Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра прикладної математики

04-01-03

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт з дисципліни

«ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ »

для студентів напряму підготовки 6.040301

«Прикладна математика»

денної форми навчання

Частина 1

Рекомендовані до видання методичною комісією напряму підготовки 6.040301 «Прикладна математика»
Протокол ***№2*** *від 15 квітня 2015 р.*

Рівне -2015

Методичні вказівки до виконання практичних робіт з дисципліни «Теорія функцій комплексної змінної» для студентів напряму 6.040301 «Прикладна математика» денної форми навчання. Частина 1 / Гладун Л.В. – Рівне: НУВГП, 2015. - 24 с.

Упорядник: Л.В.Гладун, к.ф.-м.н., доцент кафедри прикладної математики

Відповідальний за випуск: П.М.Мартинюк, д.т.н., професор,
в.о. завідувача кафедри прикладної математики

ЗМІСТ

Вступ

При математичному моделюванні різноманітних процесів, явищ і залежностей часто отримують задачі, в яких невідомою є функція та похідні від неї. Неперервно диференційовані функції на інтервалі вивчає математичний аналіз. Теорія функцій комплексної змінної розглядає функції, які мають неперервну похідну в області комплексної площини, - аналітичні функції. Цей клас функцій значно вужчий від класу функцій, що мають неперервну похідну на інтервалі, і тому аналітичні функції мають багато добрих і важливих властивостей, яких не мають функції в дійсній області.

Теорія функцій комплексної змінної використовується при розв'язуванні задач гідромеханіки, теорії фільтрації, теорії пружності, теплотехніки, гідротехніки, електротехніки, радіотехніки, електронної оптики та ін.

У першій практичній роботі, крім операцій над комплексними числами, розглянуто методи описання множин на комплексній площині за допомогою співвідношень між комплексними числами.

Друга практична робота містить умови аналітичності функції, геомеричний зміст модуля та аргумента її похідної, а також способи відновлення аналітичної функції за відомою дійсною або уявною частиною.

До кожної практичної роботи приводиться необхідний теоретичний матеріал. Також наведено приклади розв'язання найбільш типових задач. В кінці кожної практичної роботи подано завдання для самостійної роботи.

Задачі, номери яких більші за двадцять чотири, можна віднести до задач підвищеної складності.

Операції над комплексними числами. Множини на комплексній площині

Комплексним числом z називається вираз $x+iy$, де x, y - довільні дійсні числа, $i=\sqrt{-1}$ - це символ, що називається уявною одиницею, тобто число, квадрат якого дорівнює -1, $i^2=-1$. Числа x і y називаються, відповідно, дійсною та уявною частинами комплексного числа $z=x+iy$ і позначаються символами $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$. Якщо $y=0$, то z - дійсне число; якщо $x=0, y\neq 0$, то z називається уявним числом.

Форма запису комплексного числа у вигляді $z=x+iy$ називається алгебраїчною.

Комплексне число $x-iy$ називається комплексно спряженим до z і позначається $\bar{z}$.

Множина комплексних чисел позначається

$$\mathbb{C}=\{z: z=x+iy, x, y\in\mathbb{R}\}.$$

Для комплексних чисел встановлюються відношення $=$, $\neq$ але не $<$ і $>$.

Комплексні числа $z_1=x_1+iy_1$ і $z_2=x_2+iy_2$ рівні тоді і тільки тоді, коли $x_1=y_1$ та $x_2=y_2$.

Сумою z_1+z_2 комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

$$z=z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

Добутком z_1z_2 комплексних чисел z_1 і z_2 називається комплексне число

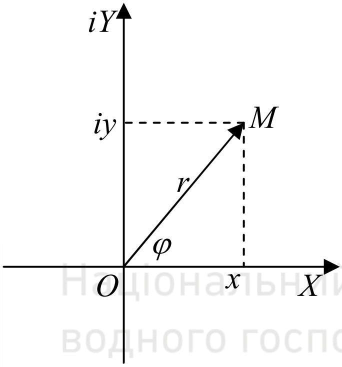
$$z=z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2).$$

Часткою z_1/z_2 від ділення комплексного числа z_1 на комплексне число $z_2\neq 0$ називається комплексне число

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

Всі властивості операцій додавання і множення (комутативність асоціативність і т.п.), притаманні $\mathbb{R}$, зберігаються і на множині $\mathbb{C}$.

Для геометричної інтерпретації комплексне число $z = x + iy$ зображають точкою M з координатами (x, y) декартової площини XOY або вектором , початок якого знаходиться в точці $(0,0)$, а кінець в точці $M(x, y)$ (саму площину при цьому називають комплексною). Вісь X називають дійсною віссю, вісь iY - уявною (мал. 1). Відповідність між множиною $\mathbb{C}$ та комплексною площиною є взаємно однозначною.



Мал. 1. Зображення комплексних чисел.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ називається число

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0, \qquad (1)$$

тобто довжина r вектора $\overline{OM}$.

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ називається кут, який утворений вектором $\overline{OM}$ з віссю X. Позначають аргумент $Arg\, z$. Аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π. Аргумент числа $z = 0$ взагалі не визначений.

Значення аргументу, яке належить проміжку $(-\pi, \pi]$, називають головним і позначають $\varphi = \arg z$. Тоді

$$Arg\, z = \{\arg z + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}\}.$$

Головне значення аргументу знаходять за формулою

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ \ y \ge 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ \ y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ \ y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x = 0,\ \ y < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

При розв’язуванні задач зручно використовувати запис комплексного числа у вигляді

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \text{ або } z = re^{i\varphi},$$

які відповідно називають тригонометричною та показниковою формою запису комплексного числа.

Операції множення та ділення двох комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1) = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2) = r_2e^{i\varphi_2}$ в цих формах запису мають такий вигляд:

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},\ r_2 \ne 0.$$

Зв'язок між тригонометричною та показниковою формами запису комплексного числа встановлює формула Ейлера:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Для піднесення комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$ до цілого степеня зручно використовувати формулу Муавра:

$$z^n = r^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = re^{in\phi},\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Комплексне число $w = \sqrt[n]{z}$ називається коренем степеня n із комплексного числа z, якщо $w^n = z$. Корінь n-го степеня на комплексній площині має n різних значень, які знаходяться за формулою:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\arg z + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1,...,n-1. \quad (4)$$

Приклад 1. Знайти дійсну та уявну чистину комплексного числа

$$z = \left(\frac{i^9 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2.$$

Розв'язування. Враховуючи, що $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, маємо $i^9 = i$, $i^{19} = -i$. Тоді

$$z = \left(\frac{i^9 + 2}{i^{19} + 1}\right)^2 = \left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2 = \frac{4+4i-1}{1-2i-1} = \frac{3+4i}{-2i} = -2 - \frac{3}{2i} = -2 + \frac{3}{2}i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z = -2$, $\operatorname{Im} z = \frac{3}{2}$.

Приклад 2. Записати комплексне число $z = -\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$ у тригонометричній та показниковій формі.

Розв'язування. Знайдемо за формулами (1), (2) модуль та аргумент числа z:

$$|z| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{\pi}{5}} = 1,$$

$$\arg z = arctg\left(-\frac{\sin\frac{\pi}{5}}{\cos\frac{\pi}{5}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{5} + \pi = \frac{4\pi}{5}.$$

Тоді тригонометрична форма комплексного числа z має вигляд $z = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$, а показникова - $z = e^{\frac{4\pi}{5}i}$.

Приклад 3. Обчислити значення $z = (1+i)^8\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{-6}$.

Розв'язування. Запишемо числа $z_1 = 1+i$ та $z_2 = 1-i\sqrt{3}$ в тригонометричній формі:

$$|z_1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\ \arg z_1 = arctg 1 = \frac{\pi}{4};$$

$$|z_2| = \sqrt{1+3} = 2,\ \arg z_2 = arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Тому $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Використавши формулу (3), отримаємо:

$$z = (1+i)^8\left(1-i\sqrt{3}\right)^{-6} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^8 \times$$

$$\times\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^{-6} = 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)\times$$

$$\times\frac{1}{64}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 4. Знайти всі значення кореня $\sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$.

Розв'язування. Позначимо $w = \sqrt[4]{-128-i128\sqrt{3}}$. Запишемо комплексне число $z = -128-i128\sqrt{3}$ в тригонометричній формі. Знаходимо:

$$|z| = \sqrt{(-128)^2 + (-128\sqrt{3})^2} = 256,$$

$$\arg z = arctg\frac{-128\sqrt{3}}{-128} - \pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Отже, $z = 256\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

За формулою (4) отримаємо чотири значення кореня:

$$w_0 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3} - 2i,$$

$$w_1 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2+2\sqrt{3}i,$$

$$w_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right) = -2\sqrt{3}+2i,$$

$$w_3 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2-2\sqrt{3}i.$$

Приклад 5. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$E = \{z : |z-i| + |z+i| = 4\}.$$

Розв'язування. Нехай $z = x+iy$, тоді $z-i = x+i(y-1)$, $z+i = x+i(y+1)$. Таким чином, $|z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$ та $|z+i| = \sqrt{x^2+(y+1)^2}$. Згідно умови задачі маємо

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{x^2+(y+1)^2} = 4$$

або

$$\sqrt{x^2+y^2+1-2y} + \sqrt{x^2+y^2+1+2y} = 4.$$

Позначимо $a = x^2+y^2+1$, отримаємо:

$$\sqrt{a-2y} + \sqrt{a+2y} = 4,\ \sqrt{a-2y} = 4-\sqrt{a+2y},$$

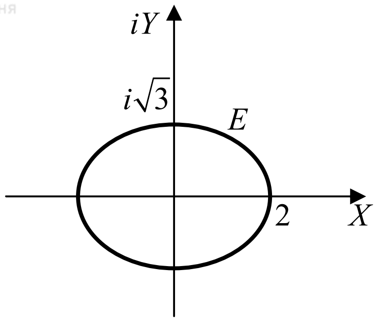
$$a-2y = 16-8\sqrt{a+2y}+a+2y,\ 2\sqrt{a+2y} = 4+y,$$

$$4a+8y = 16+8y+y^2,\ 4a-y^2 = 16.$$

Оскільки $a = x^2+y^2+1$, то маємо $4x^2+3y^2 = 12$, звідки

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1.$$

Отже, множина E - це еліпс з центром в початку координат з півосями $\sqrt{3}$ та 2 (мал. 2).



Мал. 2.

Приклад 6. Зобразити на комплексній площині множину точок

$$E = \left\{ z : \operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} \le 0 \right\}.$$

Розв'язування. Знайдемо межу множини E, тобто множину точок z, яка задовольняє рівняння

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1} = 0. \tag{5}$$

Із (5) отримаємо, що точка $z = -1$ не належить межі множини E. Нехай $z = x + iy$. Тоді

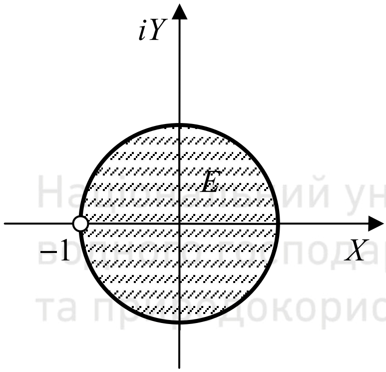
$$\operatorname{Re}\frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \operatorname{Re}\frac{x-1+iy}{x+1+iy} = 0.$$

Знайдемо частку від ділення двох комплексних чисел, а потім її дійсну частину:

$$\operatorname{Re}\frac{x-1+iy}{x+1+iy} = \operatorname{Re}\frac{(x-1+iy)(x+1-iy)}{(x+1+iy)(x+1-iy)} =$$

$$= \operatorname{Re}\frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2} = \frac{x^2-1+y^2}{(x+1)^2+y^2} = 0.$$

Звідки отримаємо, що $x^2-1+y^2=0$ або $x^2+y^2=1$. Це рівняння описує коло з центром в початку координат одиничного радіуса. Отже, межею множини E буде це коло з виколотою точкою -1. Залишилось визначити, множина E - внутрішність або зовнішність побудованого кола. Для цього візьмемо довільну точку комплексної площини, яка не належить межі E, наприклад, точку $z_0 = 2$. З одного боку, точка z_0 не належить множині E, так як $\mathrm{Re}\,\dfrac{z_0 - 1}{z_0 + 1} = \dfrac{1}{3} > 0$, тобто її координати не задовольняють нерівність, що визначає E. З іншого боку, точка z_0 лежить зовні одиничного кола, оскільки $|z_0| = 2$. Це означає, що E - внутрішня частина побудованого кола разом з межею (мал. 3).



Мал. 3.

Отже, $E = \{z : |z| \le 1\} \setminus \{-1\}$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Обчислити z та знайти $\mathrm{Re}\,z$, $\mathrm{Im}\,z$, $|z|$, $\arg z$. Записати отримане число в різних формах.

1. $z = \dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$. 2. $z = \left(\dfrac{2}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}\right)^8$ 3. $z = (1+i)^8 + (1-i)^8$.

4. $z = \dfrac{(1-i)^{50}}{(1+i)^{30}}$. 5. $z = \left(\dfrac{2}{1 - i\sqrt{3}}\right)^6$. 6. $z = \dfrac{1}{(1+i)^4} - \dfrac{1}{(1-i)^3}$.

7. $z=\left(\frac{2}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^8$. 8. $z=(1+i)^{10}+(1-i)^{10}$.

9. $z=\frac{(-1+3i)^{10}}{(1-i\sqrt{6})^{36}}$. 10. $z=(1+i)^5+(1-i)^5$. 11. $z=\left(\frac{2}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$.

12. $z=\frac{(1+i)^{15}}{(-1+3i)^{16}}$. 13. $z=(1+i)^7+(1-i)^7$. 14. $z=(12-5i)^{13}$.

15. $z=\left(\frac{2}{1-i\sqrt{3}}\right)^{24}$. 16. $z=(1+i)^8+(1-i)^8$.

17. $z=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$. 18. $z=(1+2i)^4(-7+24i)$.

19. $z=(3+i)^4(28-96i)$. 20. $z=\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{40}$.

21. $z=\left(2i+i\sqrt{2}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2$. 22. $z=\frac{(1+i)^3}{(2-2i)^2}\left(\frac{3-i}{2+i}-\frac{2-i}{3+i}\right)$.

23. $z=\left(3i+i\sqrt{3}-\frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2$. 24. $z=\left(\frac{5-i}{2+3i}-\frac{1-5i}{3+2i}\right)\frac{169(1+i)^5}{(1-i)^5}$.

25. $z=\left(\frac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^2(5+\sqrt{2}+i\sqrt{2})$. 26. $z=\frac{(1+i)^7}{2(1-i)}+3i$.

27. $z=\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^3+\left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^3$. 28. $z=\frac{(2+i)^3+5i^5-2}{(1-i)^6-(1+i)^6}$.

29. $z=\left(\frac{3i}{2+2i}-\frac{2i}{1-i}-\frac{1}{i}\right)\frac{152-32i}{5+i}$. 30. $z=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}+i}$.

Завдання 2. .Знайти всі значення кореня.

1. $\sqrt[4]{-1}$. 2. $\sqrt[3]{8}$. 3. $\sqrt[3]{8i}$.

4. $\sqrt[3]{\dfrac{i}{8}}$. 5. $\sqrt[3]{-27i}$. 6. $\sqrt[3]{-8i}$

7. $\sqrt[4]{-16}$. 8. $\sqrt[3]{64i}$. 9. $\sqrt[4]{256}$.

10. $\sqrt[3]{-216i}$. 11. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$. 12. $\sqrt[3]{-343i}$.

13. $\sqrt[3]{-64i}$. 14. $\sqrt[3]{\dfrac{i}{27}}$. 15. $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{16}}$.

16. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$. 17. $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}$. 18. $\sqrt[4]{-i}$.

19. $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$. 20. $\sqrt[3]{-128i}$. 21. $\sqrt[3]{-8-i8\sqrt{3}}$.

22. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$. 23. $\sqrt[4]{\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{32}}$. 24. $\sqrt[4]{\dfrac{1+i\sqrt{3}}{32}}$.

25. $\sqrt[3]{-128+i128\sqrt{3}}$. 26. $\sqrt[3]{-4+i\sqrt{48}}$. 27. $\sqrt[4]{\sqrt{8}-i\sqrt{8}}$.

28. $\sqrt[3]{-128-i128\sqrt{3}}$. 29. $\sqrt[3]{-4-i\sqrt{48}}$. 30. $\sqrt[4]{\sqrt{8}+i\sqrt{8}}$.

Завдання 3. Зобразити на комплексній площині множину точок, яка задовольняє вказаним обмеженням.

1. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+2} \geq 0$. 2. $\operatorname{Im}\dfrac{z-1-2i}{z++3-i} \leq 1$. 3. $|z-2i| \leq 2,\ \operatorname{Re} z > 1$.

4. $\operatorname{Re}\dfrac{z+2i}{z-2i} \leq 0$. 5. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{4}$. 6. $3|z| - \operatorname{Re} z \leq 12$.

7. $\operatorname{Im}\dfrac{z-1}{z+1} = 0$. 8. $1 < |z+2-i| \leq 4$. 9. $\operatorname{Re}\dfrac{z-3+i}{z-i} \geq 0$.

10. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} \geq \dfrac{1}{2}$. 11. $|z| < \operatorname{Re} z + 1$. 12. $\operatorname{Re}\dfrac{z-2}{z+1+2i} \leq 0$.

13. $|z| - 3\operatorname{Im} z \geq 6$. 14. $\operatorname{Re}\dfrac{z-4+i}{z+2-i} \geq 4$. 15. $\operatorname{Im}\dfrac{z-3i-1}{z+1} \geq 0$.

16. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} \le 4$. 17. $\operatorname{Im}\dfrac{z+i}{z-i-2} \ge 0$. 18. $|z+2i| \le 2,\ |z| \ge 1$.

19. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} \ge \dfrac{1}{2}$. 20. $|z-i| + |z+i| \le 4$. 21. $|z-2| - |z+2| \le 2$.

22. $\operatorname{Im} z^2 \le 2$. 23. $0 < \arg\dfrac{i-z}{z+i} < \dfrac{\pi}{2}$. 24. $|z-i| - |z+i| \le 2$.

25. $\operatorname{Re} z^2 \ge 4$. 26. $4 \le |z-1| + |z+1| \le 8$. 27. $\operatorname{Im} z^2 \ge a,\ a \in R$.

28. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = a, a \in R$. 29. $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = a, a \in R$. 30. $\operatorname{Re} z^2 \le a,\ a \in R$.

Похідна функції комплексної змінної

Функція $f(z)$, визначена в області $D \subset \mathbb{C}$, називається диференційованою в точці $z_0 \in D$, якщо вона має в цій точці скінченну похідну $f'(z_0)$.

Теорема. Для того, щоб функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ була диференційованою в точці $z_0 \in D$, необхідно і достатньо, щоб в точці z_0 функції $u(x,y)$ та $v(x,y)$ були диференційованими і, крім того, виконувались умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Похідну функцій $f(z)$ знаходять за формулою

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2}$$

Формули диференціювання функцій комплексної змінної аналогічні відповідним формулам диференціювання функцій дійсної змінної.

Функція $f(z)$ називається аналітичною в області D, якщо вона диференційована в кожній точці області D.

Нехай функція $f(z)$ - аналітична в деякому околі точки z_0 і $f'(z_0) \neq 0$. Геометричний зміст модуля похідної $|f'(z_0)|$ - це коефіцієнт розтягу в точці z_0 при відображені $w = f(z)$ площини z на площину w. При $|f'(z_0)| > 1$ має місце розтяг, а при $|f'(z_0)| < 1$ - стиск.

Аргумент похідної $f'(z_0)$ геометрично дорівнює куту, на який потрібно повернути дотичну в точці z_0 до довільної гладкої кривої на площині z, яка проходить через точку z_0, щоб отримати напрямок дотичної в точці $w_0 = f(z_0)$ до образу цієї кривої на площині w при відображені $w = f(z)$. Якщо $\arg f'(z_0) > 0$, то поворот здійснюється проти годинникової стрілки, а при $\arg f'(z_0) < 0$ - за годинниковою.

Функція $\varphi(x, y)$ називається гармонічною в області D, якщо вона має в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняє в цій області рівняння Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \tag{3}$$

Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналітична в області D, то її дійсна частина $u(x, y)$ та уявна частина $v(x, y)$ є гармонічними функціями.

Гармонічні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, що задовольняють умови Коші-Рімана, називаються спряженими гармонічними функціями.

На практиці зручним способом відновлення аналітичної функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ за відомою її тільки дійсною частиною $u(x, y)$ або тільки уявною частиною $v(x, y)$ є формули Гурса:

$$f(z) = 2u\left(\frac{z + \overline{z}_0}{2}, \frac{z - \overline{z}_0}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}, \tag{4}$$

$$f(z) = 2iv\left(\frac{z + \overline{z}_0}{2}, \frac{z - \overline{z}_0}{2i}\right) + \overline{f(z_0)}. \tag{5}$$

Приклад 1. Знайти ті точки z (комплексної площини), в яких функція $f(z)=|z-i|^2+i(z+i)^2$ є диференційованою, і обчислити похідну в цих точках.

Розв'язування. Спочатку виділимо дійсну та уявну частини функції $f(z)$:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=x^2+(y-1)^2+i(x^2-(y+1)^2+$$

$$+2ix(y+1))=(x^2+(y-1)^2-2x(y+1))+i(x^2-(y+1)^2).$$

Таким чином, маємо $u(x,y)=x^2+(y-1)^2-2x(y+1)$, $v(x,y)=x^2-(y+1)^2$. Ці функції мають неперервні частинні похідні в усіх точках площини і тому всюди диференційовані. Знайдемо точки, в яких виконуються умови Коші-Рімана (2):

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-2(y+1)=\frac{\partial v}{\partial y}=-2(y+1),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=2(y-1)-2x=-\frac{\partial v}{\partial x}=-2x.$$

Звідси знаходимо, що $x=0$, $y=1$.

Отже, функція $f(z)$ диференційована лише в одній точці $z=i$. За формулою (2) отримаємо:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x-2(y+1)+2ix\text{, а } f'(i)=-4.$$

Приклад 2. Перевірити на аналітичність функцію $w=x^2-y^2-x+i(2xy-y)$ і, у випадку аналітичності, знайти її похідну у вигляді $w'=f(z)$:

Розв'язування. Нехай $z=x+iy$, $w=u+iv$, тоді $u=x^2-y^2-x$, а $v=2xy-y$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-1;\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2y;\ \frac{\partial v}{\partial y}=2x-1.$$

Вони є неперервними функціями і задовольняють умови Коші-Рімана, тому функція w аналітична, а її похідна

$$w' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 2x - 1 + 2iy .$$

Підставивши

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2},\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$

отримаємо

$$w' = f(z) = 2\frac{z + \bar{z}}{2} - 1 + 2i\frac{z - \bar{z}}{2i} = 2z - 1 .$$

Приклад 3. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні $w = z^2$ в точці $z_0 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Розв'язування. Знаходимо похідну

$$w' = (z^2)' = 2z .$$

Тоді

$$w'(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} .$$

Запишемо отримане значення в тригонометричній формі:

$$-2\sqrt{2} + i2\sqrt{2} = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Звідси отримаємо

$$\left|w'(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})\right| = 4,\ \arg w'(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}.$$

Отже, при відображенні $w = z^2$ в точці $z_0 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ здійснюється розтяг в чотири рази і поворот на кут $\frac{3\pi}{4}$.

Приклад 4. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною частиною $u(x, y)$ і значенням $f(z_0)$, якщо $u(x, y) = xy - x^2 + y^2$, $z_0 = i\sqrt{2}$, $f(z_0) = 2$.

Розв'язування. Перевіримо, що задана функція є дійсною частиною аналітичної функції $f(z)$, тобто, що функція $u(x, y)$ - гармонічна. Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 2x\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = x + 2y\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\,.$$

Оскільки $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, то функція $u(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа (3), тобто гармонічна.

Отже, існує така спряжена гармонічна функція $v = v(x, y)$, що функція $f = u + iv$ буде аналітичною.

Згідно з першою умовою Коші-Рімана $\dfrac{\partial u}{\partial x} = y - 2x = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, тоді

$$v = \int (y - 2x)dy = y^2 / 2 - 2xy + s(x)\,,$$

де $s(x)$ - невідома функція. Для її знаходження використаємо другу умову Коші-Рімана $\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}(y^2 / 2 - 2xy + s(x)) = -2y + s'(x) = -x - 2y\,.$$

Звідки $s'(x) = -x$, $s(x) = -x^2 / 2 + C$, де C - довільна стала, і функція $v(x, y)$ має вигляд

$$v(x, y) = y^2 / 2 - 2xy - x^2 / 2 + C\,.$$

Тоді

$$f = u + iv = xy - x^2 + y^2 + i(y^2 / 2 - 2xy - x^2 / 2 + C)\,.$$

Підставивши $x = (z + \bar{z}) / 2$, $y = (z - \bar{z}) / (2i)$, дістанемо:

$$f(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} - \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + \frac{i}{2}\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 -$$

$$-2i\frac{z + \bar{z}}{2} \cdot \frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{i}{2}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + Ci = -\frac{2 + i}{2}z^2 + Ci.$$

Для знаходження значення довільної константи C використаємо умову $f(i\sqrt{2}) = 2$. Маємо

$$-\frac{2+i}{2}(i\sqrt{2})^2 + Ci = 2,$$

тобто $C = -1$.

Отже, шукана аналітична функція $f(z) = -\frac{2+i}{2}z^2 - i.$

Приклад 5. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її уявною частиною $v(x, y)$ і значенням $f(z_0)$, якщо $v(x, y) = 3x + 2xy$, $z_0 = -i$, $f(z_0) = 2$.

Розв'язування. Для відновлення функції $f(z)$ використаємо формулу Гурса (5). Оскільки згідно умови $v(x, y) = 3x + 2xy$, $z_0 = -i$, $f(z_0) = 2$, $\bar{z}_0 = i$, $\overline{f(z_0)} = 2$, то отримаємо

$$f(z) = 2i\left(3\frac{z+i}{2} + 2\frac{z+i}{2}\cdot\frac{z-i}{2i}\right) + 2 = 3iz + z^2.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Перевірити на аналітичність задану функцію w і знайти її похідну у вигляді $w' = f(z)$.

1. $w = 2x^2 - 2y^2 + x + 2y + (4xy + y - 2x)i$.
2. $w = \dfrac{x-2}{(x-2)^2 + (y+1)^2} - \dfrac{y-1}{(x-2)^2 + (y+1)^2}i$.
3. $w = e^{2y}(\cos 2x - i\sin 2x) + x - y + (x + y)i$.
4. $w = -4xy + x - 2y + (2x^2 - 2y^2 + y + 2x)i$.
5. $w = \dfrac{x+3}{(x+3)^2 + (y-2)^2} - \dfrac{y+2}{(x+3)^2 + (y-2)^2}i$.
6. $w = e^{-2y}(\cos 2x + i\sin 2x) + 2x + 2y + (2y - 2x)i$.
7. $w = \dfrac{2-x}{(x-2)^2 + (y-1)^2} + \dfrac{y+1}{(x-2)^2 + (y-1)^2}i$.

8. $w = \dfrac{y-1}{(x-2)^2+(y+1)^2} + \dfrac{x-2}{(x-2)^2+(y+1)^2}i$.

9. $w = 2xy - x + y + (y^2 - x^2 - x - y)i$.

10. $w = \dfrac{y+2}{(x+3)^2+(y-2)^2} + \dfrac{x+3}{(x+3)^2+(y-2)^2}i$.

11. $w = e^{-2y}(-\sin 2x + i\cos 2x) + x - 2y + (2x + y)i$.

12. $w = \dfrac{y+1}{(x-2)^2+(y-1)^2} + \dfrac{x-2}{(x-2)^2+(y-1)^2}i$.

13. $w = \dfrac{x^2 - x + y^2 - 2}{(x+1)^2 + y^2} + \dfrac{3y}{(x+1)^2+y^2}i$.

14. $w = 6xy + 2x + (3y^2 - 3x^2 + 2y)i$.

15. $w = \dfrac{x^2 - x + y^2 - 2}{(x-2)^2 + y^2} - \dfrac{3y}{(x-2)^2+y^2}i$.

16. $w = e^{-2y}(\sin 2x - i\cos 2x) + 2x + y + (2y - x)i$.

17. $w = -4xy - 3x + (2x^2 - 2y^2 - 3y)i$.

18. $w = \dfrac{y+2}{(x-3)^2+(y-2)^2} + \dfrac{x-3}{(x-3)^2+(y-2)^2}i$.

19. $w = \dfrac{3y}{(x-2)^2 + y^2} + \dfrac{x^2 - x + y^2 - 2}{(x-2)^2+y^2}i$.

20. $w = x^3 - 3xy^2 + 2x + (3x^2 y - y^3 + 2y)i$.

21. $w = e^{2y}(\sin 2x + i\cos 2x) + y - 2x - (x + 2y)i$.

22. $w = \dfrac{x^2 + y^2 + y - 2}{x^2 + (y-1)^2} + \dfrac{3x}{x^2+(y-1)^2}i$.

23. $w = x^3 - 3xy^2 + x + 2y + (3x^2 y - y^3 + y - 2x)i$.

24. $w=\dfrac{3x}{x^2+(y-1)^2}-\dfrac{x^2+y^2+y-2}{x^2+(y-1)^2}i$.

25. $w=e^{2y}(-\sin 2x-i\cos 2x)+4xy+(2y^2-2x^2)i$.

26. $w=x^2-y^2-2xy+x+y+(x^2-y^2+2xy+y-x)i$.

27. $w=y^3-3x^2y-y^3+y-2x+(x^3-3xy^2-x-2y)i$.

28. $w=\dfrac{x^2+y^2-2}{(x+1)^2+(y+1)^2}+\dfrac{2y-2x}{(x-1)^2+(y-1)^2}i$.

29. $w=y^2-x^2-2xy+x+2y+(x^2-y^2-2xy+y-2x)i$.

30. $w=y^3-3x^2y+y-2x+(x^3-3xy^2-x-2y)i$.

Завдання 2. Знайти коефіцієнт розтягу і кут повороту при відображенні $w=f(z)$ в точці z_0.

1. $w=\cos(5-z)$, $z_0=5+3i$

2. $w=e^z$, $z_0=-1-i\dfrac{\pi}{2}$.

3. $w=\dfrac{3z+i}{z+3i}$, $z_0=-i$.

4. $w=z^3$, $z_0=1+i\dfrac{\pi}{2}$.

5. $w=(5z-1)^2$, $z_0=i$.

6. $w=\sin 3z$, $z_0=i$.

7. $w=e^z$, $z_0=\ln 2-i\dfrac{\pi}{4}$.

8. $w=\dfrac{2z-i}{z-2i}$, $z_0=1+2i$.

9. $w=(z-3i)^7$, $z_0=1+2i$.

10. $w=\dfrac{z-i}{2z+1}$, $z_0=2i$.

11. $w=\cos(2-z)$, $z_0=2+3i$.

12. $w=\dfrac{3z+i}{z+3i}$, $z_0=2-3i$.

13. $w=(z-3)e^{i\pi/4}$, $z_0=3+i$.

14. $w=\dfrac{i}{z-3}$, $z_0=3+i$.

15. $w=e^{iz-2}$, $z_0=4-3i$.

16. $w=\dfrac{z-2}{z+i}$, $z_0=1-i$.

17. $w=(1-z)^2$, $z_0=1-2i$.

18. $w=\dfrac{2z+i}{z+2i}$, $z_0=1-2i$.

19. $w=\dfrac{z^2+i}{z^2-i}$, $z_0=1+2i$. 20. $w=e^z$, $z_0=-1-i\dfrac{\pi}{4}$.

21. $w=\dfrac{z^2-1}{z-i}$, $z_0=2+i$. 22. $w=z^3$, $z_0=2-i$.

23. $w=\dfrac{z^2+i}{z^2-i}$, $z_0=3-7i$. 24. $w=\dfrac{z^2-1}{z-i}$, $z_0=2+i$.

25. $w=\exp\dfrac{z-i}{z+i}$, $z_0=0$. 26. $w=\dfrac{z}{(z+1)^2}$, $z_0=3-i$.

27. $w=e^{z+1/z}$, $z_0=-7+i$. 28. $w=\dfrac{1+iz}{(1-z)^2}$, $z_0=2i$.

29. $w=\sin\left(\dfrac{z}{i-2/z}\right)$, $z_0=i$. 30. $w=\exp\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=0$.

Завдання 3. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою її дійсною $u(x,y)$ або уявною $v(x,y)$ частиною і значенням $f(z_0)$.

1. $u=x^2-y^2-2y$, $f(2i)=3-2i$.
2. $v=x^3-3xy^2+4x$, $f(1)=-1+2i$.
3. $u=x^3-3xy^2-x$, $f(-1+i)=0$.
4. $v=x^2-y^2-2x$, $f(2i)=-3+i$.
5. $u=2x^2-2y^2-3x+3y$, $f(1+i)=3$.
6. $v=x^3-3xy^2-x$, $f(1+i)=1-i$.
7. $u=2x^2-2y^2-7x+7y$, $f(-1)=5i$.
8. $v=x^2-y^2-3x$, $f(-i)=2+5i$.
9. $u=-x^3+3xy^2-2x$, $f(1+i)=-i$.
10. $v=x^2-y^2+2x$, $f(1-i)=-4$.

11. $u = 3x^2 - 3y^2 + 2xy,\ f(2) = 1 - 3i$.

12. $v = x^2 - y^2 + 5x + y,\ f(-i) = 2 + 5i$.

13. $u = y^3 - 3x^2 y + y,\ f(1 - 2i) = 0$.

14. $v = y^3 - 3x^2 y - y,\ f(1 + i) = -4i$.

16. $u = x^2 - y^2 - xy - 2x,\ f(2i) = 0$.

17. $v = y^3 - 3x^2 y - 2y,\ f(1) = -4i$.

18. $u = 2x^2 - 2y^2 - 5x + 3y,\ f(0) = 7$.

19. $v = x^2 - y^2 - 2x,\ f(-2i) = 1 - 6i$.

20. $u = -3x^2 + 3y^2 + 2x + y,\ f(1 + i) = 3$.

21. $v = y^3 - 3x^2 y + 3y,\ f(i) = 5 - 4i$.

22. $u = x^3 - 3xy^2 + 4x,\ f(1) = -1 + 2i$

23. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2},\ f(\pi) = \dfrac{1}{\pi}$.

24. $v = y - \dfrac{y}{x^2 + y^2},\ f(1) = 2$.

25. $v = 2(chx \sin y - xy),\ f(0) = 0$.

26. $u = e^{-y} \cos x + x,\ f(0) = 1$.

27. $u = 2 \sin x chy - x,\ f(0) = 0$.

28. $v = 2(2shx \sin y + xy),\ f(0) = 3$.

29. $u = e^x [(x + 1) \cos y - y \sin y],\ f(-1) = 0$.

30. $v = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} \sin y,\ f(0) = 2$.

Література

1. Білоколос Є.Д., Зайцева Л.Л., Шека Д.Д. Збірник задач з комплексного аналізу. Частина 1. Функції комплексної змінної. – Київ : КНУ, 2014. – 71 с.

2. Вища математика. Теорія функцій комплексної змінної : Навчально-методичний посібник / І.Д. Пукальський, І.П. Лусте. – Чернівці : ЧНУ, 2001. -106 с.

3. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В., Скасків О.Б. Комплексний аналіз. – Львів : Афіша, 2002. – 205 с.

4. Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної: Розв'язування задач: Навчальний посібник / О.Ю. Грищенко, М.І. Нагнибіда, П.П. Настасієв– Київ: Вища школа, 1994. – 375 с.

5. Мартиненко М.А. Теорія функцій комплексної змінної. – Київ: Слово, 2008. – 312с.

6. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни " Теорія функцій комплексної змінної " / С.В. Тимченко – Дніпродзержинськ : ДДТУ, 2009. – 59 с.

7. Навчально-методичні матеріали з теорії функцій комплексної змінної. / А.І. Щерба, Р.М. Дідковський, Н.В. Олексієнко, В.О. Щерба. – Черкаси : ЧДТУ, 2008. – 48 с.