



Національне **Міністерство освіти і науки України**
водного господарства
та природокористування

**Національний університет водного господарства
та природокористування**

Кафедра теплоенергетики та машинознавства

034-110

Методичні вказівки

*до виконання лабораторних та розрахункової робіт
з дисципліни "Математичні методи і моделі
в розрахунках на ЕОМ"*

для студентів напряму підготовки

6.050601 — „Теплоенергетика” денної форми навчання

Рекомендовано методичною
комісією за напрямом підготовки
„Теплоенергетика”.
Протокол № 2 від 30 січня 2008 р.

Рівне 2008

Методичні вказівки до виконання лабораторних та розрахункової робіт з дисципліни "Математичні методи і моделі в розрахунках на ЕОМ" для студентів напряму підготовки 6.090501 – „Теплоенергетика” денної форми навчання. О. Тимейчук, В. Кузьменко. – Рівне, НУВГП, 2008. - 23 с.

**Упорядники: О. Тимейчук, к.т.н., доцент,
В. Кузьменко, старший викладач.**

Відповідальний за випуск: М. Приходько, д.т.н., професор, завідувач кафедри теплоенергетики та машинознавства.

ЗМІСТ

1. Мета і завдання дисципліни	3
2. Лабораторні роботи	4
Лабораторна робота №1. „Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом Жордана-Гаусса”.....	4
Лабораторна робота №2. „Оптимізація функцій багатьох змінних методом градієнтного спуску”.....	8
Лабораторна робота №3. „Математична обробка даних експерименту методом найменших квадратів”.....	10
Лабораторна робота №4. „Розв’язування задач лінійного програмування графічним методом”.....	13
Лабораторна робота №5. „Розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом”.....	15
Лабораторна робота №6. „Транспортна задача. Побудова опорних планів перевезень та їх оптимізація”.....	16
3. Розрахункова робота	21
Задача 1. „Задача оптимального розподілу обмежених ресурсів”.....	21
Задача 2. „Задача оптимального вкладення інвестицій”.....	21
Задача 3. „Побудова та оптимізація сіткового графіка”.....	22
Література	23

© О. Тимейчук, В. Кузьменко, 2008

© НУВГП, 2008



1. МЕТА І ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою курсу "Математичні методи і моделі в розрахунках на ЕОМ" є оволодіння студентами вмінь і навиків застосування основних методів дослідження технічних систем з використанням ЕОМ.

В результаті вивчення курсу студенти повинні знати способи побудови деяких математичних моделей, методи їх дослідження і реалізації на ЕОМ; методи розв'язування задач лінійного та динамічного програмування.

На основі отриманих знань студент повинен вміти: будувати лінійні моделі деяких задач і досліджувати їх відомими методами; оптимізувати функції однієї та багатьох змінних; розв'язувати задачі лінійного та динамічного програмування.

Тематичний план дисципліни

№ з/п	Назва теми та її зміст	Денна форма навчання (год)			
		Усього	Лекції	Лабораторні заняття	Самостійна робота
1	Вступ. Математ. моделювання з використ. ЕОМ.	4	1	—	3
2	Системи лінійних алгебричних рівнянь. Метод Жордана-Гаусса розв'язув. СЛАР.	12	1	4	7
3	Багатомірна оптимізація функцій. Методи градієнтного спуску.	12	2	4	6
4	Регресійний аналіз. Метод найменших квадратів.	16	2	4	10
5	Лінійне та динамічне програмування. Постановка задач лінійного програмування (ЗЛП) та їх розв'язування графічним і симплекс-методом. Методи побудови та оптимізації опорних планів перевезень ТЗ. Постановка задач динамічного програмування. Задачі оптимального розподілу обмежених ресурсів та вкладення інвестицій.	64	14	16	34
6	Сіткові графіки (СГ). Поняття сіткової моделі та її застосування. Приклади побудови та оптимізації СГ.	36	8	—	28
Усього		144	28	28	88



2. ЛАБОРАТОРНІ РОБОТИ

Лабораторна робота №1

„Розв’язування систем лінійних алгебричних рівнянь методом Жордана-Гаусса”

Розв’язати систему лінійних алгебричних рівнянь $AX=B$ методом Жордана-Гаусса.

Зауваження. Обчислення проводити до двох знаків після коми.

Варіанти

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 5.7 & 3.3 & 1.3 \\ 3.5 & 4.7 & 2.1 \\ 4.1 & 5.8 & -1.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 1.7 \\ 0.8 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 4.7 & 2.8 & 1.9 \\ 2.1 & 3.1 & 1.8 \\ 4.2 & -2.3 & 9.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 1.1 \\ 2.8 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 3.1 & 2.8 & 1.7 \\ 1.9 & 3.1 & 2.1 \\ 7.5 & 3.8 & 9.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 2.1 \\ 5.6 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 9.1 & 5.6 & 7.8 \\ 3.8 & 5.1 & 2.8 \\ 4.1 & 5.7 & 7.2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9.8 \\ 6.7 \\ 5.8 \end{pmatrix};$$

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 3.3 & 2.1 & 2.8 \\ 4.1 & 8.7 & 4.8 \\ 2.7 & 1.8 & 7.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 5.7 \\ 3.2 \end{pmatrix};$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 7.6 & 5.8 & 4.7 \\ 3.8 & 4.1 & 2.7 \\ 2.9 & 2.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10.1 \\ 9.7 \\ 7.8 \end{pmatrix};$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 3.8 & -2.5 & 3.7 \\ 0.5 & 0.8 & 1.7 \\ 1.6 & 2.3 & -4.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0.2 \\ 4.3 \end{pmatrix};$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 5.4 & -2.3 & 3.4 \\ 4.2 & 7.7 & -2.3 \\ 3.4 & 2.4 & 7.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3.5 \\ 2.7 \\ 1.9 \end{pmatrix};$$

$$9) \quad A = \begin{pmatrix} 8.6 & 1.8 & -4.7 \\ 2.7 & -3.6 & 0.4 \\ 1.5 & 4.5 & -1.6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.5 \\ 0.5 \\ -1.6 \end{pmatrix};$$

$$10) \quad A = \begin{pmatrix} 5.6 & 2.7 & 1.9 \\ 3.4 & -9.6 & -2.4 \\ 0.8 & 1.3 & 1.2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.9 \\ -2.4 \\ 1.2 \end{pmatrix};$$

$$11) \quad A = \begin{pmatrix} 2.7 & 0.9 & -1.5 \\ 4.5 & -8.8 & 6.7 \\ 5.1 & 3.7 & -7.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3.6 \\ 2.7 \\ -0.4 \end{pmatrix};$$

$$12) \quad A = \begin{pmatrix} 9.5 & -3.5 & 7.3 \\ 3.1 & -8.6 & -2.3 \\ 0.8 & 7.4 & -9.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -1.5 \\ 6.4 \end{pmatrix};$$

$$13) \quad A = \begin{pmatrix} 8.8 & 6.7 & -1.2 \\ 6.4 & 1.3 & -2.7 \\ 2.4 & -4.5 & 8.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.2 \\ 3.8 \\ -0.6 \end{pmatrix};$$

$$14) \quad A = \begin{pmatrix} 9.4 & -6.2 & -0.5 \\ 3.4 & 8.3 & 0.8 \\ 2.3 & -1.1 & 3.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -0.8 \\ 1.7 \end{pmatrix};$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$15) \quad A = \begin{pmatrix} 7.8 & 5.3 & 4.8 \\ 3.3 & -7.1 & 1.8 \\ 4.5 & 3.3 & -2.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.3 \\ 3.4 \end{pmatrix};$$

$$16) \quad A = \begin{pmatrix} 3.8 & 4.1 & -2.3 \\ -2.1 & 3.9 & -5.8 \\ 1.8 & 1.1 & -2.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.8 \\ 3.3 \\ 5.8 \end{pmatrix};$$

$$17) \quad A = \begin{pmatrix} 1.7 & -2.2 & 3.1 \\ 2.1 & 1.9 & -2.3 \\ 4.2 & 3.9 & -3.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 2.6 \\ 5.1 \end{pmatrix};$$

$$18) \quad A = \begin{pmatrix} 5.8 & 3.3 & -3.2 \\ 2.5 & -7.8 & 3.3 \\ 6.5 & -7.1 & 9.8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 7.1 \\ 6.1 \end{pmatrix};$$

$$19) \quad A = \begin{pmatrix} 9.2 & 5.2 & -5.3 \\ 3.8 & -6.0 & 4.2 \\ 7.6 & 5.1 & -9.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7.1 \\ 5.0 \\ 4.9 \end{pmatrix};$$

$$20) \quad A = \begin{pmatrix} 5.1 & 3.1 & 4.2 \\ 4.3 & 4.5 & -4.0 \\ -2.2 & -3.7 & 6.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 4.3 \\ 2.7 \end{pmatrix};$$

$$21) \quad A = \begin{pmatrix} -7.1 & 6.8 & 6.1 \\ 5.0 & 9.8 & -5.3 \\ 8.3 & -7.8 & 8.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7.3 \\ 6.1 \\ 5.8 \end{pmatrix};$$

$$22) \quad A = \begin{pmatrix} 8.7 & -2.1 & 4.5 \\ 2.0 & 4.3 & -1.8 \\ 1.6 & 5.1 & 6.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.2 \\ 3.1 \\ -2.3 \end{pmatrix};$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$23) \quad A = \begin{pmatrix} 6.3 & 5.1 & -0.6 \\ 3.4 & -7.2 & 3.4 \\ 0.8 & 1.3 & 3.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.3 \\ 2.0 \\ -2.4 \end{pmatrix};$$

$$24) \quad A = \begin{pmatrix} 4.5 & 2.3 & -3.7 \\ 2.1 & 8.1 & 5.8 \\ 1.2 & 1.1 & -2.5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4.2 \\ -3.1 \\ 5.3 \end{pmatrix};$$

$$25) \quad A = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.3 & -0.5 \\ 1.3 & 5.7 & -1.2 \\ 0.8 & 4.1 & 9.1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 7.8 \\ 5.4 \end{pmatrix};$$

$$26) \quad A = \begin{pmatrix} 6.2 & 1.3 & -0.7 \\ 0.4 & 5.7 & 1.3 \\ 2.1 & -0.9 & 3.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2.3 \\ 1.9 \\ -1.1 \end{pmatrix};$$

$$27) \quad A = \begin{pmatrix} 5.3 & -0.6 & -1.1 \\ 1.2 & 6.3 & -1.3 \\ 2.1 & -1.4 & 9.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 6.0 \\ 9.2 \end{pmatrix};$$

$$28) \quad A = \begin{pmatrix} 4.8 & -1.2 & 2.4 \\ 2.7 & 9.8 & 3.1 \\ 0.8 & -0.3 & 3.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5.1 \\ 9.6 \\ 4.7 \end{pmatrix};$$

$$29) \quad A = \begin{pmatrix} 6.7 & 1.4 & -2.7 \\ 1.3 & 5.7 & 1.3 \\ 3.1 & 2.3 & -5.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8.1 \\ 5.2 \\ 6.3 \end{pmatrix};$$

$$30) \quad A = \begin{pmatrix} 5.8 & 0.9 & 1.1 \\ 0.2 & 6.4 & -0.5 \\ 0.8 & -0.4 & 2.7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6.4 \\ 3.1 \\ 3.2 \end{pmatrix}.$$



Лабораторна робота №2

„Оптимізація функцій багатьох змінних методом градієнтного спуску”

Знайти мінімум функції двох змінних $f(x,y)$ з точністю $\varepsilon=0.1$, при заданій початковій точці M_0 та кроці h , методом градієнтного спуску (методом поділу кроку).

Зауваження. Обчислення проводити до чотирьох знаків після коми.

Таблиця 1

Варіанти	Функція	Початкова точка	Крок
1	2	3	4
1	$f(x, y) = e^{x^2} + y + (x - y)^2$	$M_0(0, 0)$	$h = 0.3$
2	$f(x, y) = e^{y^2 - x} + e^x$	$M_0(1, 1)$	$h = 0.2$
3	$f(x, y) = e^{-x} + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
4	$f(x, y) = e^y + (y - x^2)^2$	$M_0(1, 0)$	$h = 0.3$
5	$f(x, y) = e^{x^2 - y} + e^y$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
6	$f(x, y) = e^x + y^2 - 2x$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.2$
7	$f(x, y) = x^2 - \cos(y - 1)$	$M_0(1, 0)$	$h = 0.3$
8	$f(x, y) = y^2 + e^x - 3x$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
9	$f(x, y) = e^{x - y} + x^2 + y^2$	$M_0(0, -1)$	$h = 0.2$
10	$f(x, y) = e^{-y} - \cos(x^2 + y)$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.3$
11	$f(x, y) = e^x + (x - y^2)^2$	$M_0(0, -1)$	$h = 0.2$
12	$f(x, y) = e^x + x^2 + y^2$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.2$
13	$f(x, y) = e^{y^2 - x} + x^2$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.3$
14	$f(x, y) = e^{-x} - \cos(x^2 + y^2)$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.3$
15	$f(x, y) = e^{-y} + (x^2 + y)^2$	$M_0(-1, 0)$	$h = 0.2$

1	2	3	4
16	$f(x, y) = e^{x+y} + x^2 + y^2$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.2$
17	$f(x, y) = y^2 - \cos(x - 1)$	$M_0(0, -1)$	$h = 0.3$
18	$f(x, y) = x^2 + e^y - 3y$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.2$
19	$f(x, y) = e^y + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
20	$f(x, y) = e^{-x} + y^2 + 2x$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.3$
21	$f(x, y) = e^{-y} + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 0)$	$h = 0.2$
22	$f(x, y) = e^x - \cos(x - y^2)$	$M_0(1, 1)$	$h = 0.3$
23	$f(x, y) = e^{-x} + (x + y^2)^2$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.2$
24	$f(x, y) = e^y - \cos(x^2 - y)$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.3$
25	$f(x, y) = e^{-x-y} + x^2 + y^2$	$M_0(-1, 0)$	$h = 0.2$
26	$f(x, y) = x^2 - \cos(1 + y)$	$M_0(1, 0)$	$h = 0.3$
27	$f(x, y) = y^2 + e^{-x} + 3x$	$M_0(1, -1)$	$h = 0.2$
28	$f(x, y) = e^y + x^2 - 2y$	$M_0(-1, -1)$	$h = 0.3$
29	$f(x, y) = x^2 + e^{-y} + 3y$	$M_0(-1, 1)$	$h = 0.2$
30	$f(x, y) = e^{-y} + x^2 + 2y$	$M_0(0, 1)$	$h = 0.3$



**“Математична обробка даних експерименту
методом найменших квадратів”**

Побудувати апроксимаційний поліном 1-го степеня $y=a \cdot x+b$ методом найменших квадратів (МНК) та встановити тип та тісноту зв'язку між множинами X та Y.

Зауваження. Обчислення проводити до 4-х знаків після коми.

Варіанти

1)

X	1.2	2.3	3.5	4.6	5.8	7.0	8.1	9.0	10.0	10.8	12.0
Y	10.4	4.9	0.4	16.4	2.5	16.6	3.6	17.6	16.8	10.2	16.9

2)

X	1.3	2.6	4.0	5.1	6.4	7.9	9.1	9.9	10.8	11.4	12.8
Y	9.7	4.7	0.8	15.7	3.0	16.2	4.3	17.2	16.5	10.5	16.7

3)

X	1.5	2.9	4.4	5.6	7.1	8.8	10.0	10.8	11.6	12.1	13.6
Y	9.0	4.6	1.2	15.0	3.6	15.8	5.0	16.8	16.2	10.8	16.6

4)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	8.3	4.5	1.6	14.3	4.2	15.4	5.7	16.4	15.9	11.1	16.5

5)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	7.6	4.3	2.0	13.6	4.7	15.0	6.4	16.0	15.6	11.4	16.3

6)

X	1.2	2.5	3.7	4.9	6.1	7.5	8.6	9.5	10.4	11.1	12.4
Y	10.1	4.8	0.6	16.1	2.8	16.4	4.0	17.4	16.6	10.4	16.8

7)

X	1.4	2.8	4.2	5.4	6.8	8.4	9.6	10.4	11.2	11.8	13.2
Y	9.4	4.7	1.0	15.4	3.3	16.0	4.7	17.0	16.3	10.7	16.7

8)

X	1.5	3.1	4.6	5.9	7.4	9.2	10.5	11.2	12.0	12.4	14.0
Y	8.7	4.5	1.4	14.7	3.9	15.6	5.4	16.6	16.1	10.9	16.5

9)

Національний університет

X	1.7	3.4	5.1	6.4	8.1	10.1	11.5	12.1	12.8	13.1	14.8
Y	8.0	4.4	1.8	14.0	4.4	15.2	6.1	16.2	15.8	11.2	16.4

10)

X	1.2	2.3	3.5	4.6	5.8	7.0	8.1	9.0	10.0	10.8	12.0
Y	8.7	4.5	1.4	14.7	3.9	15.6	5.4	16.6	16.1	10.9	16.5

11)

X	1.3	2.6	4.0	5.1	6.4	7.9	9.1	9.9	10.8	11.4	12.8
Y	8.0	4.4	1.8	14.0	4.4	15.2	6.1	16.2	15.8	11.2	16.4

12)

X	1.5	2.9	4.4	5.6	7.1	8.8	10.0	10.8	11.6	12.1	13.6
Y	7.3	4.3	2.3	13.3	5.0	14.8	6.8	15.8	15.5	11.5	16.3

13)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	6.6	4.1	2.7	12.6	5.6	14.3	7.5	15.3	15.2	11.8	16.1

14)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	5.9	4.0	3.1	11.9	6.1	13.9	8.2	14.9	14.9	12.1	16.0

15)

X	1.2	2.5	3.7	4.9	6.1	7.5	8.6	9.5	10.4	11.1	12.4
Y	8.3	4.5	1.6	14.3	4.2	15.4	5.7	16.4	15.9	11.1	16.5

16)

X	1.4	2.8	4.2	5.4	6.8	8.4	9.6	10.4	11.2	11.8	13.2
Y	7.6	4.3	2.0	13.6	4.7	15.0	6.4	16.0	15.6	11.4	16.3

17)

X	1.5	3.1	4.6	5.9	7.4	9.2	10.5	11.2	12.0	12.4	14.0
Y	6.9	4.2	2.5	12.9	5.3	14.5	7.1	15.5	15.4	11.6	16.2

18)

X	1.7	3.4	5.1	6.4	8.1	10.1	11.5	12.1	12.8	13.1	14.8
Y	6.2	4.0	2.9	12.2	5.8	14.1	7.8	15.1	15.1	11.9	16.0

19)

X	1.2	2.3	3.5	4.6	5.8	7.0	8.1	9.0	10.0	10.8	12.0
Y	7.3	4.3	2.3	13.3	5.0	14.8	6.8	15.8	15.5	11.5	16.3

20) Національний університет

X	1.3	2.6	4.0	5.1	6.4	7.9	9.1	9.9	10.8	11.4	12.8
Y	6.6	4.1	2.7	12.6	5.6	14.3	7.5	15.3	15.2	11.8	16.1

21)

X	1.5	2.9	4.4	5.6	7.1	8.8	10.0	10.8	11.6	12.1	13.6
Y	7.3	4.3	2.3	13.3	5.0	14.8	6.8	15.8	15.5	11.5	16.3

22)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	5.2	3.8	3.5	11.2	6.7	13.5	8.9	14.5	14.7	12.3	15.8

23)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	4.5	3.7	3.9	10.5	7.2	13.1	9.6	14.1	14.4	12.6	15.7

24)

X	1.2	2.5	3.7	4.9	6.1	7.5	8.6	9.5	10.4	11.1	12.4
Y	6.9	4.2	2.5	12.9	5.3	14.5	7.1	15.5	15.4	11.6	16.2

25)

X	1.4	2.8	4.2	5.4	6.8	8.4	9.6	10.4	11.2	11.8	13.2
Y	6.2	4.0	2.9	12.2	5.8	14.1	7.8	15.1	15.1	11.9	16.0

26)

X	1.5	3.1	4.6	5.9	7.4	9.2	10.5	11.2	12.0	12.4	14.0
Y	5.5	3.9	3.3	11.5	6.4	13.7	8.5	14.7	14.8	12.2	15.9

27)

X	1.7	3.4	5.1	6.4	8.1	10.1	11.5	12.1	12.8	13.1	14.8
Y	4.8	3.8	3.7	10.8	7.0	13.3	9.2	14.3	14.5	12.5	15.8

28)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	9.4	4.7	1.0	15.4	3.3	16.0	4.7	17.0	16.3	10.7	16.7

29)

X	1.6	3.2	4.8	6.1	7.8	9.7	11.0	11.7	12.4	12.8	14.4
Y	10.1	4.8	0.6	16.1	2.8	16.4	4.0	17.4	16.6	10.4	16.8

30)

X	1.8	3.5	5.3	6.7	8.4	10.6	11.9	12.6	13.2	13.4	15.2
Y	9.0	4.6	1.2	15.0	3.6	15.8	5.0	16.8	16.2	10.8	16.6



„Розв’язування задач лінійного програмування графічним методом”

Постановка задачі

Підприємство випускає два види продукції і використовує для цього три типи ресурсів: працю, сировину та паливо. Норми витрат ресурсів на одиницю продукції, наявність ресурсів та прибуток від реалізації одиниці продукції наведені в таблиці 4.

Необхідно скласти такий план випуску продукції, щоб при її реалізації отримати максимальний прибуток.

Таблиця 4

Типи ресурсів	Одиниця виміру	Норми витрат ресурсів на одиницю продукції		Наявність ресурсів
		I вид	II вид	
<i>Праця</i>	людино-дні	a_{11}	a_{12}	b_1
<i>Сировина</i>	т	a_{21}	a_{22}	b_2
<i>Паливо</i>	т	a_{31}	a_{32}	b_3
Прибуток від реалізації одиниці продукції	тис. грн.	c_1	c_2	X

Початкові дані задаються у вигляді матриці A та вектора \bar{C} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{pmatrix}; \quad \bar{C} = (c_1, c_2).$$

Хід розв’язування задачі

1. Побудувати математичну модель задачі лінійного програмування (ЗЛП) і записати її в стандартній розгорнутій формі.
2. Розв’язати ЗЛП графічним методом і зробити висновок.

Зауваження. Обчислення проводити до двох знаків після коми.



Варіанти

$$1) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 41 \\ 5 & 8 & 34 \\ 4 & 5 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 8)$$

$$4) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 65 \\ 3 & 7 & 43 \\ 8 & 4 & 65 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 5)$$

$$7) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 52 \\ 8 & 7 & 80 \\ 4 & 9 & 56 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 6)$$

$$10) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 55 \\ 8 & 5 & 85 \\ 9 & 4 & 84 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 7)$$

$$13) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 76 \\ 7 & 6 & 82 \\ 9 & 4 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$16) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 63 \\ 4 & 7 & 75 \\ 8 & 5 & 72 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (3, 4)$$

$$2) \begin{pmatrix} 6 & 3 & 39 \\ 7 & 2 & 35 \\ 3 & 4 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 3)$$

$$5) \begin{pmatrix} 5 & 8 & 63 \\ 6 & 7 & 65 \\ 9 & 4 & 51 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (8, 7)$$

$$8) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 80 \\ 4 & 7 & 62 \\ 6 & 5 & 60 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 8)$$

$$11) \begin{pmatrix} 8 & 5 & 58 \\ 4 & 5 & 46 \\ 9 & 7 & 68 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 7)$$

$$14) \begin{pmatrix} 3 & 5 & 60 \\ 7 & 6 & 73 \\ 4 & 9 & 64 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 8)$$

$$17) \begin{pmatrix} 9 & 6 & 48 \\ 3 & 8 & 54 \\ 5 & 4 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 6)$$

$$3) \begin{pmatrix} 3 & 8 & 55 \\ 9 & 5 & 52 \\ 4 & 7 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$6) \begin{pmatrix} 7 & 4 & 56 \\ 5 & 6 & 50 \\ 8 & 3 & 47 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (9, 5)$$

$$9) \begin{pmatrix} 3 & 8 & 73 \\ 7 & 4 & 53 \\ 6 & 5 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 4)$$

$$12) \begin{pmatrix} 7 & 6 & 52 \\ 5 & 9 & 56 \\ 4 & 7 & 62 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 6)$$

$$15) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 41 \\ 9 & 5 & 65 \\ 8 & 3 & 49 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 5)$$

$$18) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 85 \\ 5 & 7 & 81 \\ 3 & 4 & 52 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (3, 4)$$



$$19) \begin{pmatrix} 7 & 4 & 68 \\ 5 & 8 & 72 \\ 6 & 5 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 3)$$

$$20) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 58 \\ 7 & 3 & 46 \\ 8 & 7 & 74 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$21) \begin{pmatrix} 6 & 7 & 77 \\ 8 & 5 & 81 \\ 9 & 4 & 85 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (9, 7)$$

$$22) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 22 \\ 5 & 3 & 30 \\ 3 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 4)$$

$$23) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 110 \\ 7 & 4 & 76 \\ 5 & 8 & 80 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 3)$$

$$24) \begin{pmatrix} 7 & 9 & 55 \\ 8 & 5 & 47 \\ 6 & 7 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$25) \begin{pmatrix} 8 & 7 & 60 \\ 9 & 5 & 47 \\ 5 & 6 & 39 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 3)$$

$$26) \begin{pmatrix} 6 & 5 & 79 \\ 7 & 9 & 108 \\ 8 & 5 & 105 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (7, 8)$$

$$27) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 62 \\ 5 & 8 & 59 \\ 6 & 5 & 57 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (4, 5)$$

$$28) \begin{pmatrix} 6 & 7 & 110 \\ 8 & 5 & 112 \\ 4 & 9 & 115 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (5, 6)$$

$$29) \begin{pmatrix} 4 & 7 & 64 \\ 6 & 5 & 42 \\ 9 & 8 & 66 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (3, 2)$$

$$30) \begin{pmatrix} 9 & 5 & 94 \\ 6 & 5 & 76 \\ 7 & 8 & 110 \end{pmatrix}$$

$$\vec{C} = (6, 5)$$

Лабораторна робота №5

„Розв’язування задач лінійного програмування симплекс-методом”

Постановка ЗЛП та вихідні дані наведені в лабораторній роботі №4.

Хід розв’язування задачі

1. Записати умову ЗЛП в канонічній формі.
2. Розв’язати ЗЛП симплекс-методом і зробити висновок.

Зауваження. Обчислення проводити до двох знаків після коми.



**„Транспортна задача. Побудова опорних планів
перевезень та їх оптимізація”**

Постановка задачі

У трьох (чотирьох) постачальників A_1, A_2, A_3 (A_1, A_2, A_3, A_4) є запаси однорідних вантажів відповідно в кількостях a_1, a_2, a_3 (a_1, a_2, a_3, a_4), які необхідно перевезти до чотирьох (трьох) споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 (B_1, B_2, B_3) з потребами відповідно b_1, b_2, b_3, b_4 (b_1, b_2, b_3). Відстані (в км) задані у вигляді матриці $C(3,4)$ або $C(4, 3)$.

Необхідно знайти оптимальний план перевезень вантажів при якому затрати на перевезення будуть мінімальними.

Хід розв'язування задачі

1. Побудувати початковий опорний план перевезень ТЗ трьома методами:

- а) північно-західного кута;
- б) мінімальної вартості (мінімального елемента в матриці);
- в) подвійної переваги.

2. Вибрати опорний план, при якому сумарні затрати на перевезення найменші, перевірити його на оптимальність методом потенціалів або розподільчим методом і зробити висновок.

Варіанти

$$1) \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 6 & 4 \\ 7 & 9 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (250; 180; 220; 260);$$
$$b = (310; 280; 250);$$

$$2) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 8 & 5 \\ 6 & 7 & 11 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (320; 220; 250);$$
$$b = (300; 180; 210; 130);$$

$$3) \quad C = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 5 \\ 10 & 12 & 4 \\ 11 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (200; 220; 210; 180);$$
$$b = (290; 190; 210);$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

4) $C = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 12 & 6 \\ 7 & 9 & 10 & 8 \\ 5 & 13 & 14 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (200; 230; 300);$
 $b = (260; 340; 220; 270);$

5) $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 8 & 4 \\ 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (160; 180; 190; 170);$
 $b = (220; 160; 240);$

6) $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 7 \\ 8 & 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad a = (260; 180; 200);$
 $b = (180; 160; 210; 180);$

7) $C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 8 \\ 4 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}; \quad a = (195; 175; 200; 180);$
 $b = (240; 160; 210);$

8) $C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 6 \\ 3 & 6 & 6 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (250; 180; 200);$
 $b = (220; 180; 165; 195);$

9) $C = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 7 \\ 8 & 4 & 2 \\ 7 & 2 & 10 \\ 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (190; 210; 180; 140);$
 $b = (260; 220; 180);$

10) $C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 11 & 6 \end{pmatrix}; \quad a = (230; 210; 160);$
 $b = (160; 190; 200; 170);$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$11) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 4 & 10 & 5 \\ 8 & 2 & 4 \\ 3 & 11 & 12 \end{pmatrix}; \quad a = (350; 300; 450; 310);$$
$$b = (400; 200; 300);$$

$$12) \quad C = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 10 & 12 \\ 6 & 10 & 6 & 8 \\ 4 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \quad a = (230; 180; 200);$$
$$b = (190; 220; 200; 210);$$

$$13) \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 6 \\ 11 & 12 & 7 \\ 10 & 9 & 3 \\ 9 & 5 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (280; 310; 250; 200);$$
$$b = (300; 200; 270);$$

$$14) \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 11 & 9 \\ 12 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 9 & 12 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (340; 250; 300);$$
$$b = (250; 300; 310; 260);$$

$$15) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 6 \\ 7 & 8 & 7 \\ 13 & 9 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}; \quad a = (340; 270; 260; 200);$$
$$b = (280; 300; 290);$$

$$16) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 9 & 10 \\ 10 & 7 & 6 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (300; 220; 250);$$
$$b = (280; 320; 260; 310);$$

$$17) \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 13 & 13 & 4 \\ 9 & 11 & 5 \\ 7 & 10 & 12 \end{pmatrix}; \quad a = (450; 400; 250; 200);$$
$$b = (390; 280; 350);$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$18) \quad C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 & 9 \\ 7 & 6 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 9 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (300; 200; 380); \\ b = (370; 280; 110; 230);$$

$$19) \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 \\ 10 & 11 & 8 \\ 12 & 13 & 9 \\ 7 & 6 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (350; 280; 310; 260); \\ b = (480; 290; 230);$$

$$20) \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 11 \\ 8 & 7 & 9 & 3 \\ 10 & 3 & 12 & 8 \end{pmatrix}; \quad a = (280; 260; 240); \\ b = (360; 230; 190; 210);$$

$$21) \quad C = \begin{pmatrix} 16 & 7 & 11 \\ 12 & 10 & 8 \\ 9 & 6 & 7 \\ 13 & 5 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (230; 270; 290; 250); \\ b = (330; 260; 380);$$

$$22) \quad C = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 7 & 6 \\ 8 & 10 & 11 & 14 \\ 6 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad a = (350; 230; 350); \\ b = (290; 180; 270; 260);$$

$$23) \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 11 & 13 & 10 \\ 7 & 15 & 8 \\ 14 & 10 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (270; 320; 230; 160); \\ b = (360; 190; 280);$$

$$24) \quad C = \begin{pmatrix} 13 & 14 & 6 & 10 \\ 10 & 9 & 9 & 11 \\ 9 & 12 & 8 & 15 \end{pmatrix}; \quad a = (390; 320; 270); \\ b = (230; 290; 310; 220);$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування

25)

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 5 \\ 10 & 8 & 9 \\ 8 & 9 & 13 \\ 9 & 7 & 14 \end{pmatrix}; \quad a = (280; 190; 320; 270);$$
$$b = (330; 260; 340);$$

26)

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 & 7 \\ 9 & 10 & 9 & 10 \\ 5 & 4 & 12 & 11 \end{pmatrix}; \quad a = (380; 320; 230);$$
$$b = (310; 170; 260; 240);$$

27)

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 13 & 7 \\ 9 & 6 & 5 \\ 15 & 12 & 14 \\ 6 & 10 & 9 \end{pmatrix}; \quad a = (190; 230; 210; 270);$$
$$b = (290; 240; 260);$$

28)

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 8 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 10 & 5 & 11 & 10 \end{pmatrix}; \quad a = (220; 190; 350);$$
$$b = (230; 180; 250; 210);$$

29)

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 6 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 11 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}; \quad a = (180; 230; 120; 160);$$
$$b = (270; 150; 240);$$

30)

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 10 & 7 & 9 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 14 & 12 \end{pmatrix}; \quad a = (370; 240; 180);$$
$$b = (230; 190; 310; 160).$$

3. РОЗРАХУНКОВА РОБОТА

Значення коефіцієнтів, які потрібно підставити в таблиці 5, 6, 7:

- i – кількість букв в імені;
- g – кількість голосних букв в імені;
- n – кількість приголосних букв в імені;
- p – кількість букв в прізвищі;
- k – кількість голосних букв в прізвищі;
- r – кількість приголосних букв в прізвищі.

Задача 1. „Задача оптимального розподілу обмежених ресурсів”

Нехай організація має запас цементу $Z = 1100$ т, який необхідно розподілити на 5 об'єктів так, щоб досягти максимального прибутку від здачі цих об'єктів в експлуатацію.

Необхідна кількість цементу для завершення кожного об'єкта та їх кошторисна вартість наведені в таблиці 5.

Таблиця 5

Показники	Об'єкти					Усього
	1	2	3	4	5	
К-сть цементу, що необхідний для будів., т	$100 \cdot g$	200	$100 \cdot i$	100	$100 \cdot k$	
Кошторисна вартість, тис. грн.	200	$50 \cdot n$	250	$50 \cdot r$	350	

Задача 2. „Задача оптимального вкладення інвестицій”

Нехай для 4 підприємств виділено інвестиції в обсязі $S = 600$ тис. грн., які потрібно розподілити так, щоб отримати максимальний приріст випуску продукції.

Залежності між вкладеними інвестиціями в кожне підприємство та приростом випуску продукції наведені в таблиці 6.

Таблиця 6

Обсяг інвест., тис. грн.	Приріст випуску продукції від інвестицій, тис. грн.			
	1 підприємство	2 підприємство	3 підприємство	4 підприємство
0	0	0	0	0
100	30	15	$10 \cdot k =$	25
200	50	$5 \cdot i =$	60	$5 \cdot p =$
300	$10 \cdot g =$	40	$10 \cdot r =$	55
400	45	$10 \cdot n =$	75	60
500	$10 \cdot p =$	60	85	$10 \cdot i =$
600	65	50	$10 \cdot i =$	65



Наці...
водного господарства
та природокористування

Задача 3. „Побудова та оптимізація сіткового графіка”

Постановка задачі

Побудувати та оптимізувати сітковий графік (СГ) будівництва.

Хід розв’язування задачі

1. Знайти вартість будівництва об’єкта.
2. Побудувати СГ будівництва.
3. Знайти коефіцієнти складності СГ та напруженості повних шляхів.
4. Оптимізувати СГ.
 - 4.1. Перевести з нормативного режиму в активний роботи, що лежать на критичному шляху, і знайти додаткові витрати.
 - 4.2. Перевести з нормативного режиму в пасивний роботи, що не лежать на критичному шляху, і знайти економію та кінцеву вартість спорудження об’єкта.

Таблиця 7

Вихідні дані для побудови та оптимізації СГ

№ з/п	Шифр роботи	Режими роботи					
		Нормативний		Активний		Пасивний	
		T_n Тривалість (дні)	ΔZ_n Вартість одного дня (тис. грн.)	ΔT_A Тривалість (дні)	ΔZ_A Вартість одного дня (тис. грн.)	ΔT_p Тривалість (дні)	ΔZ_p Вартість одного дня (тис. грн.)
1	2	3	4	5	6	7	8
1	0-1	$r=$	1	1	$g+r=$		2
2	1-2	$n=$	4	0	$k+n=$		4
3	1-3	6	5	$k=$	7		7
4	1-8	2	3	1	6		6
5	2-3	$p=$	8	1	10		$g+k=$
6	2-5	7	3	$g=$	$i=$		7
7	2-6	$i=$	12	2	14		$p=$
8	3-4	$g=$	5	1	7		$i=$
9	4-7	8	2	3	$p=$		4
10	5-7	10	9	2	$g+p=$		10
11	6-9	$k=$	3	1	$i=$		3
12	8-9	$n=$	4	0	6		6
13	7-10	4	8	2	$k=$		7
14	9-10	5	3	2	$i+k=$		5



ЛІТЕРАТУРА

1. Е. Волков. Численные методы.-М.: Наука, 1982.
2. Н. Калиткин. Численные методы. -М.: Наука, 1978.
3. Н. Копчёнова, И. Марон. Вычислительная математика в примерах и задачах.- М.: Наука, 1972.
4. Ю. Кузнецов и др. Математическое программирование.-М.: Высшая школа, 1980.
5. А. Петров. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах. -М.: Высшая школа, 1984.
6. В. Федосеев и др. Экономико-математические методы и прикладные модели. - М.: ЮНИТИ, 2002.
7. Р. Фурунжиев и др. Применение математических методов и ЭВМ: Практикум. Учебное пособие для вузов. – Мн.: Выш. шк., 1988.
8. Математичні методи і моделі розв'язування задач на ЕОМ. Конспект лекцій (шифр 034-100) / О. Тимейчук, В. Кузьменко.- Рівне: НУВГП, 2007. - 42 с.

