визначає напругу на р-і-п-структурі. Припускається (за умови дії високочастотного сигналу), що напруга у основному прикладена до високоомної ділянки р-і-п-структури, падінням напруги на інжектуючих контактах нехтують.

Аналогічним способом визначають граничні умови для потенціалу і концентрації дірок та електронів на бічній поверхні р-і-п-діода:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial p}{\partial v} - \beta_p p \right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial n}{\partial v} - \beta_n n \right|_{\partial\Omega_0} = 0 \quad \left(\beta_p = \frac{\alpha_p}{D_p} \right). \quad (7)$$

Відмітимо, що стаціонарна математична модель р-і-п-діода (1–7) є однією із найпростіших і широко використовуваних моделей, проте вона не враховує генераційні, теплові ефекти у напівпровіднику, особливості протікання інжекційних процесів на контактах. Очевидно, що пошук розв'язку навіть спрощеної системи

нелінійної рівнянь (1) з граничними умовами (4–7) є складною математичною задачею.

Розв'язок задачі (1–7) отримують чисельними методами або шукають способи лінеаризації системи рівнянь (1). Наприклад, при аналітичному моделюванні використовується наближення амбіполярної дифузії носіїв заряду [1; 7], в межах якого припускають наближену рівність концентрації електронів і дірок в активній області діода. При цьому система рівнянь (1) приводиться до лінійного рівняння дифузії, розв'язок якого можна легко знайти в аналітичному вигляді. Очевидно, що умова рівності концентрацій порушується поблизу інжектуючих контактів і отриманий результат у кінцевому підсумку не забезпечує належного рівня адекватності моделі.

Відомо також, що для розв'язання нелінійних рівнянь математичної фізики розроблено та широко використовуються асимптотичні методи [8–13]. Так, зазначені методи використовуються для моделювання процесів в напівпровідникових р-п-діодах [14; 15]. Постановка задачі (1–7) відрізняється від висвітлених у літературних джерелах геометрією області (р-і-п-діоди – це напівпровідникові діоди з широкою базою, а в р-п-діодах наявний різкий перехід між областями з різними типами провідності), граничними умовами. Авторам не відоме застосування асимптотичних підходів розрахунку характеристик р-і-п-діодів.

Мета роботи – розробити підхід до розв'язання нелінійної системи рівнянь неперервності струму та Пуассона з відповідними граничними умовами у аналітичному вигляді на основі застосування методології теорії збурень.

Постановка задачі

Характерні лінійні розміри об'ємних р-і-п-діодів такі, що справедливе співвідношення $R \gg H$. При цьому дифузійно-рекомбінаційні процеси на бічній поверхні діода практично не впливають на накопичення об'ємного заряду. Тому доцільним є вивчення одновимірної моделі досліджуваної системи.

Після застосування процедури нормування ($\tilde{z} = \frac{z}{H}$ ($0 < \tilde{z} < 1$),

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{e\varphi(z)}{kT}, \quad \tilde{U}(z) = \frac{eU(z)}{kT}, \quad \tilde{n}(z) = \frac{n(z)}{N_i} \quad (0 \leq \tilde{n}(z) \leq \frac{n_{\max}}{N_i}), \quad \tilde{p}(z) = \frac{p(z)}{N_i}$$

($0 \leq \tilde{p}(z) \leq \frac{P_{\max}}{N_i}$), $\tilde{N}_d(z) = \frac{N_d(z)}{N_i}$, де N_i – стала, визначає

концентрацію електронів у власному напівпровіднику, залежить від обраного матеріалу напівпровідника; T – стала, визначає температуру (300° К); k – стала Больцмана) система рівнянь (1) набуває вигляду (знак “~” надалі опущено):

$$\begin{cases} \mu\varphi'' = -(p - n + N_d), \\ n'' = n'\varphi' + n\varphi'' + A_n n, \\ p'' = -p'\varphi' - p\varphi'' + A_p p. \end{cases} \quad (8)$$

В (8) використано позначення: $\mu = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 kT}{e^2 H^2 N_i}$ (малий параметр

$$\mu \sim 10^{-6} \div 10^{-8}), \quad A_n = \frac{H^2}{D_n \tau_n^*}, \quad A_p = \frac{H^2}{D_p \tau_p^*}.$$

При цьому умови (4–7) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial n}{\partial z} - \gamma_n H n \right|_{z=0} &= \frac{J}{e D_n} \frac{H}{N_i}, & \left. \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0, \\ \left. \frac{\partial p}{\partial z} - \gamma_p H p \right|_{z=1} &= -\frac{J}{e D_p} \frac{H}{N_i}, & \left. \frac{\partial n}{\partial z} \right|_{z=1} &= 0, \\ \varphi|_{z=0} &= 0, & \varphi|_{z=1} &= U. \end{aligned} \quad (9)$$

Побудова асимптотичного розв'язку

Задача (8–9) містить природним чином сформований малий параметр μ , який є множником біля похідної в рівнянні Пуассона. Наявність малого параметра в постановці задачі дозволяє залучити асимптотичні методи теорії збурень для її розв'язання.

Виходячи із постановки задачі та беручи до уваги те, що на структуру розв'язку в основному впливають умови на контактних ділянках (точки околу точок $z=0$, $z=1$), через які здійснюється наповнення i -області неосновними носіями заряду, пропонуємо шукати розв'язок у вигляді наступних асимптотичних рядів [9–13]:

$$\varphi = \varphi(z, \mu) = \Phi_{(m)}(z, \mu) + \underline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) + \overline{\Phi}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu) + R_{\varphi(m)}(z, \mu) = \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=0}^m \mu^i \varphi_i(z) + \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{\Phi}_i(\underline{\xi}) + \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{\Phi}_i(\overline{\xi}) + R_{\varphi(m)}(z, \mu), \\
 n = n(z, \mu) &= N_{(m)}(z, \mu) + \underline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) + \overline{N}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu) + R_{n(m)}(z, \mu) = \\
 &= \sum_{i=0}^m \mu^i n_i(z) + \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{N}_i(\underline{\xi}) + \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{N}_i(\overline{\xi}) + R_{n(m)}(z, \mu), \\
 p = p(z, \mu) &= P_{(m)}(z, \mu) + \underline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu) + \overline{P}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu) + R_{p(m)}(z, \mu) \\
 &= \sum_{i=0}^m \mu^i p_i(z) + \sum_{i=0}^m \mu^i \underline{P}_i(\underline{\xi}) + \sum_{i=0}^m \mu^i \overline{P}_i(\overline{\xi}) + R_{p(m)}(z, \mu),
 \end{aligned}$$

де $\Phi_{(m)}(z, \mu)$, $N_{(m)}(z, \mu)$, $P_{(m)}(z, \mu)$ – регулярна частина асимптотики; $\underline{\Phi}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$, $\underline{N}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$, $\underline{P}_{(m)}(\underline{\xi}, \mu)$, $\overline{\Phi}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu)$, $\overline{N}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu)$, $\overline{P}_{(m)}(\overline{\xi}, \mu)$ – примежові поправки асимптотики відповідно в околах точок $z=0$ та $z=l$ ($\underline{\xi} = \frac{z}{\sqrt{\mu}}$, $\overline{\xi} = \frac{1-z}{\sqrt{\mu}}$ – відповідні регуляризуючі розтяги); $R_{\varphi(m)}(z, \mu)$, $R_{n(m)}(z, \mu)$, $R_{p(m)}(z, \mu)$ – залишкові члени.

Підставляючи (10) в рівняння (8) та умови (9) та застосувавши стандартну процедуру «прирівнювання» [8–13], формуємо, аналогічно до [14; 15], задачі для пошуку членів розкладу. Зокрема, для знаходження головних членів асимптотики ($\varphi_0(z)$, $n_0(z)$, $p_0(z)$, $\underline{\Phi}_0(\underline{\xi})$, $\underline{N}_0(\underline{\xi})$, $\underline{P}_0(\underline{\xi})$, $\overline{\Phi}_0(\overline{\xi})$, $\overline{N}_0(\overline{\xi})$, $\overline{P}_0(\overline{\xi})$) маємо:

$$\begin{cases} n_0 = p_0, \\ n_0'' - (n_0 \varphi_0')' - A_n n_0 = 0, \\ p_0'' + (p_0 \varphi_0')' - A_p p_0 = 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}^2} = -(\underline{P}_0 - \underline{N}_0), \\ \frac{\partial^2 \underline{N}_0}{\partial \underline{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left(\underline{N}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 \underline{P}_0}{\partial \underline{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \underline{\xi}} \left(\underline{P}_0 \frac{\partial \underline{\Phi}_0}{\partial \underline{\xi}} \right) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}^2} = -(\bar{P}_0 - \bar{N}_0), \\ \frac{\partial^2 \bar{N}_0}{\partial \bar{\xi}^2} - \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\bar{N}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{P}_0}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \left(\bar{P}_0 \frac{\partial \bar{\Phi}_0}{\partial \bar{\xi}} \right) = 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dn_0}{dz} - \gamma_n H n_0 - \gamma_n H N_0 \right|_{z=0} &= \frac{J}{eD_n} \frac{H}{N_i}, & \left. \frac{dp_0}{dz} \right|_{z=0} &= 0, \\ \left. \frac{dN_0}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= 0, & \left. \frac{dP_0}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= 0, & \varphi_0 + \Phi_0 \Big|_{z=0} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dp_0}{dz} - \gamma_p H p_0 - \gamma_p H \bar{P}_0 \right|_{z=1} &= -\frac{J}{eD_p} \frac{H}{N_i}, & \left. \frac{dn_0}{dz} \right|_{z=1} &= 0, \\ \left. \frac{d\bar{P}_0}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= 0, & \left. \frac{d\bar{N}_0}{d\xi} \right|_{\xi=0} &= 0, & \varphi_0 + \bar{\Phi}_0 \Big|_{y=1} &= U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \Phi_0(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} N_0(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} P_0(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{\Phi}_0(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{N}_0(\xi) = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{P}_0(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Зауважимо, що умови (15) повинні виконуватись для того, щоб відповідні функції мали властивості примежових.

Шляхом виключення із системи рівнянь (11) функції потенціалу отримуємо еквівалентне системі лінійне диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 n_0}{dz^2} - \frac{1}{2} (A_n + A_p) n_0 = 0, \quad (16)$$

яке також отримують і в рамках наближення амбіполярної дифузії (режим самоузгодженого поля) [1; 6; 7] теорії р-і-п-діодів.

Загальний розв'язок рівняння (16) подаємо у вигляді:

$$p_0(z) = n_0(z) = C_1 \exp\left(-\frac{z}{L}\right) + C_2 \exp\left(\frac{z}{L}\right), \quad \frac{1}{L^2} = \frac{1}{2} (A_n + A_p). \quad (17)$$

Знайдемо загальні розв'язки системи рівнянь (12) (аналогічно розглядається система рівнянь (13)). Введемо заміни $V = \underline{P}_0 - \underline{N}_0$, $W = \underline{P}_0 + \underline{N}_0$. Тоді (12) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \underline{\Phi}''_0 = V, \\ W'' + (V\underline{\Phi}'_0)' = 0, \\ V'' + (W\underline{\Phi}'_0)' = 0. \end{cases}$$

Отриману систему рівнянь приводимо до системи рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \underline{\Phi}'_0 = \Pi, \\ \Pi' = V, \\ W' + (V\Pi) = C_W, \\ V' + (W\Pi) = C_V, \end{cases} \quad (18)$$

де C_W, C_V – сталі інтегрування.

Система рівнянь (18) доповнюється граничними умовами на межі $\underline{\xi} = 0$ і при $\underline{\xi} \rightarrow \infty$. Граничні умови записуємо на основі співвідношень (14) і (15) у вигляді:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{d\underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad \left. \frac{dW}{d\underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = 0, \quad (19) \\ \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} V(\underline{\xi}) = \lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} W(\underline{\xi}) = 0. \end{aligned}$$

Для встановлення характеру поведінки функції $\Pi(\underline{\xi})$ скористаємось її фізичним змістом. Згідно (18) ця функція має зміст напруженості електричного поля, що створене примежовими зарядами. На межі області ($z = 0$) значення потенціалу стале, тому

$$\left. \frac{d\underline{\Phi}'_0}{d\underline{\xi}} \right|_{\underline{\xi}=0} = \Pi|_{\underline{\xi}=0} = 0. \text{ У глибині активної області (при } \underline{\xi} \rightarrow \infty) \text{ значення}$$

напруженості поля стале ($\lim_{\underline{\xi} \rightarrow \infty} \Pi = \Pi_\infty$).

Здійснивши підстановку V з другого рівняння системи (18) у третє, виконавши інтегрування і скориставшись граничними умовами (19), отримуємо:

$$W = -\frac{\Pi^2}{2} + \frac{\Pi_\infty^2}{2}, \quad C_W = 0. \quad (20)$$

З (3) і (4) рівнянь системи (18) слідує характер зв'язку між функціями $V(\underline{\xi})$, $W(\underline{\xi})$: $V^2 = W^2 \Rightarrow V = \pm W$. Із фізичних міркувань та із врахуванням способу введення цих функцій в останньому виразі обирається знак "-". Остаточоно:

$$V = \frac{\Pi^2}{2} - \frac{\Pi_\infty^2}{2}. \quad (21)$$

Підстановка (21) у друге рівняння системи (18) дозволяє отримати диференціальне рівняння для визначення функції $\Pi(\underline{\xi})$:

$$\Pi' = \frac{\Pi^2}{2} - \frac{\Pi_\infty^2}{2}. \quad (22)$$

У результаті інтегрування (22) отримуємо одну із невідомих системи (18) у вигляді:

$$\Pi(\underline{\xi}) = -\Pi_\infty \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\Pi_\infty \underline{\xi}}{2}\right)}{\operatorname{ch}\left(\frac{\Pi_\infty \underline{\xi}}{2}\right)}. \quad (23)$$

Таким чином, примежові концентрації носіїв заряду з співвідношень (23), (20), (21) та $V = \underline{P}_0 - \underline{N}_0$, $W = \underline{P}_0 + \underline{N}_0$ отримуємо у наступному вигляді:

$$\underline{P}_0 = 0, \quad (24)$$

$$\underline{N}_0(\underline{\xi}) = \Pi_\infty^2 \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\Pi_\infty \underline{\xi}}{2} \right) \right).$$

Розв'язки задачі (13-14) знаходимо аналогічним способом. В результаті отримуємо примежові функції при $z = 1$:

$$\overline{P}_0(\overline{\xi}) = \Pi_\infty^2 \left(1 - \operatorname{th}^2 \left(\frac{\Pi_\infty \overline{\xi}}{2} \right) \right), \quad (25)$$

$$\overline{N}_0 = 0.$$

Зауважимо, що у функціях (24), (25) фігурує однакова стала Π_∞ , оскільки у глибині активної області (при $\underline{\xi} \rightarrow \infty$ та $\overline{\xi} \rightarrow \infty$) значення відповідних потенціалів електричного поля у системі співпадають.

Для побудови частинного розв'язку задачі потрібно знайти сталі C_1 , C_2 , Π_∞ з граничних умов (14).

В результаті отримуємо наступну систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих:

$$\left(-\frac{1}{L}C_1 + \frac{1}{L}C_2\right) - \gamma_n H(C_1 + C_2) - \gamma_n H \Pi_\infty^2 = \frac{J}{eD_n} \frac{H}{N_i}, \quad (26)$$

$$\frac{1}{L} \left(-C_1 \exp\left(-\frac{1}{L}\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{L}\right)\right) - \gamma_p H \left(C_1 \exp\left(-\frac{1}{L}\right) + C_2 \exp\left(\frac{1}{L}\right)\right) -$$

$$-\gamma_p H \Pi_\infty^2 = -\frac{J}{eD_p} \frac{H}{N_i},$$

$$\int_0^1 \left(th \left(\frac{\Pi_\infty z}{2\sqrt{\mu}} \right) + th \left(\frac{\Pi_\infty (1-z)}{2\sqrt{\mu}} \right) \right) dz = \frac{U}{\Pi_\infty}.$$

Аналогічно до [10] знаходимо наступні поправки (регулярні та примежові) до одержаної головної частини розв'язку та оцінюємо залишкові члени, а саме, при додаткових умовах гладкості та їх узгодженості встановлюємо, що всі вони $(R_{\varphi(m)}(z, \mu), R_{n(m)}(z, \mu), R_{p(m)}(z, \mu))$ мають порядок малості $O(\mu^i)$.

Результати чисельного моделювання

Наближеним розв'язком нелінійної задачі (8–9) є функція розподілу концентрації носіїв заряду в i -області p - i - n -діода виду (містить головні члени асимптотичних рядів (10)):

$$p(z) + n(z) = 2C_1 \exp\left(-\frac{z}{L}\right) + 2C_2 \exp\left(\frac{z}{L}\right) + \Pi_\infty^2 \left(\left(1 - th^2 \left(\frac{\Pi_\infty z}{2\sqrt{\mu}} \right) \right) + \left(1 - th^2 \left(\frac{\Pi_\infty (1-z)}{2\sqrt{\mu}} \right) \right) \right),$$

$$C_2 = \frac{B(1 + \gamma_n HL) - A(1 + \gamma_p HL) e^{-\frac{1}{L}}}{(1 + \gamma_n HL)(1 + \gamma_p HL) e^{\frac{1}{L}} - (1 - \gamma_n HL)(1 + \gamma_p HL) e^{-\frac{1}{L}}}, \quad (27)$$

$$C_1 = \frac{-A(1 + \gamma_n HL) + (1 - \gamma_n HL)C_2}{(1 + \gamma_n HL)},$$

$$\ln ch \left(\frac{\Pi_\infty}{2\sqrt{\mu}} \right) = \frac{U}{4\sqrt{\mu}},$$

$$A = \frac{J}{eD_n} \frac{HL}{N_i} + \gamma_n HL \Pi^2_{\infty}, \quad B = -\frac{J}{eD_p} \frac{HL}{N_i} + \gamma_p HL \Pi^2_{\infty}.$$

Функція розподілу концентрації носіїв заряду, що отримана у результаті розв'язання рівняння амбіполярної дифузії має наступний вигляд:

$$p(z) + n(z) = 2\tilde{C}_1 \exp\left(-\frac{z}{L}\right) + 2\tilde{C}_2 \exp\left(\frac{z}{L}\right), \quad (28)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{B(1 + \gamma_n HL) - A(1 + \gamma_p HL) e^{-\frac{1}{L}}}{(1 + \gamma_n HL)(1 + \gamma_p HL) e^{\frac{1}{L}} - (1 - \gamma_n HL)(1 + \gamma_p HL) e^{-\frac{1}{L}}},$$

$$\tilde{C}_1 = \frac{-A(1 + \gamma_n HL) + (1 - \gamma_n HL) C_2}{(1 + \gamma_n HL)},$$

$$A = \frac{J}{eD_n} \frac{HL}{N_i}, \quad B = -\frac{J}{eD_p} \frac{HL}{N_i}.$$

Відмітимо, що в результаті застосування асимптотичного методу традиційний розв'язок природнім чином з'являється на одному зі етапів розв'язання задачі як один із головних членів асимптотики. Знайдені примежові функції уточнюють традиційну модель [1]. Окрім цього, відмінність між (27) та (28) забезпечують граничні умови різного виду. У запропонованій моделі розподілу концентрації плазми (27) з'являється додатковий параметр – напруга на контактах U , що також певною мірою забезпечує підвищення рівня адекватності побудованої моделі.

Результати чисельного моделювання показано на графіках залежності концентрації електронів і дірок в активній області р-і-п-діода (рис. 1–3). В експериментах використано наступні значення сталих: $N_i = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$, $k = 1,38 \cdot 10^{23} \text{ Дж/К}$, $J = 0,4 \text{ мА/см}^2$, $U = 5 \text{ мВ}$, $H = 30 \text{ мкм}$, $D_n = 30 \text{ см}^2/\text{с}$, $D_p = 6 \text{ см}^2/\text{с}$, $\tau_n^* = 20 \text{ мкс}$, $\tau_p^* = 25 \text{ мкс}$.

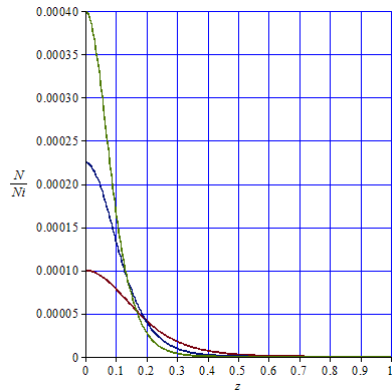


Рис. 1. Залежність примежової концентрації електронів від координати при різних відносних напругах на контактах

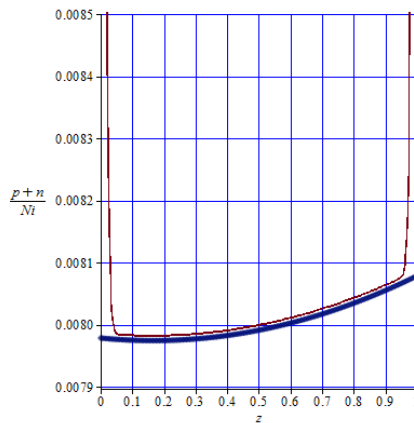


Рис. 2. Залежність сумарної концентрації електронів і дірок (потовщена лінія – модель амбіполярної дифузії)

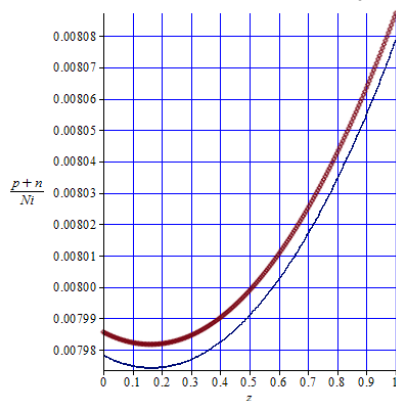


Рис. 3. Залежність концентрації електронів і дірок (регулярні члени розкладу) від координати. Тонка лінія – модель амбіполярної дифузії

На рис. 2 показано розподіли концентрації носіїв заряду в i -області. Тонка крива відображає результати моделювання асимптотичними методами, потовщена – результати моделювання в рамках наближення амбіполярної дифузії. На рис. 3 відображено аналогічні залежності (без урахування вкладу примежових функцій): тонкою лінією показано розподіл концентрації носіїв заряду, що подається головними членами регулярної частини асимптотики; потовщеною – результат розв'язання рівняння амбіполярної дифузії. Величини накопиченого заряду у активній області при зазначених вище густині струму та напрузі на контактах, що оцінені з використанням удосконаленої моделі та в рамках наближення амбіполярної дифузії, відрізняються в межах 3%. Із зростанням значення густини струму та прикладеної напруги різниця оцінок величини накопиченого заряду також зростає. Така поведінка пояснюється зростанням концентрації носіїв заряду у контактних зонах, яку не можна відслідкувати в рамках застосування інших модельних підходів.

Висновки

Розроблено математичну модель у вигляді нелінійної сингулярно збуреної крайової задачі для системи рівнянь неперервності струму носіїв заряду та Пуассона для прогнозування стаціонарного розподілу концентрації електронно-діркової плазми в i -області об'ємних p - i - n -діодів, яка забезпечує можливість адекватно описувати стан плазми не тільки у внутрішності активної області діода (відтворюючи результати застосування наближення амбіполярної дифузії), а і, що важливо, поблизу зон p - i - та n - i -контактів.

Знайдені аналітичні функціональні залежності удосконалюють традиційну модель, розроблену в рамках застосування наближення амбіполярної дифузії, введенням примежових поправок. Показано, що навіть головні члени асимптотик (регулярні частини та примежові поправки) адекватно моделюють стаціонарний розподіл носіїв заряду в активній області p - i - n -діодів.

Згідно з даними чисельних експериментів – концентрація носіїв заряду у приконтактних областях діода значно перевищує концентрацію носіїв внутрішньої області. Цей факт добре узгоджується із фізичним уявленням про роботу p - i - n -діода – в областях інжекції носіїв заряду певного типу концентрація цих носіїв значно перевищує концентрацію носіїв заряду протилежного типу,

тут не забезпечуються умови рівності концентрацій дірок та електронів, в межах якої працює наближення амбіполярної дифузії. Таким чином, запропонована модель вирішує протиріччя, закладене традиційною моделлю, з'являється можливість вивчати поведінку електронно-діркової плазми у приконтактних областях. Як і очікувалось, запропонований підхід навіть в межах головних частин розв'язку більш природно (у порівнянні з традиційними підходами) відображає суть досліджуваного процесу.

1. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. New York : Wiley-Interscience, 2006. 815 p.
2. Гусятинер М. С., Горбачев А. И. Полупроводниковые сверхвысококачественные диоды. М. : Радио и связь, 1985. 262 с.
3. Lebedev I. V., Shnitnikov A. S., Dyakov I. V., Borisova N. A. Impedance properties of high-frequency PIN diodes. *Solid-State Electronics*. 1998. Vol. 41. № 1. P. 121–128.
4. Grimalsky V. V., Kishenko Ya. I., Koshevaya S. V., Moroz I. P. The Interaction of Powerful Electromagnetic Waves With Integrated p-i-n-structures. *Physics and Engineering of Mm and Submm Waves : Doc. of Int. Symp.*, June 7–10, 1994. Kharkov, Ukraine. Vol. 1. P. 238–239.
5. Haine M. E., Rose F. W. G. On the conductance of p-i-n junctions at high microwave fields. *Solid-State Electron*. 1972. Vol. 15. No. 6. P. 687–705.
6. Адирович Э. И., Карагеоргий-Алкалаев П. М., Лейдерман А. Ю. Токи двойной инжекции в полупроводниках / под ред. Гальперина. М. : Советское радио, 1978. 320 с.
7. Бонч-Бруевич В. Л., Калашников С. Г. Физика полупроводников. М. : Наука, 1990. 685 с.
8. Тихонов А. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры. *Математический сборник*. 1952. № 3. Т. 31(73). С. 575–586.
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. *УМН*. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
10. Васильева А. Б. Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М. : Высш. шк., 1990. 208 с.
11. Бомба А. Я., Присяжнюк І. М., Присяжнюк О. В. Методи теорії збурень прогнозування процесів тепломасоперенесення в пористих та мікропористих середовищах. Рівне : О. Зень, 2017. 291 с.
12. Бомба А. Я. Про асимптотичний метод наближеного розв'язання однієї задачі масопереносу при фільтрації в пористому середовищі. *Український математичний журнал*. 1982. № 4. Т. 34. С. 37–40.
13. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
14. Беянин М. П. Об асимптотическом решении одной модели p-n- перехода. *Вычислительная математика и математическая физика*. 1986. № 2. Т. 26. С. 306–311.
15. Васильева А. Б., Стельмах В. Г. Сингулярно возмущенные системы теории

полупроводниковых приборов. *Вычислительная математика и математическая физика*. 1977. Т. 17. № 2. С. 339–348.

REFERENCES:

1. Sze S., Kwok K. *Physics of Semiconductor Devices*. New York : Wiley-Interscience, 2006. 815 p.
 2. Gusyatiner MS, Gorbachev AI *Semiconductor microwave diodes*. M. : Radio and communication, 1985. 262 p.
 3. Lebedev I. V., Shnitnikov A. S., Dyakov I. V., Borisova N. A. Impedance properties of high-frequency PIN diodes. *Solid-State Electronics*. 1998. Vol. 41. № 1. P. 121–128.
 4. Grimalsky V. V., Kishenko Ya. I., Koshevaya S. V., Moroz I. P. The Interaction of Powerful Electromagnetic Waves With Integrated p-i-n-structures. *Physics and Engineering of Mm and Submm Waves : Doc. of Int. Symp.*, June 7–10, 1994. Kharkov, Ukraine. Vol. 1. P. 238–239.
 5. Haine M. E., Rose F. W. G. On the conductance of p-i-n junctions at high microwave fields. *Solid-State Electron*. 1972. Vol. 15. No. 6. P. 687–705.
 6. Adirovich E. I., Karageorgiy-Alkalaev P. M., Leyderman A. Yu. Toki dvoynoy injektsii v poluprovodnikah / pod red. Galperina. M. : Sovetskoe radio, 1978. 320 s.
 7. Bonch-Bruevich V. L., Kalashnikov S. G. *Fizika poluprovodnikov*. M. : Nauka, 1990. 685 s.
 8. Tihonov A. Sistemy differentsialnykh uravneniy, sodержaschie малыe parametryi. *Matematicheskii sbornik*. 1952. № 3. T. 31(73). S. 575–586.
 9. Vishik M. I., Lyusternik L. A. Reguljarnoe vyirojdenie i pogranychnyy sloj dlya lineynykh differentsialnykh uravneniy s malym parametrom. *UMN*. 1957. T. 12. № 5. S. 3–122.
 10. Vasileva A. B. Butuzov V. F. Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmuscheniy. M. : Vyssh. shk., 1990. 208 s.
 11. Bomba A. Ya., Prysiazhniuk I. M., Prysiazhniuk O. V. Metody teorii zburon prohnozuvannia protsesiv teplomasoperenesennia v porystykh ta mikroporystykh seredovyshchakh. Rivne : O. Zen, 2017. 291 s.
 12. Bomba A. Ya. Pro asymptotychnyi metod nablyzhenoho rozv'iazannia odniiei zadachi masoperenosu pry filtratsii v porystomu seredovyshchi. *Ukrainskyi matematychnyi zhurnal*. 1982. № 4. T. 34. S. 37–40.
 13. Smith D. R. *Singular-Perturbation Theory. An Introduction with Applications*. Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1985. 520 p.
-

Bomba A. Ya., Doctor of Engineering, Professor, Moroz I. P., Candidate of Physico-Mathematical Sciences (Ph.D.), Associate Professor
(National University of Water and Environmental Engineering, Rivne)

**NUMERICAL-ASYMPTOTIC METHOD FOR SOLVING SINGULARLY
PERTURBED MODEL PROBLEMS ON THE STATIONARY DISTRIBUTION
OF CHARGE CARRIERS IN THE ACTIVE REGION OF
P-I-N-DIODES**

The method has been developed for predicting the electron-hole plasma concentration stationary distribution in the i-region of bulk p-i-n-diodes, which makes it possible to adequately describe the state of the plasma not only inside the active region of the diode (reproducing the results of applying the ambipolar diffusion approximation), but also, which is important, near the p-i- and n-i- contacts. The corresponding mathematical model in the form of a nonlinear singularly perturbed boundary value problem for the system of equations of the charge carriers current continuity and Poisson`s is constructed. Its approximate solution in the form of the corresponding asymptotic series in powers of a small parameter is obtained. The computer experiment is carried out.

Keywords: the perturbation method; singularly perturbed problem; asymptotic series; the boundary functions; diffusion-drift process; bulk p-i-n-diode.
