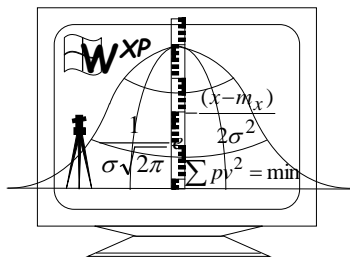


Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Навчально-науковий інститут агроекології та землеустрою
Кафедра геодезії та картографії



05-04-125M

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних та самостійних робіт
з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів»
для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня
за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій»
спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій»
денної та заочної форм навчання

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОХИБОК ВИМІРІВ

Рекомендовано науково-методичною
радою з якості ННІАЗ
Протокол № 10 від 25.04.2023 р.

Рівне – 2023

Методичні вказівки до виконання практичних та самостійних робіт з навчальної дисципліни «Математична обробка геодезичних вимірів» для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня за освітньо-професійною програмою «Геодезія та землеустрій» спеціальності 193 «Геодезія та землеустрій» денної та заочної форм навчання. Елементи теорії похибок вимірів [Електронне видання] / Тадеєв О. А. – Рівне : НУВГП, 2023. – 48 с.

Укладач: Тадеєв О. А., доцент кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Відповідальний за випуск: Янчук Р. М., завідувач кафедри геодезії та картографії, кандидат технічних наук, доцент.

Керівник групи забезпечення спеціальності 193 „Геодезія та землеустрій”: доктор сільськогосподарських наук, професор Мошинський В. С.

Зміст

Вступ.....	3
1. Оцінювання точності вимірів величин та їх функцій.....	7
2. Математична обробка рівноточних вимірів величини.....	16
3. Математична обробка нерівноточних вимірів величини.....	21
4. Обробка подвійних рівноточних вимірів однорідних величин.....	29
5. Обробка подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин.....	35
Література.....	43
Додатки.....	44

ВСТУП

Теорія похибок вимірів – розділ математичної обробки геодезичних вимірів, який вивчає методи кількісного та якісного оцінювання результатів вимірів та їх функцій. Основні завдання теорії похибок вимірів:

1. Систематизація вимірів та їх похибок.
2. Вивчення законів виникнення та розподілу похибок вимірів.
3. Встановлення критеріїв і методів оцінювання точності вимірів.
4. Визначення найбільш надійних значень результатів вимірів окремих величин та оцінка їх точності.
5. Оцінювання точності функцій результатів вимірів.

Вимір величини – це процес її порівняння з однорідною фізичною величиною, яку прийнято одиницею міри. Результат виміру величини – це підсумок виконання усіх вимірювальних операцій.

Для визначення надійного значення величини за результатами вимірів принципово важливим є кількість проведених вимірів. Відтак, у практику запроваджено чітку класифікацію вимірів за їх кількістю, як це показано на схемі рис. 1. Загальну кількість n проведених вимірів величини завжди розділяють на необхідні k і надлишкові r . Необхідною називають найменшу кількість вимірів, які потрібно виконати для визначення величини. Зокрема, при вимірах окремої величини кількість необхідних вимірів дорівнює одиниці. Але тільки один необхідний вимір не забезпечує контроль одержаного результату, що зумовлює невпевненість у його достовірності. Тому загальна кількість вимірів n повинна перевищувати кількість необхідних k . Різниця $r = n - k$ називається кількістю надлишкових вимірів. Наявність надлишкових вимірів величини є обов'язковою умовою проведення будь-яких вимірювальних дій. Надлишкові виміри забезпечують контроль одержаних результатів і дають змогу підвищувати їх якість.

Внаслідок впливу на виміри різноманітних факторів їх результати є неточними, вони завжди обтяжені похибками. Одержати абсолютно безпомилково результати вимірів неможливо. Вдосконалюючи прилади і методи, можна лише наблизити результати вимірів величини до її істинного значення. Тому всякий результат виміру розглядають з двох точок зору:

- кількісна, яка виражає одержане числове значення величини;
- якісна, яка виражає допущену похибку виміру і представляє точність одержаного результату.

Залежно від точності і умов проведення виміри величини розділяють на рівноточні та нерівноточні (див. схему на рис. 1). Рівноточними називають виміри, які проведені в абсолютно однакових умовах (наприклад, використання приладів і методів однакової точності, однаковий вплив навколишнього середовища тощо). Рівноточним вимірам властиве однакове числове значення похибки. Якщо хоча б одна з умов рівноточності у ході проведення вимірів порушується, то такі виміри називають нерівноточними. Нерівноточним вимірам властиві різні числові значення похибок.

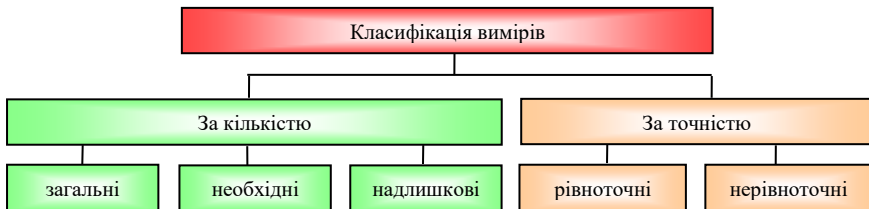


Рис. 1. Класифікація вимірів

Залежно від джерела виникнення розрізняють наступні види похибок вимірів (див. схему на рис. 2):

- 1) інструментальні, які зумовлені точністю відлікових систем вимірювальних приладів і недотриманням умов їх конструктивного виконання;
- 2) методичні, які зумовлені точністю методів вимірів, а також виникають внаслідок неповного врахування умов вимірів, порушення інструкцій проведення вимірювальних операцій чи вимог методу виміру;
- 3) зовнішні, які зумовлені зміною впливу навколишнього середовища, наприклад, температури, вологості, тиску тощо;
- 4) особисті похибки спостерігача.

За закономірностями виникнення похибки вимірів розділяють на такі види (рис. 2):

- 1) грубі, які зумовлені прорахунками чи неуважністю спостерігача, серйозними несправностями приладів. Результат виміру з грубою похибкою помітно вирізняється поміж інших результатів і вибраковується;
- 2) систематичні, якими результати вимірів обтяжені з тими чи іншими закономірностями. Залежно від характеру закономірностей систематичні похибки можуть бути постійними або односторонніми. Постійні систематичні похибки в процесі вимірів зберігають свій знак і абсолютну величину. Односторонні систематичні похибки зберігають знак, але

змінюють абсолютну величину. Систематичні похибки враховують в процесі вимірів шляхом введення до результатів необхідних поправок;

- 3) випадкові, під якими розуміють різниці між вимірними та істинним значеннями величини після вилучення результатів вимірів з грубими похибками і врахування систематичних похибок. Випадкові похибки завжди присутні в результатах вимірів. Вони виникають здебільшого внаслідок незначної зміни впливу джерела виникнення похибки та неспроможності сповна врахувати її систематичну частину.

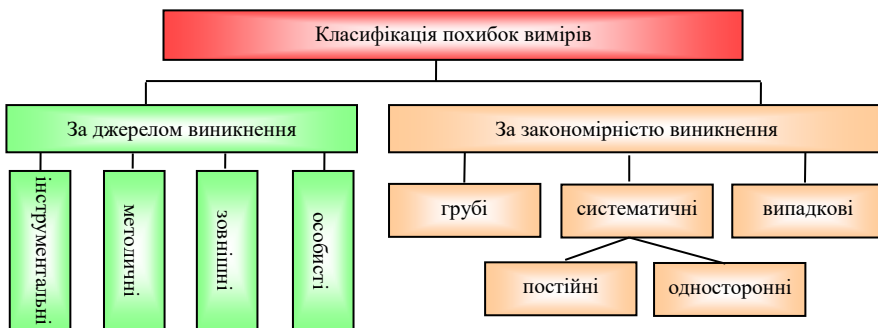


Рис. 2. Класифікація похибок вимірів

Випадкові похибки є типовим прикладом неперервних випадкових величин. Їх конкретні значення неможливо передбачити наперед; можна визначити лише границі їх можливих значень. Властивості випадкових похибок вимірів проявляються при масових вимірах і є наслідком їх підпорядкованості нормальному закону розподілу:

1. Додатні та від'ємні похибки рівноможливі: $p(\theta > 0) = p(\theta < 0) = \frac{1}{2}$.
2. Середнє арифметичне значень похибок при необмеженому зростанні

кількості вимірів гранично прямує до нуля: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{n} = 0$.

3. Малі за абсолютною величиною похибки трапляються частіше, ніж великі – це слідує з властивості функції щільності нормального закону розподілу.
4. Абсолютні значення похибок із заданою ймовірністю не перевищують границю, яку задає “правило трьох сигма” нормального закону: $m_x \pm 3\sigma$.

Визначення і числове вираження похибок вимірів величин та їх функцій – одне з основних завдань теорії похибок, яке називають оцінювання точності. Точність виміру величини – це числовий критерій, який є ймовірнісною характеристикою відхилень результатів вимірів величини від її істинного значення. Різновиди найбільш вживаних на практиці абсолютних та відносних критеріїв оцінювання точності відображені на схемі рис. 3.

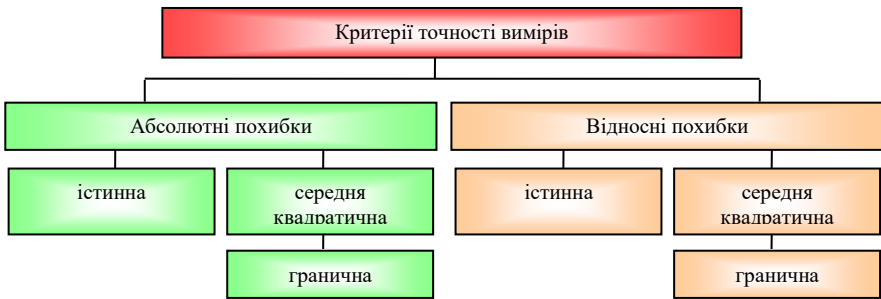


Рис. 3. Критерії точності вимірів

Найкращим критерієм точності виміру величини є істинна похибка θ – це відхилення результату виміру x_i від істинного значення величини X :

$$\theta_i = x_i - X .$$

Для оцінювання точності результатів вимірів з використанням істинної похибки необхідно знати істинне значення величини. У випадку безпосередніх вимірів величини істинне значення невідоме і цей критерій не застосовується. Істинна похибка має практичне застосування при оцінюванні точності функцій результатів вимірів.

Наявність у результатах вимірів похибок – основна причина, яка робить нездійснимим визначення істинних значень величин. Тому істинні значення замінюють тими чи іншими наближеними значеннями величин, які повинні бути близькими за ймовірністю до істинних. Такі наближені значення величин називають найбільш надійними значеннями. Їх визначають як математичні сподівання одержаних результатів вимірів з врахуванням кількості та умов проведення вимірів.

У разі невідомого істинного значення величини X використовують посередні методи оцінювання точності, які ґрунтуються на законах розподілу результатів вимірів. Для оцінювання точності вимірів в таких випадках користуються критерієм, який називають середня квадратична похибка m . Середня квадратична похибка m за змістом ототожнюється характеристиці розсіювання значень випадкової величини відносно центра їх розподілу (математичного сподівання), яка в теорії ймовірностей іменується середнє квадратичне відхилення (стандарт) σ . У числовому вираженні середня квадратична похибка дорівнює середньому квадратичному відхиленню:

$$m = \sigma = \sqrt{D_x} .$$

D_x – дисперсія результатів вимірів величини. Середня квадратична похибка оцінює точність вимірів, виходячи із сукупності одержаних результатів за їх відхиленнями від найбільш надійного значення величини, яке асоціюється з математичним сподіванням. Середня квадратична похибка є основним критерієм оцінювання точності геодезичних вимірів та їх функцій.

За умови врахування в процесі вимірів систематичних похибок і беручи до уваги властивість випадкових похибок щодо підпорядкованості нормальному закону розподілу в частині правила трьох сигма, можна оцінити діапазон допустимості похибок вимірів з використанням абсолютного критерію, який називають гранична середня квадратична похибка – це потроєне значення середньої квадратичної похибки виміру: $m_{гран} = 3m$. Такий критерій окреслює діапазон практично можливих значень похибок і вказує найбільше допустиме значення похибки виміру.

Всі абсолютні критерії точності виражають розмірністю величини, яка підлягає вимірам.

Відносною похибкою називають відношення абсолютної похибки до результату виміру величини. Це безрозмірний критерій точності, виражений у вигляді дроби з чисельником, який дорівнює одиниці. Знаменник відносної похибки заокруглюють до цілого числа. В ньому здебільшого значимі цифри зберігають тільки в перших двох розрядах, а в інших записують нулі.

Відношення істинної похибки θ до результату виміру величини x називають відносною істинною похибкою $\frac{\theta}{x} = \frac{1}{N_1}$, де $N_1 = \frac{x}{\theta}$. Відношення середньої квадратичної похибки m до x називають відносною середньою квадратичною похибкою $\frac{m}{x} = \frac{1}{N_2}$; $N_2 = \frac{x}{m}$. Відношення граничної середньої квадратичної похибки $m_{гран}$ до x називають відносною граничною середньою квадратичною похибкою $\frac{m_{гран}}{x} = \frac{1}{N_3}$; $N_3 = \frac{x}{m_{гран}}$.

Критеріями відносної похибки зручно користуватись при оцінюванні точності лінійних вимірів. Тоді вони виражають точність виміру довжини у розрахунку на одиницю міри довжини, наприклад, на один метр.

1. ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИН ТА ЇХ ФУНКЦІЙ

Всі величини, якими оперують в геодезії, розділяють на два види:

- 1) виміряні, наближені значення яких одержують безпосередніми вимірами;
- 2) обчислені (або посередні), які визначають як функції виміряних величин.

Якщо значення величини одержують безпосередніми вимірами, то точність результатів вимірів можна оцінити двома способами:

- 1) емпіричним способом, суть якого зводиться до вираження точності окремого результату виміру шляхом оцінювання всіх джерел виникнення похибки з урахуванням методів та чинних інструкцій проведення вимірів. Такий спосіб використовують здебільшого при розв'язуванні дослідницьких завдань. Він потребує великих витрат часу та праці, а визначена таким чином похибка не завжди адекватно відображає точність результату виміру;

2) способом оцінювання похибок за сукупністю результатів багатократних повторних вимірів на основі їх відхилень від найбільш надійного значення величини. Зміст і алгоритми реалізації цього способу будуть розкриті далі в методах обробки різних за походженням вимірів.

У геодезичній практиці використовують багато фізичних величин, які не можуть бути визначені безпосередніми вимірами. Мотивами цьому можуть бути, зокрема, відсутність необхідних вимірювальних приладів, недостатня точність наявних приладів, необґрунтовані матеріальні витрати на придбання потрібних приладів та обладнання, висока собівартість робіт тощо. Значення таких величин визначають посередніми способами за тими чи іншими формулами як функції інших величин, які одержані безпосередніми вимірами. Оскільки результати вимірів величин завжди обтяжені похибками, то і функції цих величин будуть містити похибки. Загалом похибка функції залежить від аналітичної форми функції, похибок вимірюваних величин, які є аргументами функції, а також ймовірної залежності аргументів між собою. Завдання визначення похибок обчислених величин називають оцінювання точності функцій результатів вимірів.

Допустимо, деяка величина F визначається з функції загального вигляду $F = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де x_1, x_2, \dots, x_n – результати безпосередніх вимірів величин (аргументи функції); n – кількість аргументів функції.

Істинна похибка θ_F функції виражається різницею значення функції, яке обчислене за результатами вимірів аргументів, та істинного значення функції $f(X_1, X_2, \dots, X_n)$:

$$\theta_F = f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Істинну похибку θ_F називають нев'язка. θ_F можна обчислити також за істинними похибками аргументів $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, якщо такі похибки відомі:

$$\theta_F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 \cdot \theta_i,$$

де $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0$ – значення частинних похідних функції по аргументах x_i .

Середня квадратична похибка m_F функції виражається формулою

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_0 \cdot r_{ij} m_i m_j},$$

де m_i – середні квадратичні похибки аргументів; позначення $i < j$ вказує, що до суми потрібно залучити всі попарно взяті комбінації аргументів функції; r_{ij} – коефіцієнт кореляції величин X_i та X_j , який дає змогу врахувати їх ймовірну залежність. Величини називаються залежними, якщо

значення однієї величини залежить від того, якого значення набула друга величина. Залежність визначається шляхом кореляційного аналізу в системі цих величин. При організації геодезичних вимірів висувається вимога забезпечити такі умови вимірів, щоб їх результати були незалежними. Тоді результат виміру величини не залежить від результатів вимірів інших величин, а коефіцієнти кореляції r_{ij} таких величин дорівнюють нулю. За таких умов формула спрощується і набуває вигляду

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2}.$$

Деякі приклади вираження середніх квадратичних похибок функцій:

1. Для функції $y = kx + c$, де k та c – сталі величини, $m_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0^2 m_x^2}$.
 $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = k$ і остаточно $m_y = km_x$.

2. Для лінійної функції загального вигляду $y = k_1x_1 \pm \dots \pm k_nx_n + k_0$, де x_1, \dots, x_n – незалежні аргументи із середніми квадратичними похибками m_1, \dots, m_n , k_0, k_1, \dots, k_n – сталі величини, $m_y = \sqrt{k_1^2 m_1^2 + \dots + k_n^2 m_n^2}$. Якщо $k_1 = \dots = k_n = 1$, то $m_y = \sqrt{m_1^2 + \dots + m_n^2}$. Якщо $m_1 = \dots = m_n = m$, то $m_y = m\sqrt{n}$.

3. Для середнього арифметичного $y = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ з результатів незалежних вимірів x_1, \dots, x_n , які мають рівні середні квадратичні похибки $m_1 = \dots = m_n = m$, всі частинні похідні $\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_0 = \frac{1}{n}$ і $m_y = \sqrt{n \frac{m^2}{n^2}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

4. Якщо функція має вигляд $y = x_1x_2$ або $y = \frac{x_1}{x_2}$, то можна записати:

$\ln y = \ln x_1 \pm \ln x_2$. Середня квадратична похибка логарифма функції

$m_{\ln y} = \sqrt{\frac{m_1^2}{x_1^2} + \frac{m_2^2}{x_2^2}}$, де m_1 та m_2 – середні квадратичні похибки аргументів

x_1 та x_2 . Але $m_{\ln y} = \frac{m_y}{y}$, тому середня квадратична похибка функції

$m_y = y \sqrt{\frac{m_1^2}{x_1^2} + \frac{m_2^2}{x_2^2}}$, тобто вона виражається однаково і для добутку, і для

ділення аргументів.

На основі формули розрахунку середньої квадратичної похибки функції для випадку незалежних аргументів можна розв'язати обернену задачу – розрахувати точність вимірів аргументів за похибкою m_F функції. Така задача строго розв'язується тільки для функцій з одним аргументом. Якщо кількість аргументів функції $n > 1$, то практично така задача може бути розв'язана тільки моделюванням умов вимірів аргументів. При цьому похибка функції розподіляється між похибками аргументів за тим чи іншим принципом залежно від очікуваних умов проведення вимірів.

Наприклад, можна скористатися принципом рівного впливу. За такого підходу на розв'язок накладається умова, що вплив похибок аргументів на точність функції є рівним, тобто

$$\frac{m_F^2}{n} = m_0^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_1^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_2^2 = \dots = \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0^2 m_n^2.$$

Тут m_0 наближено оцінює середній вплив кожного аргументу на точність функції. Середні квадратичні похибки вимірів окремих аргументів з врахуванням вигляду функції виражає формула

$$m_i = \frac{m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|} = \frac{m_F}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right| \sqrt{n}}.$$

Можна змоделювати умови вимірів таким чином, що похибка функції буде розподілятися між аргументами нерівномірно. Відтак аргументи функції можна вимірювати з більшими чи меншими похибками залежно від точності наявних приладів, доступних методів чи у відповідності до тих чи інших нормативних інструкцій. За такого підходу кожному аргументу x_i потрібно встановити відповідний коефіцієнт K_i пропорційно його впливу на

точність функції. Тоді $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 m_i = K_i m_0$ і $m_F = m_0 \sqrt{\sum_{i=1}^n K_i^2}$, а середня

квадратична похибка виміру окремого аргументу виразиться формулою

$$m_i = \frac{K_i m_0}{\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0\right|}.$$

Такий спосіб розрахунку точності виміру аргументів опирається на принцип пропорційного впливу. Він забезпечує оптимальне обґрунтоване вирішення задачі, опираючись на співвідношення точності приладів та методів вимірів.

Хід роботи

Під час виконання роботи розв'язуються типові завдання оцінювання точності функцій незалежних вимірних величин та розрахунку точності вимірів величин за середньою квадратичною похибкою функції.

Завдання 1. В трикутнику проведено незалежні виміри двох внутрішніх кутів. Яка середня квадратична похибка обчислення третього кута, якщо середні квадратичні похибки двох вимірних кутів: а) нерівноточні і складають $m_1 = 3''$ та $m_2 = 4''$; б) рівноточні і складають $m_1 = m_2 = m = 3''$?

Розв'язування завдання.

Третій кут β_3 трикутника виражається через інші два кути β_1 і β_2 функцією F вигляду $F = \beta_3 = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$. Знаходимо частинні похідні функції за обома її аргументами: $(\frac{\partial F}{\partial \beta_1})_0 = (\frac{\partial F}{\partial \beta_2})_0 = -1$. Виражаємо середню квадратичну похибку обчислення третього кута:

$$m_3 = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial \beta_1})_0^2 m_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial \beta_2})_0^2 m_2^2} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \text{ Якщо } m_1 = 3'' \text{ та } m_2 = 4'', \text{ то}$$

$$m_3 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5''. \text{ Якщо } m_1 = m_2 = m = 3'', \text{ то } m_3 = m\sqrt{2} = 4.2''.$$

Завдання 2. Яка середня квадратична похибка середнього арифметичного значення кута, яке обчислили за результатами його рівноточних вимірів чотирма прийомами із похибкою $m = 2''$?

Розв'язування завдання.

Середнє арифметичне кута є функцією вигляду $\beta_c = F = \frac{\sum_{i=1}^4 \beta_i}{4}$. Значення частинних похідних такої функції за всіма аргументами β_i рівні поміж собою: $(\frac{\partial F}{\partial \beta_i})_0 = \frac{1}{4}$. Середня квадратична похибка $m_{\beta_c} = \sqrt{4(\frac{\partial F}{\partial \beta_i})_0^2 m^2} = 1''$.

Завдання 3. Замкнений полігон включає 9 ходів. Яка середня квадратична похибка обчислення периметра P полігону, якщо похибка рівноточних вимірів довжин S кожного ходу $m = 5$ см?

Розв'язування завдання.

Периметр полігону виражається сумою довжин його ходів: $P = F = \sum_{i=1}^9 S_i$. Значення всіх частинних похідних такої функції рівні поміж собою: $(\frac{\partial F}{\partial S_i})_0 = 1$. За умови рівноточних вимірів довжин одержимо:

$$m_P = \sqrt{9(\frac{\partial F}{\partial S_i})_0^2 m_i^2} = 15 \text{ (см)}. \text{ Так само, з формули середньої квадратичної похибки суми величин, які виміряні з рівною точністю,}$$

$$m_P = m\sqrt{n} = 5\sqrt{9} = 15 \text{ (см)}.$$

Завдання 4. Які середні квадратичні похибки суми і різниці довжин двох ліній, якщо першу виміряли з похибкою $m_1 = 8.9$ см, другу – з похибкою $m_2 = 8.1$ см ?

Розв'язування завдання.

Сума довжин ліній S_1 і S_2 – це функція $F = \Sigma = S_1 + S_2$. Для такої функції значення частинних похідних $(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0 = (\frac{\partial F}{\partial S_2})_0 = 1$. Середня

квадратична похибка $m_\Sigma = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0^2 m_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial S_2})_0^2 m_2^2} = \sqrt{8.9^2 + 8.1^2} = 12$ (см).

Різниця довжин ліній S_1 і S_2 – це функція $F = \Delta = S_1 - S_2$. Частинні похідні такої функції: $(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0 = 1$; $(\frac{\partial F}{\partial S_2})_0 = -1$. Середня квадратична

похибка $m_\Delta = \sqrt{(\frac{\partial F}{\partial S_1})_0^2 m_1^2 + (\frac{\partial F}{\partial S_2})_0^2 m_2^2} = \sqrt{8.9^2 + 8.1^2} = 12$ (см).

Отже, значення суми і різниці довжин двох величин мають однакову середню квадратичну похибку.

Завдання 5. Прямокутні координати x, y точки обчислили полярним способом відносно пункту геодезичної основи за виміряною довжиною лінії $s = 127.00$ м та дирекційним кутом $\alpha = 32^\circ 00'$. Які середні квадратичні похибки m_x, m_y координат, якщо похибки $m_s = 0.03$ м та $m_\alpha = 1.5'$?

Розв'язування завдання.

Прямокутні координати x, y виражаються функціями $x = x_{осн} + s \cdot \cos \alpha$, $y = y_{осн} + s \cdot \sin \alpha$, де $x_{осн}, y_{осн}$ – сталі координати пункту геодезичної основи. Координати є функціями незалежних величин s та α . Виражаємо середні

квадратичні похибки функцій x та y : $m_x = \sqrt{(\frac{\partial x}{\partial s})_0^2 m_s^2 + (\frac{\partial x}{\partial \alpha})_0^2 (\frac{m_\alpha}{\rho})^2}$;

$m_y = \sqrt{(\frac{\partial y}{\partial s})_0^2 m_s^2 + (\frac{\partial y}{\partial \alpha})_0^2 (\frac{m_\alpha}{\rho})^2}$. m_α має кутову міру, а m_s та невідомі m_x

та m_y лінійну. Тому кутову міру зводимо до лінійної діленням похибки m_α на сталу величину, яка виражає кількість кутових одиниць в одному радіані $\rho' = 3437.7'$ (або $\rho'' = 206264.8''$, якщо похибка виражена секундами).

Виражаємо значення частинних похідних функцій: $(\frac{\partial x}{\partial s})_0 = \cos \alpha = 0.8480$;

$(\frac{\partial x}{\partial \alpha})_0 = -s \cdot \sin \alpha = -67.2997$; $(\frac{\partial y}{\partial s})_0 = \sin \alpha = 0.5299$; $(\frac{\partial y}{\partial \alpha})_0 = s \cdot \cos \alpha = 107.7021$.

Обчислюємо похибки: $m_x = \sqrt{0.8480^2 0.03^2 + (-67.2997)^2 \left(\frac{1.5}{3437.7}\right)^2} = 0.04 \text{ (м)}$;

$$m_y = \sqrt{0.5299^2 0.03^2 + 107.7021^2 \left(\frac{1.5}{3437.7}\right)^2} = 0.05 \text{ (м)}.$$

Завдання 6. Обчислити середню квадратичну похибку збільшення зорової труби з фокусною відстанню об'єктива $f_{об} = 40.0 \text{ см}$ і фокусною відстанню окуляра $f_{ок} = 1.5 \text{ см}$, якщо середні квадратичні похибки $m_{f_{об}} = 0.2 \text{ см}$ і $m_{f_{ок}} = 0.01 \text{ см}$.

Розв'язування завдання.

Збільшення зорової труби виражає функція $V = \frac{f_{об}}{f_{ок}}$; $V = 26.7$.

Виразимо середню квадратичну похибку функції

$$m_V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial f_{об}}\right)_0^2 m_{f_{об}}^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial f_{ок}}\right)_0^2 m_{f_{ок}}^2} \text{ і частинні похідні } \frac{\partial V}{\partial f_{об}} = \frac{1}{f_{ок}} \text{ та}$$

$$\frac{\partial V}{\partial f_{ок}} = -\frac{f_{об}}{f_{ок}^2}. \text{ Середня квадратична похибка збільшення зорової труби}$$

$$m_V = \sqrt{\frac{m_{f_{об}}^2}{f_{ок}^2} + \frac{f_{об}^2}{f_{ок}^4} m_{f_{ок}}^2} = 0.23. \text{ Отже, } V = 26.7 \pm 0.23.$$

Завдання 7. Яка середня квадратична похибка перевищення, яке обчислили методом тригонометричного нівелювання за вимірними відстанню $D = 172.0 \text{ м}$, кутом нахилу $\vartheta = 2^\circ 30'$, висотою приладу $i = 1.67 \text{ м}$ і висотою наведення $v = 1.0 \text{ м}$, якщо середні квадратичні похибки вимірів відповідно складають $m_D = 0.5 \text{ м}$, $m_\vartheta = 1'$, $m_i = 0.01 \text{ м}$, $m_v = 1 \text{ мм}$?

Розв'язування завдання.

В тригонометричному методі нівелювання перевищення обчислюють за функцією $h = \frac{1}{2} D \sin 2\vartheta + i - v$. Виразимо середню квадратичну похибку

$$\text{перевищення: } m_h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial D}\right)_0^2 m_D^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \vartheta}\right)_0^2 \left(\frac{m_\vartheta}{\rho'}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial i}\right)_0^2 m_i^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)_0^2 m_v^2}.$$

Враховуючи частинні похідні функції, похибки аргументів і сталу

$$\rho' = 3437.7', m_h = \sqrt{\frac{\sin^2 2\vartheta}{4} m_D^2 + D^2 \cos^2 2\vartheta \left(\frac{m_\vartheta}{\rho'}\right)^2 + m_i^2 + m_v^2} = 0.055 \text{ (м)}.$$

Завдання 8. Гранична відносна середня квадратична похибка довжин ліній теодолітного ходу $\frac{m}{s} = \frac{1}{2000}$. З якою похибкою потрібно вимірювати лінію довжиною $s \approx 200$ м в одному напрямі?

Розв'язування завдання.

За граничною відносною похибкою $\frac{m}{s}$ обчислюємо відповідну граничну середню квадратичну похибку m для лінії довжиною $s \approx 200$ м із співвідношення $\frac{m}{200} = \frac{1}{2000}$: $m = 0.1$ м. Обидві похибки характеризують точність кінцевого значення довжини, яке виражається функцією результатів вимірів у прямому s_{np} і зворотному $s_{зв}$ напрямках як середнє арифметичне $s = \frac{1}{2}(s_{np} + s_{зв})$. Виражаємо граничну середню квадратичну похибку такої

функції: $m^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial s_{np}}\right)_0^2 m_{s_{np}}^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial s_{зв}}\right)_0^2 m_{s_{зв}}^2$. Допустимо, що виміри в обох напрямках буде виконано з однаковою точністю. Тоді $m_{s_{np}} = m_{s_{зв}} = m_s$,

$s_{np} \approx s_{зв} = s_{вум}$ і $m^2 = 2\left(\frac{\partial s}{\partial s_{вум}}\right)_0^2 m_s^2$. Граничну похибку виміру в одному напрямі m_s можна визначити за принципом рівного впливу похибки m на

похибки m_s : $m_s = \frac{m}{\left|\left(\frac{\partial s}{\partial s_{вум}}\right)_0\right| \sqrt{2}}$. Враховуючи значення $\left(\frac{\partial s}{\partial s_{вум}}\right)_0 = \frac{1}{2}$,

одержимо $m_s = 0.14$ м або $\frac{m_s}{s} = \frac{0.14}{200} \approx \frac{1}{1400}$. Отже, щоб при вимірах лінії

довжиною $s \approx 200$ м забезпечити граничну відносну середню квадратичну похибку $\frac{1}{2000}$, потрібно виконувати виміри в одному напрямі з граничною

середньою квадратичною похибкою $m_s = \pm 0.14$ м або відповідною граничною відносною похибкою $\frac{m_s}{s} \approx \frac{1}{1400}$.

Завдання 9. З якими граничними похибками потрібно вимірювати довжину похилої лінії $D \approx 200$ м та кут її ухилу $\vartheta \approx 10^\circ$, щоб забезпечити граничну середню квадратичну похибку $m_s = 0.1$ м для горизонтального прокладання цієї лінії?

Розв'язування завдання.

Горизонтальне прокладання лінії обчислюють з використанням функції $s = D \cos \vartheta$. Виражаємо середню квадратичну похибку горизонтального

прокладання: $m_s^2 = \left(\frac{\partial s}{\partial D}\right)_0^2 m_D^2 + \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta}\right)_0^2 \left(\frac{m_\vartheta}{\rho'}\right)^2$. Значення частинних похідних $\left(\frac{\partial s}{\partial D}\right)_0 = \cos \vartheta = 0.9848$, $\left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta}\right)_0 = -D \sin \vartheta = -34.7296$.

Якщо змоделювати умови вимірів величин D та ϑ згідно принципу рівного впливу похибки m_s на похибки m_D і m_ϑ , то одержимо наступні результати: 1) гранична середня квадратична похибка виміру довжини

$$m_D = \frac{m_s}{\left|\left(\frac{\partial s}{\partial D}\right)_0\right| \sqrt{2}} = 0.072 \text{ (м)} \text{ і відповідна гранична відносна похибка}$$

$$\frac{m_D}{D} \approx \frac{1}{2800}; \text{ 2) з врахуванням сталої } \rho' = 3437.7' \text{ гранична середня}$$

квадратична похибка виміру кута ухилу $m_\vartheta = \frac{m_s \rho'}{\left|\left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta}\right)_0\right| \sqrt{2}} = 7'$. Результати

обчислень показують явне порушення співвідношення точності вимірів величин D та ϑ : похибка виміру кута задовольняє умовам технічної точності вимірів кутів і за абсолютною величиною достатньо велика, тоді як гранична похибка виміру довжини лінії мала і досягнути її приладами технічної точності складно. Отже, принцип рівного впливу для вирішення завдання неприйнятний.

Для досягнення оптимального вирішення завдання доцільно змоделювати умови вимірів згідно принципу пропорційного впливу з такого розрахунку, щоб граничну похибку виміру кута зменшити, а похибку виміру довжини лінії збільшити. Для цього потрібно встановити відповідні коефіцієнти пропорційності. Наприклад, поставимо умову, щоб гранична відносна

похибка виміру довжини дорівнювала $\frac{m_D}{D} = \frac{1}{2000}$. За такої умови середня

квадратична похибка $m_D = m_s = 0.1$ м. У відповідності до принципу пропорційного розподілу похибки функції на похибки вимірів аргументів

$$m_D = \frac{K_D m_0}{\left|\left(\frac{\partial s}{\partial D}\right)_0\right|}, \text{ де } K_D \text{ – коефіцієнт впливу виміру довжини лінії на точність}$$

функції; $m_0 = \frac{m_s}{\sqrt{2}} = 0.0707$ (м) – середній вплив похибок вимірів величин D

та ϑ на точність функції. На такій основі $K_D = \frac{\left|\left(\frac{\partial s}{\partial D}\right)_0\right| m_D}{m_0} = 1.4$. За

обраного підходу до вирішення завдання необхідно дотримуватись вимоги

$m_s = m_0 \sqrt{K_D^2 + K_g^2}$. З цієї рівності виражаємо коефіцієнт K_g впливу виміру кута ухилу на точність функції:

$$K_g = \sqrt{\frac{m_s^2 - m_0^2 K_D^2}{m_0^2}} = \sqrt{2 - K_D^2} = 0.2. \text{ Тепер гранична середня квадратична}$$

похибка виміру кута ухилу лінії $m_g = \frac{K_g m_0 \rho'}{\left| \left(\frac{\partial s}{\partial g} \right)_0 \right|} = 1.4'$. Одержані за таким

принципом граничні похибки вимірів довжини похилої лінії і кута ухилу лінії задовольняють умовам технічної точності вимірів величин.

Питання для самоконтролю

1. Якими критеріями користуються для оцінки точності величин?
2. Що називають істинною похибкою виміру?
3. Що називають середньою квадратичною похибкою виміру?
4. Що називають граничною похибкою виміру?
5. Що називають відносною похибкою виміру?
6. Як обчислити середню квадратичну похибку функції залежних і незалежних виміряних величин ?
7. Як розрахувати точність виміру величин при заданій точності їх функції за принципом рівного впливу?
8. Як розрахувати точність виміру величин при заданій точності їх функції за принципом пропорційного впливу?

2. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИНИ

Рівноточними вимірами окремої фізичної величини називають однорідні виміри, які проведено в абсолютно однакових умовах: одним і тим же приладом або приладами рівної точності, одним чи рівнозначними методами вимірів, однакоvim числом прийомів чи станцій і за будь-яких інших рівних умов. Результати рівноточних вимірів, як правило, відрізняються поміж собою. Тому з точки зору числових оцінок точності вони мають різні істинні похибки, проте завжди характеризуються однією, однаковою для всіх, середньою квадратичною похибкою.

Допустимо, проведено n рівноточних вимірів величини X і одержано результати x_1, \dots, x_n з середніми квадратичними похибками $m_1 = \dots = m_n = m$. У ході математичної обробки результатів вимірів потрібно визначити найбільш надійне значення величини таке, яке було б найбільш близьким до істинного, а також обчислити середні квадратичні похибки вимірів і найбільш надійного значення.

Після вибраковування результатів вимірів з грубими похибками точність вимірюваної величини залежатиме від впливу систематичних та випадкових похибок. Випадкові похибки зумовлюють відхилення результатів вимірів від їх математичного сподівання. Систематичні похибки зумовлюють відхилення математичного сподівання від істинного значення величини. Відхилення математичного сподівання від істинного значення у ході обробки результатів вимірів зменшити неможливо. З цієї причини систематичні похибки вилучають з результатів у ході виконання вимірів шляхом введення необхідних поправок. Звільнені від грубих та систематичних похибок результати вимірів дають змогу визначити математичне сподівання. Беручи до уваги закон великих чисел теорії ймовірностей (теорема Чебишева), найкращим наближенням до математичного сподівання за результатами рівноточних вимірів величини є середнє арифметичне цих результатів. Отже, за умови відсутності в результатах вимірів систематичних похибок, математичне сподівання є найкращим наближенням до істинного значення величини. Його називають найбільш надійне значення \tilde{x} і обчислюють за принципом простої арифметичної середини як середнє арифметичне результатів вимірів:

$$\tilde{x} = \frac{[x]}{n}.$$

Принцип простої арифметичної середини полягає в тому, що гранично за умови необмежено великої кількості вимірів і за умови відсутності в результатах систематичних похибок проста арифметична середина \tilde{x} прямує за ймовірністю до істинного значення X величини: $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{x} = X$. В деяких практичних задачах \tilde{x} обчислюють за еквівалентною формулою

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n},$$

де x_{\min} – найменший з результатів вимірів x_i ; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$.

Основним критерієм точності вимірів за умови відомого істинного значення X величини є істинні похибки $\theta_i = x_i - X$. Істинні похибки – це центровані результати вимірів величини. Відтак, виходячи з сукупності результатів вимірів, за їх істинними похибками можна розрахувати середню квадратичну похибку m рівноточних вимірів за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[\theta^2]}{n}}.$$

Дана формула тотожна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці. Її називають формула Гаусса.

За умови невідомого істинного значення величини оцінити точність результатів вимірів зазначеними формулами неможливо. Тоді істинне значення замінюють найбільш надійним \tilde{x} і в основу оцінки точності покладають відхилення $v_i = x_i - \tilde{x}$, а середню квадратичну похибку m вимірів наближено оцінюють за формулою

$$m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Її називають формулою Бесселя для обчислення середньої квадратичної похибки рівноточних вимірів за відхиленнями результатів вимірів від простої арифметичної середини.

Відхилення v_i мають наступні властивості, якими можна скористатись для контролю виконання проміжних розрахунків:

1. Алгебраїчна сума відхилень v_i за будь-якої кількості вимірів дорівнює нулю: $[v] = 0$. Здебільшого обчислене значення \tilde{x} доводиться заокруглювати. Якщо при обчисленні v_i користувались заокругленим значенням $\tilde{x}_{окр}$ і має місце абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[v] = n\Delta$.

2. Сума квадратів відхилень v_i мінімальна і завжди менша від суми квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини x' , яка не дорівнює \tilde{x} : $[v^2] = \min [\varepsilon^2]$, де $\varepsilon_i = x_i - x'$; $x' \neq \tilde{x}$. Ця властивість посвідчує, що проста арифметична середина у порівнянні з будь-якою іншою величиною є найбільш надійним значенням рівноточних результатів вимірів. З властивості слідує рівняння, яке

$$\text{використовують для контролю обчислення } [v^2]: [v^2] = [\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n}.$$

Проста арифметична середина – це функція незалежних результатів вимірів x_1, \dots, x_n : $\tilde{x} = F(x_1, \dots, x_n)$. Беручи до уваги формулу оцінки точності

функцій виміряних величин $m_F^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 \cdot m_i^2$ і умову рівності похибок

вимірів $m_1 = \dots = m_n = m$, для середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F = M$ простої арифметичної середини одержимо формулу

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}.$$

Середня квадратична похибка M є істинною похибкою простої арифметичної середини \tilde{x} як найбільш надійного значення величини. Значення \tilde{x} лише наближено виражає істинне значення величини X . Похибку заміни невідомого істинного значення простою арифметичною

серединою можна оцінити шляхом побудови довірчого інтервалу I_β при заданій довірчій імовірності $\beta \rightarrow 1$, використовуючи \tilde{x} та M :

$$I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M) .$$

Коефіцієнт t_β визначають з таблиць розподілу Стюдента за ймовірністю β і числом ступенів свободи $r = n - 1$ (див. таблицю додатку 1). При кількості вимірів $n \geq 20$ розподіл Стюдента мало відрізняється від нормального закону розподілу і t_β визначають як аргумент нормальної функції розподілу на основі формули $t_\beta = \arg \Phi^* \left(\frac{1 + \beta}{2} \right)$ (див. таблицю додатку 2). Довірчий інтервал I_β визначає границі, в яких з ймовірністю β знаходиться невідоме істинне значення величини X : $\tilde{x} - t_\beta M \leq X \leq \tilde{x} + t_\beta M$.

При великій кількості вимірів n середні квадратичні похибки вимірів m та найбільш надійного значення M обчислюються достатньо надійно. На практиці здебільшого кількість вимірів обмежена порядком $n = 10 \div 20$. В таких випадках похибки m та M є ненадійними і в достатній мірі неточними. Тому при математичній обробці результатів за кількістю вимірів $n < 20$ рекомендується виконувати оцінку точності середніх квадратичних похибок m та M . Для цього обчислюють середні квадратичні похибки m_m та m_M значень середніх квадратичних похибок m та M :

$$m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}} ; \quad m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} .$$

Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів багаторазових рівноточних вимірів величини.

Завдання. В результаті рівноточних вимірів одержано ряд значень величини. Необхідно виконати математичну обробку результатів: 1) визначити найбільш надійне значення величини; 2) розрахувати середню квадратичну похибку результатів вимірів; 3) розрахувати середню квадратичну похибку найбільш надійного значення; 4) побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини при довірчій імовірності $\beta = 0.95$; 5) оцінити точність обчислення середніх квадратичних похибок.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 3. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n=12$ результатів вимірів величини, розпочинаючи з номера варіанта N . Для різних груп у таблиці задано результати вимірів наступних величин: $U=1$ – відмітка точки земної поверхні; $U=2$ – горизонтальний кут; $U=3$ – довжина лінії; $U=4$ – вертикальний кут; $U=5$ – перевищення.

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано $n=12$ результатів рівноточних вимірів кута. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

№ вимірів	Результати вимірів	ε_i	ε_i^2	v_i	v_i^2
1	34°43'	3	9	- 0.2	0.04
2	46	6	36	2.8	7.84
3	43	3	9	-0.2	0.04
4	45	5	25	1.8	3.24
5	40	0	0	-3.2	10.24
6	42	2	4	-1.2	1.44
7	45	5	25	1.8	3.24
8	44	4	16	0.8	0.64
9	41	1	1	-2.2	4.84
10	44	4	16	0.8	0.64
11	43	3	9	-0.2	0.04
12	42	2	4	-1.2	1.44
Σ	–	38	154	-0.4	33.68

1. Найбільш надійне значення кута обчислюємо за формулою простої арифметичної середини $\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[\varepsilon]}{n}$: $x_{\min} = 34^\circ 40'$; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$; $\tilde{x} = 34^\circ 43.16667'$; $\tilde{x}_{окр} = 34^\circ 43.2'$; абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр} = -0.03333$.

2. Середню квадратичну похибку m рівноточних результатів вимірів кута обчислюємо за формулою Бесселя $m = \sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}$, де $v_i = x_i - \tilde{x}_{окр}$. Виконуємо контроль проміжних розрахунків: 1) $n\Delta = -0.4 = [v]$; 2) $[\varepsilon^2] - \frac{[\varepsilon]^2}{n} = 33.68 = [v^2]$. Остаточню одержимо середню квадратичну похибку $m = \pm 1.7'$.

3. Середню квадратичну похибку M простої арифметичної середини обчислюємо за формулою $M = \frac{m}{\sqrt{n}} = \pm 0.49'$. Отже, найбільш надійне значення вимірюваного кута $\tilde{x} = 34^\circ 43.2' \pm 0.49'$.

4. Довірчий інтервал для істинного значення кута виражається формулою $I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M)$. За умови, що $n=12$, значення коефіцієнта t_β вибираємо з таблиці розподілу Стюдента (додаток 1) за довірчою ймовірністю $\beta = 0.95$ та числом ступенів свободи $r = n - 1 = 11$: $t_\beta = 2.20$.

Одержимо довірчий інтервал $I_\beta = (34^\circ 42.1'; 34^\circ 44.3')$. Отже, з ймовірністю $\beta = 0.95$ можна стверджувати, що істинне значення X вимірюваного кута задовольняє нерівності $34^\circ 42.1' \leq X \leq 34^\circ 44.3'$.

5. Оцінку точності середніх квадратичних похибок m і M виконуємо за формулами $m_m \approx \frac{m}{\sqrt{2(n-1)}}$ і $m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}}$: $m_m = \pm 0.36'$; $m_M = \pm 0.10'$.

Отже, середня квадратична похибка результатів вимірів кута $m = 1.7' \pm 0.36'$, середня квадратична похибка найбільш надійного значення кута $M = 0.49' \pm 0.10'$.

Питання для самоконтролю

1. Які результати вимірів називають рівно точними ?
2. Як виражають найбільш надійне значення рівноточних вимірів величини?
3. В чому полягає принцип простої арифметичної середини?
4. Які властивості мають відхилення результатів вимірів від простої арифметичної середини? Яке практичне застосування цих властивостей?
5. Як обчислити середню квадратичну похибку результатів рівноточних вимірів величини?
6. Як обчислити середню квадратичну похибку найбільш надійного значення рівноточних вимірів величини?
7. Як побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини?
8. Як оцінити точність середніх квадратичних похибок, обчислених за сукупністю результатів вимірів величини? Коли така оцінка точності виконується?
9. Яка черговість і зміст математичної обробки рівноточних вимірів величини?

2. МАТЕМАТИЧНА ОБРОБКА НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ВЕЛИЧИН

Нерівноточними називають однорідні результати багатократних вимірів величини приладами різної точності, різними методами, різною кількістю прийомів чи станцій і за будь-яких інших різних умов. З точки зору числових оцінок точності нерівноточними є результати вимірів, які мають різні як істинні, так і середні квадратичні похибки. Якщо з n проведених вимірів одержано результати x_i ($i = 1, n$), то з точки зору числових оцінок точності їх називають нерівноточними, якщо відповідні результатам середні квадратичні похибки m_i різняться поміж собою: $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$. У ході математичної обробки результатів нерівноточних вимірів величини потрібно визначити її найбільш надійне значення таке, яке було б найбільш близьким до істинного, і обчислити похибки вимірів та похибку найбільш надійного значення.

За умови відсутності в результатах вимірів x_i систематичних похибок їх точність визначається лише випадковими похибками, які підпорядковуються нормальному закону розподілу. За такої умови істинне значення величини X замінюють найбільш надійним значенням \tilde{x} , яке за ймовірністю є найбільш близьким до істинного і ототожнюється з математичним сподіванням $M[X]$. $M[X]$ відповідає найбільшому значенню ймовірності сукупності результатів вимірів цієї величини. Це слідує з функції щільності

нормального закону $f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2}}$; σ_i – середні квадратичні відхилення вимірів. Максимум $\frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}}$ функції $f(x_i)$ досягається при

найменшому значенні показника степені $\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2}$. Максимум функції $f(x_i)$ відповідає центру нормального розподілу, яким є математичне сподівання $M[X]$, як це графічно відображено на рис. 4.

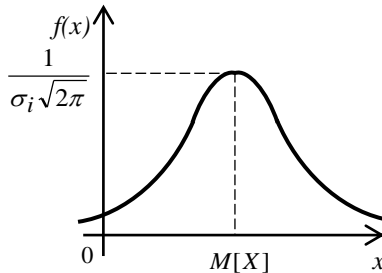


Рис. 4. Графік функції щільності нормального закону розподілу

Таким чином, найбільшу ймовірність сукупності результатів вимірів x_i

можна одержати лише за умови мінімуму функції $F = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - M[X])^2}{2\sigma_i^2} = \min$.

Беручи до уваги, що $\sigma_i = m_i$, а $M[X]$ ототожнюється з \tilde{x} ,

$F = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \tilde{x})^2}{2m_i^2} = \min$. Розв'язок задачі можливий, якщо частинні похідні

$\frac{\partial F}{\partial x_i} = [2 \frac{x - \tilde{x}}{m^2}] = [x \frac{c}{m^2}] - \tilde{x} [\frac{c}{m^2}] = 0$, де $c = const$ – довільний додатний коефіцієнт пропорційності. Отже,

$$\tilde{x} = \frac{\left[x \frac{c}{m^2} \right]}{\left[\frac{c}{m^2} \right]}, \quad \tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]}.$$

Величина \tilde{x} – це найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини, яке виражається за принципом загальної арифметичної середини і обчислюється як середнє вагове. В деяких практичних задачах \tilde{x} зручно обчислювати за еквівалентною формулою

$$\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]},$$

де x_{\min} – найменший з результатів вимірів x_i ; $\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$. Відношення

$$p_i = \frac{c}{m_i^2}$$

називаються ваги нерівноточних результатів вимірів.

Ваги вимірів – це безрозмірні показники ступеню довіри до результатів нерівноточних вимірів величини. З такого визначення слідує, що більшим за числовим значенням вагам вимірів відповідає вища точність вимірів (або менша середня квадратична похибка). Тому ваги і середні квадратичні похибки пов'язані оберненою пропорційною залежністю. На практиці часто середні квадратичні похибки вимірів невідомі, але аналіз умов вимірів дає підстави вважати одержані результати нерівноточними. Тоді ваги вимірів встановлюють за існуючими підставами і в кожному конкретному випадку при обчисленні ваг враховують, як саме зміна тих чи інших умов впливає на точність результатів вимірів.

Деякі типові приклади обчислення ваг нерівноточних вимірів:

- кут виміряли різною кількістю прийомів k_i . Збільшення k_i зумовлює підвищення точності одержаних результатів, тому ваги вимірів потрібно обчислювати з прямої залежності до кількості прийомів: $p_i = \frac{k_i}{c}$;
- перевищення виміряли різною кількістю станцій K_i . Збільшення K_i зумовлює зниження точності результатів вимірів перевищення, тому ваги вимірів потрібно обчислювати з оберненої залежності до кількості станцій: $p_i = \frac{c}{K_i}$;
- перевищення виміряли за ходами різної довжини s_i . Збільшення довжини ходу зумовлює зниження точності результатів вимірів, тому ваги потрібно обчислювати з оберненої залежності до довжин ходів: $p_i = \frac{c}{s_i}$.

Вибір коефіцієнта c не змінює кінцевих результатів обробки вимірів. Він відіграє роль коефіцієнта пропорційності. Принципово важливим є не порядок ваг, а їх взаємні співвідношення поміж собою. Коефіцієнт c

рекомендують обирати з такого розрахунку, щоб ваги були близькими до одиниці – це спрощує виконання подальших розрахунків.

Допустимо, деяка величина F обчислена за результатами нерівноточних вимірів x_i з використанням функції загального вигляду $F = f(x_1, \dots, x_n)$. Якщо аргументи функції залежні між собою і така залежність виражається коефіцієнтом кореляції r_{ij} , то середня квадратична похибка функції m_F з урахуванням похибок аргументів m_i виражається формулою

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \cdot r_{ij} m_i m_j}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 - \text{значення}$$

частинних похідних функції. Беручи до уваги вираження ваг аргументів $p_i = \frac{1}{m_i^2}$, для оберненої ваги функції одержимо формулу

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0 \frac{r_{ij}}{\sqrt{p_i p_j}}.$$

За умови незалежних аргументів $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$.

Загальна арифметична середина \tilde{x} є функція результатів незалежних нерівноточних вимірів x_i : $\tilde{x} = \frac{[xp]}{[p]} = \frac{x_1 p_1 + \dots + x_n p_n}{[p]} = F$. Застосовуючи до неї формулу обчислення оберненої ваги функції незалежних результатів вимірів, одержимо: $\frac{1}{P_F} = \frac{1}{P_{\tilde{x}}} = \frac{p_1^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{p_n^2}{[p]^2} \cdot \frac{1}{p_n} = \frac{1}{[p]^2} (p_1 + \dots + p_n) = \frac{1}{[p]}$.

Звідси $P_{\tilde{x}} = [p]$: вага загальної арифметичної середини як найбільш надійного значення нерівноточних вимірів дорівнює сумі ваг вимірів.

Якщо за формулою загальної арифметичної середини обчислювати найбільш надійне значення результатів рівноточних вимірів, то $\tilde{x} = \frac{[x]}{n}$. Це зумовлено тим, що середні квадратичні похибки і ваги рівноточних вимірів рівні поміж собою і при вагах $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$ одержимо $[p] = n$. Отже, проста арифметична середина є частковим випадком загальної арифметичної середини. Вагу простої арифметичної середини можна обчислити за її середньою квадратичною похибкою M : $P = \frac{c}{M^2}$. Беручи до уваги, що

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}, \quad P = \frac{cn}{m^2}. \text{ Вагу рівноточного виміру виражає формула } p = \frac{c}{m^2},$$

тому $P = np$, тобто вага простої арифметичної середини в n разів більша від

ваги одного рівноточного результату виміру. З цього слідує, що вага загальної арифметичної середини $P_{\tilde{x}}$ дорівнює сумі ваг нерівноточних вимірів: $P_{\tilde{x}} = [p]$.

Виділимо посеред результатів нерівноточних вимірів x_k деяке значення x_k , в якого вага дорівнює одиниці: $p_k = 1$. Середню квадратичну похибку m_k такого результату позначають μ . Якщо при виборі коефіцієнта пропорційності c накласти умову $c = \mu^2$, то $p_k = \frac{\mu^2}{m_k^2} = 1$ і $\mu = m_k = \sqrt{c}$.

Величину μ називають середня квадратична похибка одиниці ваги – це похибка результатів нерівноточних вимірів, в яких вага дорівнює одиниці. Беручи до уваги, що загалом $p_i = \frac{c}{m_i^2}$, одержимо $\mu = m_i \sqrt{p_i}$, звідки

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}},$$

тобто середня квадратична похибка m_i результату виміру x_i виражається через середню квадратичну похибку одиниці ваги μ і вагу p_i відповідного результату. Для середньої квадратичної похибки загальної арифметичної середини

$$m_{\tilde{x}} = M = \frac{\mu}{\sqrt{P_{\tilde{x}}}} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

Останні визначення посвідчують наступне: середню квадратичну похибку одиниці ваги при оцінюванні точності нерівноточних вимірів потрібно обчислювати завжди незалежно від того, чи є серед вимірів результати з вагою, яка дорівнює одиниці, чи такі результати відсутні.

За умови відомого істинного значення X вимірюваної величини можна оцінити істинні похибки нерівноточних результатів вимірів $\theta_i = x_i - X$ і на їх основі середню квадратичну похибку одиниці ваги

$$\mu = \sqrt{\frac{[p\theta^2]}{n}}.$$

Ця формула називається формула Гаусса. Вона є узагальненням формули Гаусса для оцінювання похибок результатів рівноточних вимірів і еквівалентна формулі характеристики середнього квадратичного відхилення (стандарту) σ розподілу випадкової величини, якою оперують у теорії ймовірностей і математичній статистиці.

За умови невідомого істинного значення величини його замінюють найбільш надійним \tilde{x} і в основу оцінки точності покладають відхилення

$v_i = x_i - \tilde{x}$, а середню квадратичну похибку одиниці ваги μ наближено оцінюють з врахуванням ваг вимірів p_i за формулою

$$\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}.$$

Її називають формула Бесселя для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за відхиленнями результатів вимірів від загальної арифметичної середини. Вона є узагальненням формули Бесселя для оцінювання похибок результатів рівноточних вимірів.

Відхилення v_i мають наступні властивості, якими можна скористатись для контролю виконання проміжних розрахунків:

1. За будь-якої кількості вимірів алгебраїчна сума добутоків відхилень v_i на відповідні ваги p_i дорівнює нулю: $[pv] = 0$. Якщо при обчисленні v_i користувались заокругленим значенням загальної арифметичної середини $\tilde{x}_{окр}$ і абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр}$, то $[pv] = \Delta[p]$.

2. Сума добутоків квадратів відхилень v_i на відповідні ваги p_i мінімальна і завжди менша від суми добутоків квадратів відхилень тих же результатів вимірів від будь-якої іншої величини x' , яка не дорівнює \tilde{x} , на ваги відповідних вимірів p_i : $[pv^2] = \min < [p\varepsilon^2]$, де $\varepsilon_i = x_i - x'$; $x' \neq \tilde{x}$. Ця властивість посвідчує, що загальна арифметична середина у порівнянні з будь-якою іншою величиною є найбільш надійним значенням нерівноточних результатів вимірів. З властивості слідує рівняння, яке

$$\text{використовують для контролю обчислення } [pv^2]: [pv^2] = [p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]}.$$

Середня квадратична похибка M є істинною похибкою загальної арифметичної середини \tilde{x} як найбільш надійного значення величини. Значення \tilde{x} лише наближено виражає істинне значення величини X . Використовуючи \tilde{x} та M , можна визначити похибку заміни X на \tilde{x} шляхом побудови довірчого інтервалу $I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M)$ при заданій довірчій імовірності $\beta \rightarrow 1$, як це розкрито у завданні 2. Довірчий інтервал I_β виражає точність істинного значення величини і з довірчою ймовірністю β окреслює діапазон його можливих значень.

При великій кількості вимірів n середні квадратичні похибки одиниці ваги μ , вимірів m_i та найбільш надійного значення M обчислюються достатньо надійно. Якщо кількість вимірів обмежена порядком $n = 10 \div 20$, то зазначені середні квадратичні похибки є ненадійними і в достатній мірі неточними. В такому випадку рекомендується виконувати оцінку точності

обчислених середніх квадратичних похибок μ , m_i та M . Для цього обчислюють відповідні середні квадратичні похибки m_μ , m_{m_i} та m_M аналогічно тому, як це розкрито у завданні 2, наприклад, $m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}}$.

Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів багаторазових нерівноточних вимірів величини.

Завдання. В результаті нерівноточних вимірів одержано ряд значень величини. Необхідно виконати математичну обробку результатів, зокрема визначити найбільш надійне значення величини, розрахувати середні квадратичні похибки результатів вимірів, розрахувати середню квадратичну похибку найбільш надійного значення, побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини при довірчій імовірності $\beta = 0.9$, оцінити точність обчислення середніх квадратичних похибок.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 4. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n=12$ результатів вимірів величини, розпочинаючи з номера варіанта N . Для різних груп у таблиці задано результати вимірів наступних величин: $U=1$ – горизонтальний кут β і середні квадратичні похибки вимірів m_i ; $U=2$ – відмітка точки земної поверхні H та середні квадратичні похибки вимірів m_i ; $U=3$ – горизонтальний кут β і кількість прийомів вимірів k_i ; $U=4$ – перевищення h та кількість станцій вимірів K_i ; $U=5$ – горизонтальний кут β і середні квадратичні похибки вимірів m_i .

Приклад розв’язування завдання. Допустимо, задано $n=6$ результатів нерівноточних вимірів кута β і кількість прийомів вимірів k_i . Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

Результати вимірів			Результати розрахунків						
№	x_i	k_i	p_i	ε_i	$p_i \varepsilon_i$	$p_i \varepsilon_i^2$	v_i	$p_i v_i$	$p_i v_i^2$
1	89°47'16"	12	4	0	0	0	-4.6	-18.4	84.64
2	19	18	6	3	18	54	-1.6	- 9.6	15.36
3	26	6	2	10	20	200	+5.4	+10.8	58.32
4	21	15	5	5	25	125	+0.4	+ 2.0	0.80
5	23	9	3	7	21	147	+2.4	+ 7.2	17.28
6	28	3	1	12	12	144	+7.4	+ 7.4	54.76
Σ	-	-	21	-	96	670	-	-0.6	231.16

1. Обчислення ваг вимірів. Нерівноточність результатів вимірів кута виражається різною кількістю прийомів k_i . За таких умов вимірів ваги обчислюються з прямо пропорційної залежності до кількості прийомів:

$p_i = \frac{k_i}{c}$. Коефіцієнт пропорційності c приймаємо, наприклад, рівним найменшому значенню k_i . За такого вибору коефіцієнта, вага $p_6 = 1$.

2. Обчислення найбільш надійного значення кута виконуємо за формулою загальної арифметичної середини $\tilde{x} = x_{\min} + \frac{[p\varepsilon]}{[p]}$: $x_{\min} = 89^\circ 47' 16''$;

$\varepsilon_i = x_i - x_{\min}$; $\tilde{x} = 89^\circ 47' 20.5714285''$; $\tilde{x}_{окр} = 89^\circ 47' 20.6''$; абсолютна похибка заокруглення найбільш надійного значення $\Delta = \tilde{x} - \tilde{x}_{окр} = -0.0285715''$.

3. Обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги виконуємо за формулою Бесселя $\mu = \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-1}}$, де $v_i = x_i - \tilde{x}_{окр}$. Контроль проміжних

розрахунків: 1) $\Delta[p] = -0.6 = [pv]$; 2) $[p\varepsilon^2] - \frac{[p\varepsilon]^2}{[p]} = 231.15 \approx [pv^2]$.

Остаточо $\mu = \sqrt{\frac{231.16}{6-1}} = \pm 6.8''$. Середня квадратична похибка одиниці ваги характеризує точність результату виміру кута, в якого вага дорівнює одиниці. Оскільки $p_6 = 1$, то $x_6 = 89^\circ 47' 28'' \pm 6.8''$.

4. Розрахунок середніх квадратичних похибок вимірів кута виконуємо за формулою $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}}$. У підсумку одержуємо: $x_1 = 89^\circ 47' 16'' \pm 3.4''$;

$x_2 = 89^\circ 47' 19'' \pm 2.8''$; $x_3 = 89^\circ 47' 26'' \pm 4.8''$; $x_4 = 89^\circ 47' 21'' \pm 3.0''$;

$x_5 = 89^\circ 47' 23'' \pm 3.9''$; $x_6 = 89^\circ 47' 28'' \pm 6.8''$.

5. Обчислення середньої квадратичної похибки найбільш надійного значення кута: $M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm 1.48''$. Отже, $\tilde{x} = 89^\circ 47' 20.6'' \pm 1.48''$.

6. Побудова довірчого інтервалу $I_\beta = (\tilde{x} - t_\beta M; \tilde{x} + t_\beta M)$ для істинного значення кута. При $n < 20$ значення параметра t_β вибираємо з таблиці розподілу Стьюдента (додаток 1) за довірою ймовірністю $\beta = 0.9$ та числом ступенів свободи $r = n - 1 = 5$: $t_\beta = 2.02$. Отже, $I_\beta = (89^\circ 47' 17.6''; 89^\circ 47' 23.6'')$.

7. Розрахунок точності середніх квадратичних похибок одиниці ваги μ та найбільш надійного значення M : $m_\mu \approx \frac{\mu}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 2.15''$;
 $m_M \approx \frac{M}{\sqrt{2(n-1)}} = \pm 0.47''$. Отже, $\mu = 6.8'' \pm 2.15''$, $M = 1.48'' \pm 0.47''$.

Питання для самоконтролю

1. Які результати вимірів називають нерівноточними ?
2. Як визначити найбільш надійне значення нерівноточних вимірів величини?
3. В чому полягає принцип загальної арифметичної середини ?
4. Що таке вага виміру величини? Як визначити ваги вимірів ?
5. Як визначити вагу функції результатів вимірів? Які ваги мають проста і загальна арифметична середина ?
6. Який зміст терміну середня квадратична похибка одиниці ваги? Як обчислити середню квадратичну похибку одиниці ваги ?
7. Які властивості мають відхилення результатів вимірів від загальної арифметичної середини? Яке практичне застосування мають ці властивості ?
8. Як обчислити середні квадратичні похибки нерівноточних вимірів величини?
9. Як обчислити середню квадратичну похибку найбільш надійного значення нерівноточних вимірів величини ?
10. Як побудувати довірчий інтервал для істинного значення величини ?
11. Як оцінити точність середніх квадратичних похибок, обчислених за сукупністю результатів вимірів величини ?

4. ОБРОБКА ПОДВІЙНИХ РІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНОРІДНИХ ВЕЛИЧИН

Подвійними вимірами n однорідних фізичних величин X_1, X_2, \dots, X_n називають виміри, які виконано двічі для кожної з цих величин:

x_1, x_2, \dots, x_n – перший вимір величин X_1, X_2, \dots, X_n ;

x'_1, x'_2, \dots, x'_n – другий вимір величин X_1, X_2, \dots, X_n .

У практиці виконання подвійних вимірів мають місце наступні випадки:

- 1) усі виміри x_i та x'_i в сукупності рівноточні;
- 2) виміри в парах x_i та x'_i для кожної величини X_i рівноточні, але пари вимірів величин X_1, X_2, \dots, X_n між собою нерівноточні;
- 3) усі виміри x_i та x'_i в сукупності нерівноточні.

За результатами математичної обробки результатів вимірів цих величин необхідно визначити найбільш надійні значення величин і оцінити точність вимірів та найбільш надійних значень.

Результати подвійних вимірів x_i та x'_i називаються рівноточними в сукупності, якщо середні квадратичні похибки m_{x_i} та $m_{x'_i}$ всіх вимірів рівні поміж собою: $m_{x_i} = m_{x'_i} = m$.

Найбільш надійні значення \tilde{x}_i кожної з рівноточно виміряних величин виражає проста арифметична середина: їх обчислюють як середні арифметичні значення за парами подвійних вимірів величини x_i та x'_i :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + x'_i}{2}.$$

Кожне із значень \tilde{x}_i є функцією результатів вимірів x_i та x'_i : $\tilde{x}_i = F(x, x')$. Використовуючи формулу оцінювання точності функцій незалежних результатів вимірів $m_F^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2$, для середньої квадратичної похибки $m_{\tilde{x}} = m_F$ одержимо:

$$m_{\tilde{x}} = \frac{m}{\sqrt{2}}.$$

Оцінювання точності вимірів кожної однорідної величини окремо за двома одержаними результатами формально можна виконати за правилами, як це розкрито у темі 2. Проте показники точності, розраховані лише за двома вимірами, будуть суб'єктивними і ненадійними, позаяк за такого підходу порушуються засади закону великих чисел. Тому ця частина математичної обробки виконується за сукупністю усіх результатів, виходячи з різниць подвійних вимірів кожної величини

$$d_i = x_i - x'_i.$$

Якби було б можливо виконати виміри безпомилково, то результати вимірів кожної величини були б рівними і різниці d_i дорівнювали б нулю. Фактично d_i завжди набувають певних числових значень, що є наслідком впливу на виміри похибок різного походження. Тому кожне значення d_i є істинною похибкою самої різниці. На цій основі середню квадратичну похибку m_d різниць d_i виражає формула Гаусса:

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}.$$

Формулою Гаусса можна користуватись для обчислення m_d тільки за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок. Практично вона може бути використана і в тих випадках, коли їх вплив на результати вимірів є допустимим.

Основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць d_i . Проте це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок рівноточних вимірів можна оцінити за величиною $\frac{[d]}{n} = \delta$. Якщо результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$. Істотність такого впливу дає змогу оцінити нерівність $|\delta| \leq \frac{1}{5} m_d$ або рівносильна щодо неї $|[d]| \leq 0.25|[d']|$. Якщо умова однієї чи іншої нерівності виконується, то залишковий вплив систематичних похибок несуттєвий і ним можна нехтувати. Лише за такої умови подальше оцінювання точності ґрунтується на формулі Гаусса.

В протилежному випадку формулою Гаусса користуватись неприпустимо, позаяк це спричинює обчислення завищених значень числових оцінок точності. Тому насамперед систематичні похибки потрібно видалити з результатів подвійних вимірів.

Загалом систематичним похибкам властивий постійний або односторонній характер. За умови подвійних рівноточних вимірів однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри постійний вплив, не змінюючи свій знак і абсолютну величину. Тому їх можна видалити за принципом рівномірного розподілу шляхом відніманням від різниць d_i середнього значення залишкового систематичного впливу δ :

$$d'_i = d_i - \delta.$$

d'_i – це різниці подвійних рівноточних вимірів, які позбавлені впливу постійних систематичних похибок. При будь-якій кількості вимірів $[d'] = 0$.

Обчислені на таких умовах значення різниць d'_i – це відхилення результатів рівноточних вимірів від простої арифметичної середини δ . Тому після видалення систематичних похибок середня квадратична похибка різниць m_d підлягає обчисленню за формулою Бесселя

$$m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}.$$

Якщо при обчисленні різниць d'_i користувались заокругленим значенням $\delta_{окр}$ і $d'_i = d_i - \delta_{окр}$, то має місце похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[d'] = n\Delta$. Різниці d'_i , як відхилення результатів подвійних рівноточних вимірів від простої арифметичної середини, мають властивість $[d'^2] = \min$.

Тому $[d'^2] = [d^2] - \frac{[d]^2}{n}$. Останніми рівностями можна користуватись для

контролю проміжних розрахунків при визначенні середньої квадратичної похибки різниць подвійних вимірів за формулою Бесселя.

Різниці $d_i = x_i - x'_i$ обчислюються за результатами вимірів x_i та x'_i . Отже, d_i є функціями результатів вимірів: $d_i = F(x_i, x'_i)$. На такій основі середню квадратичну похибку m_d можна виразити, ґрунтуючись на формулі оцінювання точності функцій незалежних результатів вимірів

$$m_F^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2 : \quad m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2. \quad \text{Беручи до уваги, що}$$

$m_{x_i} = m_{x'_i} = m$, $m_d = m\sqrt{2}$. Звідси для середньої квадратичної похибки подвійних рівноточних незалежних вимірів одержимо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} ; \quad m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}.$$

Середня квадратична похибка різниць m_d обчислюється за формулами Гаусса або Бесселя, що визначається фактом відсутності чи наявності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок.

Якщо різниці $d_i = x_i - x'_i$ є функціями $d_i = F(x_i, x'_i)$ залежних результатів вимірів x_i та x'_i і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{i,j} = r_{x,x'}$, то середню квадратичну похибку різниць m_d потрібно виражати, ґрунтуючись на формулі оцінювання точності функцій залежних

результатів вимірів $m_F^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 m_i^2 + 2 \sum_{i < j} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)_0 r_{i,j} m_i m_j$. Тоді

$$m_F^2 = m_d^2 = m_x^2 + m_{x'}^2 - 2m_x m_{x'} r_{x,x'} \quad \text{і, беручи до уваги, що } m_{x_i} = m_{x'_i} = m,$$

$m_d^2 = 2m^2 - 2m^2 r_{x,x'} = 2m^2(1 - r_{x,x'})$. Звідси для середньої квадратичної похибки подвійних рівноточних залежних вимірів одержимо:

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2(1 - r_{x,x'})}} ; \quad m = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n(1 - r_{x,x'})}}.$$

Отже, середню квадратичну похибку подвійних рівноточних вимірів m і середню квадратичну похибку найбільш надійних значень $m_{\bar{x}}$ однорідних величин розраховують за похибкою різниць подвійних вимірів m_d . Для вираження m_d попередньо потрібно перевірити допустимість впливу на результати вимірів систематичних похибок. За умови відсутності у вимірах систематичних похибок значення m_d розраховують за формулою Гаусса; у

протилежному випадку систематичні похибки видаляють з різниць подвійних вимірів і значення m_d розраховують за формулою Бесселя.

Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які рівноточні в сукупності, розкриває схема на рис. 5.



Рис. 5. Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які рівноточні в сукупності

Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів подвійних вимірів однорідних величин, які рівноточні в сукупності.

Завдання. Перевищення вздовж нівелірного полігону вимірювали в n секціях однакової довжини при двох горизонтах приладу в кожній секції. З результатами подвійних рівноточних вимірів перевищень в секціях потрібно визначити найбільш надійні значення перевищень і середні квадратичні похибки вимірів та найбільш надійних значень перевищень.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 5. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n=12$ результатів подвійних вимірів перевищень, розпочинаючи з номера варіанта N .

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано результати подвійних вимірів перевищень в $n=6$ секціях нівелірного полігону. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

Результати вимірів			Результати розрахунків					
№	h_i (мм)	h'_i (мм)	\tilde{h}_i (мм)	d_i	$ d_i $	d_i^2	d'_i	$d_i'^2$
1	- 1370	- 1373	- 1371.5	+3	3	9	+1.7	2.89
2	+ 102	+ 101	+ 101.5	+1	1	1	-0.3	0.09
3	+2184	+ 2180	+2182.0	+4	4	16	+2.7	7.29
4	+1219	+ 1219	+1219.0	0	0	0	-1.3	1.69
5	- 153	- 154	- 153.5	+1	1	1	-0.3	0.09
6	- 864	- 863	- 863.5	- 1	1	1	-2.3	5.29
Σ	-	-	-	+8	10	28	+0.2	17.34

1. Найбільш надійні значення подвійних рівноточних вимірів перевищень в секціях розраховуємо як середні арифметичні одержаних результатів у кожній парі вимірів за формулою $\tilde{h}_i = \frac{h_i + h'_i}{2}$.

2. Обчислюємо різниці $d_i = h_i - h'_i$ результатів подвійних вимірів перевищень у кожній секції.

3. Перевіряємо допустимість впливу на виміри систематичних похибок за умовою нерівності $|[d]| \leq 0.25[d']$: $[d] = 8$ мм; $[d'] = 10$ мм; $|[d]| > 0.25[d']$. Умова нерівності не виконується. Отже, подвійні виміри перевищень надміру обтяжені систематичними похибками, які потрібно видаляти з одержаних результатів.

4. Оскільки перевищення вимірювались у секціях однакової довжини, то виявлені систематичні похибки мають постійний характер. Для їх видалення з результатів вимірів виражаємо середнє значення залишкового систематичного впливу $\delta = \frac{[d]}{n}$: $\delta = 1.33333$ мм; $\delta_{окр} = 1.3$ мм.; абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр} = 0.03333$ мм. Обчислюємо різниці подвійних вимірів $d'_i = d_i - \delta_{окр}$ і суму $[d'^2]$. Результати контролюємо наступними умовами: 1) $n\Delta = 0.2 = [d']$; 2) $[d^2] - \frac{[d]^2}{n} = 17.34 = [d'^2]$. Умови контролів виконуються. Насамкінець обчислюємо середню квадратичну похибку різниць m_d за формулою Бесселя: $m_d = \sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}} = \pm 1.9$ мм.

5. Обчислюємо середню квадратичну похибку m подвійних рівноточних вимірів перевищень в кожній секції нівелірного полігону: $m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm 1.3$ мм.

6. Обчислюємо середню квадратичну похибку $m_{\tilde{h}}$ найбільш надійних значень подвійних рівноточних вимірів перевищень в секціях нівелірного полігону: $m_{\tilde{h}} = \frac{m}{\sqrt{2}} = \pm 0.95$ мм.

Питання для самоконтролю

1. Які виміри називають подвійними ?
2. Які результати подвійних вимірів називають рівноточними в сукупності ?
3. Як обчислити найбільш надійні значення подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?
4. Чому оцінку точності виконують тільки за сукупністю різниць подвійних вимірів всіх однорідних величин ?
5. Як і в яких випадках середню квадратичну похибку різниць подвійних вимірів обчислюють за формулами Гаусса та Бесселя ?
6. Як визначити допустимість впливу на подвійні рівноточні виміри систематичних похибок ?
7. Як видалити з результатів подвійних рівноточних вимірів систематичні похибки ?
8. Як обчислити середню квадратичну похибку подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?
9. Як обчислити середню квадратичну похибку найбільш надійних значень подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?
10. Яка мета і черговість математичної обробки подвійних рівноточних вимірів однорідних величин ?

5. ОБРОБКА ПОДВІЙНИХ НЕРІВНОТОЧНИХ ВИМІРІВ ОДНОРІДНИХ ВЕЛИЧИН

Допустимо, результати x_1, x_2, \dots, x_n та x'_1, x'_2, \dots, x'_n подвійних вимірів n однорідних фізичних величин X_1, X_2, \dots, X_n в парах x_i та x'_i для кожної величини X_i рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні. За таких умов, з точки зору точності, в кожній парі вимірів середні квадратичні похибки рівні: $m_{x_i} = m_{x'_i} = m_i$. Але між парами вимірів $m_1 \neq m_2 \neq \dots \neq m_n$. Якщо $p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i$ – вага кожного з подвійних вимірів окремої величини X_i , то ваги пар вимірів різняться поміж собою: $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$. Ваги p_i подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин виражають за тими чи іншими ознаками залежно від зміни умов проведення вимірів.

Мета виконання математичної обробки одержаних на таких умовах результатів незмінна – необхідно визначити найбільш надійні значення величин і оцінити точність вимірів та найбільш надійних значень.

В основу оцінювання точності покладено різниці $d_i = x_i - x'_i$ подвійних вимірів кожної величини, які є функціями результатів вимірів: $d_i = F(x_i, x'_i)$. На такій основі ваги p_{d_i} різниць можна виразити за формулою оцінювання точності функцій виміряних величин

$$\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i} : \frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{d_i}} = \frac{1}{p_{x_i}} + \frac{1}{p_{x'_i}} = \frac{2}{p_i}, \text{ звідки } p_{d_i} = \frac{p_i}{2}.$$

Найбільш надійні значення \tilde{x}_i величин X_i , кожна з яких виміряна двічі на умовах рівноточності, обчислюють за принципом простої арифметичної середини як середнє арифметичне з результатів вимірів x_i та x'_i :

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i + x'_i}{2}.$$

Беручи до уваги, що значення \tilde{x}_i є функціями результатів вимірів $\tilde{x}_i = F(x_i, x'_i)$, на основі тієї ж формули оцінювання точності функцій

виміряних величин $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{p_i}$ для ваг $p_{\tilde{x}_i}$ одержимо наступне:

$$\frac{1}{P_F} = \frac{1}{p_{\tilde{x}_i}} = \frac{1}{4p_{x_i}} + \frac{1}{4p_{x'_i}} = \frac{1}{2p_i}. \text{ Звідси } p_{\tilde{x}_i} = 2p_i \text{ або } p_{\tilde{x}_i} = 4p_{d_i}.$$

Одержаний результат дає змогу оцінити середні квадратичні похибки найбільш надійних значень формулами

$$m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{\tilde{x}_i}}}, \text{ або } m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{2p_i}}, \text{ або } m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{2\sqrt{p_{d_i}}},$$

де μ – середня квадратична похибка одиниці ваги.

Раніше було обґрунтовано, що в умовах подвійних вимірів x_i та x'_i кожна різниця $d_i = x_i - x'_i$ – це істинна похибка самої різниці. На цій основі середня квадратична похибка одиниці ваги μ може бути виражена формулою Гаусса

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{n}} \text{ або } \mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}.$$

Якщо різниці d_i є функціями залежних результатів подвійних вимірів x_i та x'_i і цю залежність виражає коефіцієнт кореляції $r_{x,x'}$, то

$$\mu = \sqrt{\frac{[pd^2]}{2n(1-r_{x,x'})}}.$$

Формулою Гаусса у будь-якому з її поданих тут різновидів можна користуватись для обчислення середньої квадратичної похибки одиниці ваги за умови відсутності в результатах подвійних вимірів систематичних похибок або якщо їх вплив на результати вимірів є допустимим.

Загалом, основна частина систематичних похибок вимірів компенсується при обчисленні різниць d_i . Проте це не забезпечує їх повного видалення. Середнє значення залишкового впливу систематичних похибок нерівноточних вимірів за умов $p_{x_i} = p_{x'_i} = p_i$ і $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$ можна

оцінити за величиною загальної арифметичної середини $\delta = \frac{[p_d d]}{[p_d]}$. Якщо

результати подвійних вимірів обтяжені залишковим впливом систематичних похибок, то $\delta \neq 0$. Істотність такого впливу дає змогу оцінити нерівність

$|\delta| \leq \frac{1}{5} \mu$ або рівносильна щодо неї $[d\sqrt{p_d}] \leq 0.25[d\sqrt{p_d}]$. Якщо умова

однієї чи іншої нерівності виконується, то залишковий вплив систематичних похибок несуттєвий і ним можна нехтувати. Лише за такої умови подальше оцінювання точності ґрунтується на формулі Гаусса. В протилежному випадку формула Гаусса спричинює обчислення завищених значень числових оцінок точності. Тому насамперед систематичні похибки потрібно видалити з результатів подвійних вимірів.

При нерівноточних подвійних вимірах однорідних величин систематичні похибки спричинюють на виміри односторонній вплив, не змінюючи свій знак, але змінюючи абсолютну величину при зміні умов вимірів. Тому в цьому випадку систематичні похибки потрібно видаляти за принципом пропорційного розподілу шляхом віднімання від різниць d_i поправок δ_i :

$$d_i - \delta_i = d'_i.$$

При обчисленні поправок δ_i потрібно проводити ретельний аналіз умов вимірів з метою встановлення факторів, які спричинюють односторонній вплив систематичних похибок. Залежно від таких факторів систематична похибка розподіляється у виміри диференційовано. Наприклад, при

подвійних вимірах довжин ліній s_i різного порядку $\delta_i = \frac{[d]}{[s]} \tilde{s}_i$, де \tilde{s}_i –

найбільш надійні значення подвійних вимірів довжин ліній. При подвійних

вимірах перевищень в нівелірних ходах різної довжини $\delta_i = \frac{[d]}{[S]} S_i$, де S_i –

довжини нівелірних ходів. При подвійних вимірах перевищень в ходах з

різним числом штативів (станцій) $\delta_i = \frac{[d]}{[k]} k_i$, де k_i – число штативів відповідного ходу. На практиці залежно від умов проведення подвійних вимірів мають місце й інші фактори, які зумовлюють односторонній вплив систематичних похибок. В поданих формулах відношення $\frac{[d]}{[\tilde{s}]} = \delta_0$, $\frac{[d]}{[S]} = \delta_0$.

або $\frac{[d]}{[k]} = \delta_0$ є сталою величиною для одержаного ряду подвійних вимірів.

Величину δ_0 називають коефіцієнтом залишкового систематичного впливу. З врахування поправок δ_i обчислені значення d'_i – це різниці подвійних вимірів, які позбавлені залишкового впливу односторонніх систематичних похибок. При будь-якій кількості вимірів $[p_d d'] = 0$.

З іншого боку, обчислені на таких умовах значення різниць d'_i – це відхилення результатів нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини δ . Тому після видалення з результатів подвійних нерівноточних вимірів систематичних похибок середню квадратичну похибку одиниці ваги μ обчислюють за формулою Бесселя

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}} \quad \text{або} \quad \mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{2(n-1)}}.$$

Якщо при обчисленні різниць d'_i користувались заокругленим значенням $\delta_{окр}$ і $d'_i = d_i - \delta_{окр}$, то має місце абсолютна похибка заокруглення $\Delta = \delta - \delta_{окр}$ і тоді $[p_d d'] = \Delta [p_d]$. Різниці d'_i , як відхилення результатів подвійних нерівноточних вимірів від загальної арифметичної середини, мають властивість $[p_d d'^2] = \min$. Тому $[p_d d'^2] = [p_d d^2] - \frac{[p_d d]^2}{[p_d]}$. Останні

рівності використовують для проміжних контролів при обчисленні середньої квадратичної похибки одиниці ваги μ за формулою Бесселя.

Після визначення середньої квадратичної похибки одиниці ваги, використовуючи формули Гаусса або Бесселя, розраховують похибки m_i відповідних результатів подвійних вимірів x_i та x'_i :

$$m_i = \frac{\mu}{\sqrt{p_i}} \quad \text{або} \quad m_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_d}}.$$

Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які в парах x_i та x'_i для кожної

величини X_i рівноточні, але пари вимірів величин X_1, X_2, \dots, X_n між собою нерівноточні, розкриває схема на рис. 6.

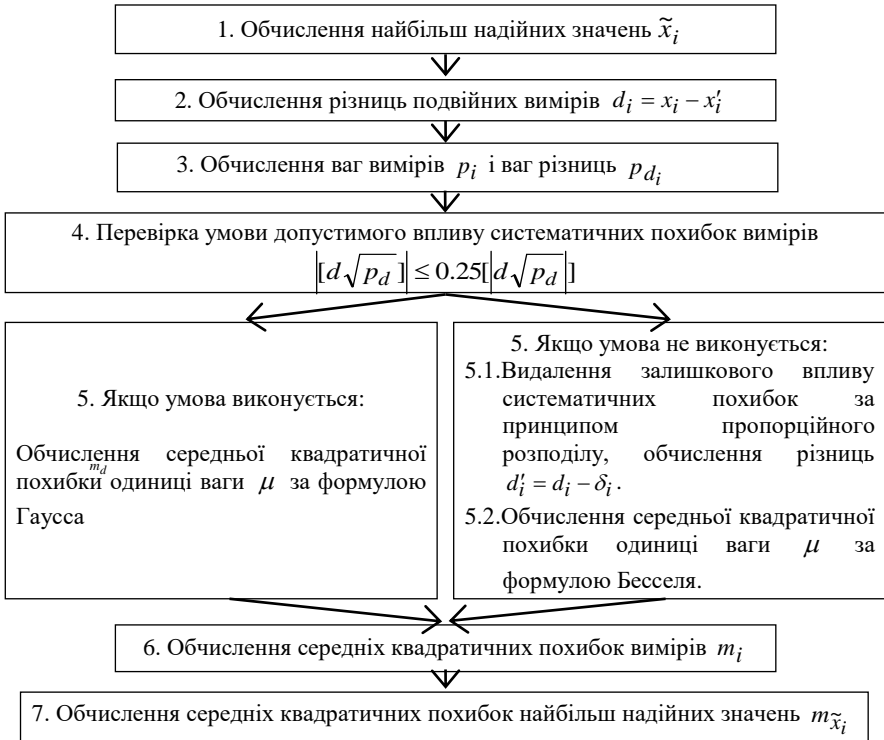


Рис. 6. Черговість дій при виконанні математичної обробки результатів подвійних вимірів однорідних величин, які в парах для кожної величини рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні

Допустимо, усі результати x_1, x_2, \dots, x_n та x'_1, x'_2, \dots, x'_n подвійних вимірів n однорідних фізичних величин X_1, X_2, \dots, X_n нерівноточні в сукупності. Хоча у практиці проведення польових геодезичних робіт такі виміри зустрічаються рідко, проте можуть бути одержані, якщо виконані в неоднакових умовах і мають різні середні квадратичні похибки m_{x_i} та $m_{x'_i}$, тобто $m_{x_i} \neq m_{x'_i}$. Ваги таких вимірів також різні: $p_{x_i} \neq p_{x'_i}$.

Оцінку точності вимірів теж виконують за сукупністю різниць $d_i = x_i - x'_i$. Вага p_{d_i} кожної різниці виражається як вага функції $d_i = F(x_i, x'_i)$ результатів незалежних нерівноточних вимірів x_i та x'_i за формулою

оцінювання точності функцій вимірних величин $\frac{1}{P_F} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0^2 \frac{1}{P_i}$:

$$\frac{1}{P_{d_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} + \frac{1}{P_{x'_i}} = \frac{P_{x_i} + P_{x'_i}}{P_{x_i} P_{x'_i}}, \text{ звідки } p_{d_i} = \frac{P_{x_i} P_{x'_i}}{P_{x_i} + P_{x'_i}}.$$

Якщо подвійні виміри обтяжені лише допустимими систематичними похибками, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Гаусса:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d^2]}{n}}.$$

Якщо подвійні виміри містять значні односторонні систематичні похибки і вони попередньо видалені з різниць d_i за принципом пропорційного розподілу, то середню квадратичну похибку одиниці ваги розраховують за формулою Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}}.$$

Тут $d'_i = d_i - \delta_i$ – це різниці подвійних вимірів, які позбавлені залишкового впливу односторонніх систематичних похибок. Допустимість впливу систематичних похибок перевіряють нерівністю $[d\sqrt{p_d}] \leq 0.25[d\sqrt{p_d}]$.

Середні квадратичні похибки кожного з подвійних вимірів x_i чи x'_i виражають з урахуванням відповідних їм ваг p_{x_i} чи $p_{x'_i}$:

$$m_{x_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i}}}; \quad m_{x'_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x'_i}}}.$$

Найбільш надійні значення \tilde{x}_i кожної з однорідних величин X_i виражають за принципом загальної арифметичної середини (середнє вагове) як функції результатів нерівноточних вимірів x_i та x'_i :

$$\tilde{x}_i = \frac{[xp]}{[p]} = \frac{x_i p_{x_i} + x'_i p_{x'_i}}{p_{x_i} + p_{x'_i}}.$$

Вага загальної арифметичної середини для кожної з однорідних величин X_i дорівнює сумі ваг результатів нерівноточних вимірів цієї величини: $p_{\tilde{x}_i} = p_{x_i} + p_{x'_i}$. На цій основі, середні квадратичні похибки $m_{\tilde{x}_i}$ найбільш надійних значень \tilde{x}_i виражають, враховуючи відповідні ваги $p_{\tilde{x}_i}$:

$$m_{\tilde{x}_i} = \frac{\mu}{\sqrt{p_{x_i} + p_{x'_i}}}.$$

Хід роботи

Під час виконання роботи виконується математична обробка результатів подвійних вимірів однорідних величин, які в парах для кожної величини рівноточні, але пари вимірів величин між собою нерівноточні.

Завдання. Нівелірний полігон об'єднує n ходів. Для кожного ходу числом станцій (штативів) k_i виміряли у прямому та зворотному напрямках перевищення h_i та h'_i . За результатами подвійних рівноточних вимірів в ходах потрібно визначити найбільш надійні значення перевищень, середні квадратичні похибки вимірів та найбільш надійних значень перевищень.

Вхідні дані для виконання завдання зведено до таблиці додатку 6. З таблиці за номером групи U потрібно вибрати підряд $n=12$ результатів подвійних вимірів перевищень h_i та h'_i і число станцій k_i , розпочинаючи з номера варіанта N .

Приклад розв'язування завдання. Допустимо, задано результати подвійних вимірів перевищень в $n=6$ ходах нівелірного полігону. Вхідні дані та результати проміжних розрахунків поміщено у таблиці:

Результати вимірів				Результати розрахунків									
№	h (мм)	h' (мм)	k	\tilde{h}	d	p_d	$d\sqrt{p_d}$	$ d\sqrt{p_d} $	$p_d d$	$p_d d^2$	d'	$p_d d'$	$p_d d'^2$
1	-1370	-1373	26	-1371.5	+3	0.6	+2.3	2.3	+1.8	5.4	+2.1	+1.26	2.646
2	+102	+101	20	+101.5	+1	0.8	+0.9	0.9	+0.8	0.8	+0.1	+0.08	0.008
3	+2184	+2180	22	+2182.0	+4	0.7	+3.3	3.3	+2.8	11.2	+3.1	+2.17	6.727
4	+1219	+1219	8	+1219.0	0	2.0	0	0	0	0	-0.9	-1.80	1.620
5	-153	-154	12	-153.5	+1	1.3	+1.1	1.1	+1.3	1.3	+0.1	+0.13	0.013
6	-864	-863	16	-863.5	-1	1.0	-1.0	1.0	-1.0	1.0	-1.9	-1.90	3.610
Σ	-	-	-	-	-	6.4	+6.6	8.6	+5.7	19.7	-	-0.06	14.624

1. Найбільш надійні значення подвійних рівноточних вимірів перевищень кожного ходу розраховуємо як середні арифметичні одержаних результатів у кожній парі вимірів за формулою

$$\tilde{h}_i = \frac{h_i + h'_i}{2}.$$

2. Обчислюємо різниці $d_i = h_i - h'_i$ результатів подвійних вимірів перевищень кожного ходу.

3. Обчислюємо ваги вимірів p_i і ваги різниць $p_d i$. За умовою завдання подвійні виміри перевищення кожного ходу рівноточні. Нівелювання ходів виконані різним числом станцій, отже виміри перевищень поміж ходами

нерівноточні. Позаяк збільшення числа станцій спричинює зниження точності результатів вимірів, то вага результату виміру перевищення кожного ходу виражається оберненою залежністю щодо числа станцій:

$$p_i = \frac{c}{k_i}. \quad c - \text{коєфіцієнт пропорційності. Обчислюємо ваги різниць подвійних}$$

вимірів: $p_{d_i} = \frac{P_i}{2} = \frac{c}{k_i}$, де коєфіцієнт пропорційності, наприклад, $c = 16$.

4. Перевіряємо допустимість впливу на виміри систематичних похибок за умовою нерівності $|[d\sqrt{p_d}]| \leq 0.25[d\sqrt{p_d}]$: $|[d\sqrt{p_d}]| = 6.6 \text{ мм}$; $[d\sqrt{p_d}] = 8.6 \text{ мм}$; $|[d\sqrt{p_d}]| > 0.25[d\sqrt{p_d}]$. Умова нерівності не виконується. Отже, подвійні виміри перевищень надміру обтяжені систематичними похибками.

5. З метою видалення з результатів вимірів виявлених систематичних похибок виражаємо середнє значення залишкового систематичного впливу

$$\delta = \frac{[p_d d]}{[p_d]}: \delta = 0.890625 \text{ мм}; \delta_{окр} = 0.9 \text{ мм}; \text{ абсолютна похибка заокруглення}$$

$$\Delta = \delta - \delta_{окр} = -0.009375 \text{ мм. Обчислюємо наближені значення різниць}$$

$d'_i = d_i - \delta_{окр}$ і суму $[p_d d'^2]$. Результати контролюємо наступними

$$\text{умовами: } 1) \Delta[p_d] = -0.06 = [p_d d']; \quad 2) [p_d d^2] - \frac{[p_d d]^2}{[p_d]} = 14.623 \approx [p_d d'^2].$$

Умови контролів виконуються. Насамкінець обчислюємо середню квадратичну похибку одиниці ваги за формулою Бесселя:

$$\mu = \sqrt{\frac{[p_d d'^2]}{n-1}} = \pm 1.7 \text{ мм. } \mu - \text{це середня квадратична похибка різниць, у}$$

яких вага дорівнює одиниці. Тому, оскільки $p_{d_6} = 1$, середня квадратична похибка $m_{d_6} = \pm 1.7 \text{ мм}$.

6. Обчислюємо середні квадратичні похибки m_i результатів вимірів перевищень кожного ходу за формулою $m_i = \frac{\mu}{\sqrt{2p_{d_i}}}$: $m_1 = \pm 1.6 \text{ мм}$, ... ,

$$m_4 = \pm 0.8 \text{ мм}, \dots, m_6 = \pm 1.2 \text{ мм. Отже, перевищення у ходах виміряні з наступними середніми квадратичними похибками: } h_1 = -1370 \pm 1.6 \text{ (мм); } h'_1 = -1373 \pm 1.6 \text{ (мм); } \dots, h_6 = -864 \pm 1.2 \text{ (мм); } h'_6 = -863 \pm 1.2 \text{ (мм).}$$

7. Обчислюємо середні квадратичні похибки найбільш надійних значень перевищень \tilde{h}_i за формулою $m_{\tilde{h}_i} = \frac{\mu}{2\sqrt{p_{d_i}}}$: $m_{\tilde{h}_1} = \pm 1.1 \text{ мм}$; ... ,

$m_{\tilde{h}_4} = \pm 0.6$ мм; ... , $m_{\tilde{h}_6} = \pm 0.8$ мм. Отже, $\tilde{h}_1 = -1371.5 \pm 1.1$ (мм); ... ,
 $\tilde{h}_4 = 1219.0 \pm 0.6$ (мм); ... , $\tilde{h}_6 = -863.5 \pm 0.8$ (мм).

Питання для самоконтролю

1. Які результати подвійних вимірів однорідних величин називають нерівноточними ?
2. Як обчислюють найбільш надійні значення подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?
3. Як і в яких випадках середню квадратичну похибку одиниці ваги обчислюють за формулами Гаусса та Бесселя ?
4. Як виявити вплив на подвійні нерівноточні виміри систематичних похибок ?
5. Як видалити з результатів подвійних нерівноточних вимірів систематичні похибки ?
6. Який зміст принципу пропорційного розподілу залишкового впливу систематичних похибок між результатами подвійних вимірів ?
7. Як розрахувати середні квадратичні похибки результатів подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?
8. Як розрахувати середні квадратичні похибки найбільш надійних значень подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?
9. Який зміст і черговість математичної обробки подвійних нерівноточних вимірів однорідних величин ?

Література

1. Видуев Н. Г., Григоренко А. Г. Математическая обработка геодезических измерений : навчальний посібник. Київ : Вища школа, 1978. 376 с.
2. Войтенко С. . Математична обробка геодезичних вимірів. Теорія похибок вимірів : навчальний посібник. Київ : КНУБА, 2003. 216 с.
3. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірів : підручник / Зазуляк П. М., Гавриш В. І., Євсєєва Е. М., Йосипчук М. Д. Львів: Растр-7, 2007. 408 с.

Значення параметра розподілу Стьюдента t_{β} залежно від β та $n-1$

β $n-1$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.08	6.31	12.71	31.8	63.7	636.6
2	142	289	445	617	0.816	1.061	336	1.886	2.92	4.30	6.96	9.92	31.6
3	137	277	424	584	765	0.978	250	638	2.35	3.18	4.54	5.84	12.94
4	134	271	414	569	741	941	190	533	2.13	2.77	3.75	4.60	8.61
5	132	267	408	559	727	920	156	476	2.02	57	3.36	4.03	6.86
6	132	265	404	553	718	906	134	440	1.943	45	3.14	3.71	5.96
7	130	263	402	549	711	896	119	415	895	36	3.00	50	5.40
8	130	262	399	546	706	889	108	397	860	31	2.90	36	5.04
9	129	261	398	543	703	883	100	383	833	26	82	25	4.78
10	129	260	397	542	700	879	093	372	812	23	76	17	4.59
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.20	2.72	3.11	4.49
12	128	259	395	539	695	873	083	356	782	18	68	3.06	32
13	128	259	394	538	694	870	079	350	771	16	65	3.01	22
14	128	258	393	537	692	868	076	345	761	14	62	2.98	14
15	128	258	393	536	691	866	074	341	753	13	60	95	07
16	128	258	392	535	690	865	071	337	746	12	58	92	4.02
17	128	257	392	534	689	863	069	333	740	11	57	90	3.96
18	127	257	392	534	688	862	067	330	734	10	55	88	92
19	127	257	391	533	688	861	066	328	729	09	54	86	88
20	127	257	391	533	687	860	064	325	725	09	53	84	85
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.08	2.52	2.83	3.82
22	127	256	390	532	686	858	061	321	717	07	51	82	79
23	127	256	390	532	685	858	060	319	714	07	50	81	77
24	127	256	390	531	685	857	059	318	711	06	49	80	74
25	127	256	390	531	684	856	058	316	708	06	48	79	72
26	127	256	390	531	684	856	058	315	706	06	48	78	71
27	127	256	389	531	684	855	057	314	703	05	47	77	69
28	127	256	389	530	683	855	056	313	701	05	47	76	67
29	127	256	389	530	683	854	055	311	699	04	46	76	66
30	127	256	389	530	683	854	055	310	697	04	46	75	65
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.02	2.42	2.70	3.55
60	126	254	387	527	679	848	046	296	671	2.00	39	66	46
120	126	254	386	526	677	845	041	289	658	1.98	36	62	37
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.96	2.33	2.58	3.29

Значення нормальної функції розподілу $\Phi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$	t	$\Phi^*(t)$
0.00	0.5000	0.40	0.6554	0.80	0.7881	1.20	0.8849	1.60	0.9452	2.00	0.9772
0.01	5040	0.41	6591	0.81	7910	1.21	8869	1.61	9463	2.10	9821
0.02	5080	0.42	6628	0.82	7939	1.22	8888	1.62	9474	2.20	9861
0.03	5120	0.43	6664	0.83	7967	1.23	8907	1.63	9484	2.30	9893
0.04	5160	0.44	6700	0.84	7995	1.24	8925	1.64	9495	2.40	9918
0.05	5199	0.45	6736	0.85	8023	1.25	8944	1.65	9505	2.50	9938
0.06	5239	0.46	6772	0.86	8051	1.26	8962	1.66	9515	2.60	9953
0.07	5279	0.47	6808	0.87	8078	1.27	8980	1.67	9525	2.70	9965
0.08	5319	0.48	6844	0.88	8106	1.28	8997	1.68	9535	2.80	9974
0.09	5359	0.49	6879	0.89	8133	1.29	9015	1.69	9545	2.90	9981
0.10	0.5398	0.50	0.6915	0.90	0.8159	1.30	0.9032	1.70	0.9554	3.00	0.9986
0.11	5438	0.51	6950	0.91	8186	1.31	9049	1.71	9564	3.10	9990
0.12	5478	0.52	6985	0.92	8212	1.32	9066	1.72	9573	3.20	9993
0.13	5517	0.53	7019	0.93	8238	1.33	9082	1.73	9582	3.30	9995
0.14	5557	0.54	7054	0.94	8264	1.34	9099	1.74	9591	3.40	9997
0.15	5596	0.55	7088	0.95	8289	1.35	9115	1.75	9599	3.50	9998
0.16	5636	0.56	7123	0.96	8315	1.36	9131	1.76	9608	3.60	9998
0.17	5675	0.57	7157	0.97	8340	1.37	9147	1.77	9616	3.70	9999
0.18	5714	0.58	7190	0.98	8365	1.38	9162	1.78	9625	3.80	0.9999
0.19	5753	0.59	7224	0.99	8389	1.39	9177	1.79	9633	3.90	1.0000
0.20	0.5793	0.60	0.7257	1.00	0.8413	1.40	0.9192	1.80	0.9641		
0.21	5832	0.61	7291	1.01	8437	1.41	9207	1.81	9649		
0.22	5871	0.62	7324	1.02	8461	1.42	9222	1.82	9656		
0.23	5910	0.63	7357	1.03	8485	1.43	9236	1.83	9664		
0.24	5948	0.64	7389	1.04	8508	1.44	9251	1.84	9671		
0.25	5987	0.65	7422	1.05	8531	1.45	9265	1.85	9678		
0.26	6026	0.66	7454	1.06	8554	1.46	9279	1.86	9686		
0.27	6064	0.67	7486	1.07	8577	1.47	9292	1.87	9693		
0.28	6103	0.68	7517	1.08	8599	1.48	9306	1.88	9699		
0.29	6141	0.69	7549	1.09	8621	1.49	9319	1.89	9706		
0.30	0.6179	0.70	0.7580	1.10	0.8643	1.50	0.9332	1.90	0.9713		
0.31	6217	0.71	7611	1.11	8665	1.51	9345	1.91	9719		
0.32	6255	0.72	7642	1.12	8686	1.52	9357	1.92	9726		
0.33	6293	0.73	7673	1.13	8708	1.53	9370	1.93	9732		
0.34	6331	0.74	7703	1.14	8729	1.54	9382	1.94	9738		
0.35	6368	0.75	7734	1.15	8749	1.55	9394	1.95	9744		
0.36	6406	0.76	7764	1.16	8770	1.56	9406	1.96	9750		
0.37	6443	0.77	7794	1.17	8790	1.57	9418	1.97	9756		
0.38	6480	0.78	7823	1.18	8810	1.58	9429	1.98	9761		
0.39	0.6517	0.79	0.7852	1.19	0.8830	1.59	0.9441	1.99	0.9767		

Вхідні дані для виконання завдання теми 2

№	Результати вимірів величин				
	U=1	U=2	U=3	U=4	U=5
	H_i	β_i	D_i	ϑ_i	h_i
	205,...м	57°23'..."	193,...м	2°...'	1,...м
1	302	44	22	38	234
2	321	40	28	33	236
3	308	43	24	36	238
4	304	45	20	30	237
5	309	46	23	32	234
6	316	43	29	35	235
7	303	48	25	36	233
8	318	45	24	39	236
9	305	48	31	34	238
10	309	46	28	33	232
11	304	47	24	37	234
12	311	41	20	35	239
13	306	49	24	38	237
14	301	42	27	31	240
15	312	46	25	36	241
16	314	41	21	40	235
17	307	44	29	42	233
18	304	43	23	36	236
19	310	47	30	33	231
20	313	40	24	35	234
21	315	49	28	38	237
22	317	45	26	40	238
23	302	48	21	31	232
24	303	42	25	37	240
25	319	46	22	32	234
26	306	47	29	38	233
27	309	41	27	39	236
28	314	48	20	34	235
29	308	48	31	36	241
30	301	44	26	40	239

Вхідні дані для виконання завдання теми 3

№	Результати вимірів величин									
	U=1		U=2		U=3		U=4		U=5	
	β_i	m_i	H_i	m_i	β_i	k_i	h_i	K_i	β_i	m_i
	32°11'..."	"	106,...м	мм	61°40'..."		1,...м		44°08'..."	"
1	22	2,5	316	6,3	32	4	387	14	52	3,5
2	25	4,0	318	5,3	33	6	385	12	48	2,5
3	27	4,8	319	5,0	33	6	386	11	49	3,0
4	23	3,1	317	5,7	34	7	384	10	50	2,4
5	28	5,2	319	4,9	32	5	381	11	48	3,1
6	30	6,0	321	4,6	34	5	383	12	51	3,5
7	21	2,3	323	4,1	34	6	382	12	52	4,1
8	25	2,9	322	4,3	35	8	380	10	52	3,6
9	22	3,4	324	4,2	36	12	380	9	50	3,0
10	24	2,1	325	4,6	36	8	379	10	53	4,4
11	29	5,0	326	4,9	35	9	378	8	54	4,1
12	28	5,3	325	4,8	37	9	376	6	53	4,3
13	26	4,3	327	5,2	38	10	377	5	55	5,5
14	27	5,1	328	5,6	39	11	375	4	56	5,3
15	26	5,0	329	5,7	37	9	375	3	55	5,0
16	24	3,6	331	6,5	40	10	374	3	57	6,1
17	23	3,0	330	5,9	41	12	373	2	56	6,0
18	22	2,5	320	4,4	32	6	381	9	58	6,3
19	24	2,2	319	4,5	33	7	383	7	48	6,2
20	29	3,7	321	5,1	40	5	376	6	51	2,5
21	28	2,8	323	6,4	35	8	382	8	52	4,4
22	25	5,2	322	5,4	34	6	384	10	52	5,4
23	27	3,4	324	6,1	37	12	375	13	50	5,1
24	23	4,6	316	6,3	39	9	387	11	53	6,2
25	28	4,1	318	5,5	39	10	383	14	52	6,1
26	26	3,3	319	5,3	36	8	374	12	48	6,3
27	27	5,0	317	4,1	34	11	378	5	49	5,9
28	26	4,5	328	6,6	32	6	376	8	56	3,8
29	24	4,7	329	5,2	40	7	381	4	55	2,9
30	23	2,6	331	4,7	41	5	385	6	57	3,1

Додаток 5

Вхідні дані для виконання завдання
теми 4

№	Результати подвійних вимірів					
	h_i (мм)	h'_i (мм)				
		U=1	U=2	U=3	U=4	U=5
1	-1561	-1565	-1564	-1558	-1555	-1560
2	-1484	-1487	-1486	-1480	-1482	-1478
3	-1370	-1375	-1373	-1367	-1369	-1368
4	102	101	101	102	103	104
5	2184	2184	2180	2188	2187	2186
6	1219	1218	1219	1220	1220	1221
7	-153	-152	-154	-152	-153	-151
8	-864	-866	-863	-860	-863	-862
9	2101	2103	2100	2102	2104	2105
10	1234	1230	1230	1232	1233	1231
11	1906	1903	1906	1909	1908	1910
12	-1313	-1319	-1318	-1312	-1309	-1308
13	-2202	-2203	-2201	-2203	-2204	-2205
14	930	926	927	932	936	938
15	1532	1526	1530	1535	1538	1540
16	128	130	123	130	129	128
17	-1075	-1079	-1074	-1070	-1071	-1073
18	732	736	730	734	733	731
19	632	634	630	633	635	631
20	2101	2103	2105	2102	2106	2102
21	-955	-956	-953	-951	-956	-954
22	1012	1010	1014	1015	1012	1013
23	-2020	-2025	-2019	-2018	-2016	-2023
24	-884	-880	-881	-885	-886	-882
25	935	936	933	933	932	930
26	1154	1150	1156	1151	1156	1155
27	-788	-785	-780	-789	-784	-785
28	-1555	-1550	-1556	-1554	-1559	-1560
29	2219	2219	2225	2217	2215	2216
30	-1010	-1005	-1015	-1009	-1013	-1014

Додаток 6

Вхідні дані для виконання
завдання теми 5

№	Результати подвійних вимірів					
	h_i h'_i	k_i				
		U=1	U=2	U=3	U=4	U=5
1		6	10	10	11	4
2		8	12	14	14	9
3		7	14	18	15	11
4		9	16	22	18	16
5		10	18	26	19	17
6		12	20	30	22	22
7		10	22	34	23	23
8		11	24	38	26	28
9		15	26	42	27	29
10		14	25	41	30	34
11		12	23	37	31	35
12		13	21	33	34	33
13		17	19	29	37	31
14		18	17	25	38	30
15		16	15	21	41	28
16		20	13	17	42	26
17		19	11	13	45	23
18		20	9	9	46	20
19		23	7	7	40	17
20		25	5	5	35	15
21		21	8	8	31	14
22		18	11	10	26	13
23		16	13	12	24	12
24		16	16	14	22	16
25		15	18	17	21	18
26		16	20	20	18	20
27		12	19	23	15	25
28		11	17	25	17	30
29		6	14	28	20	31
30		8	11	32	25	34

Результати вимірів перевічень подано в додатку 5