

УДК 627.324.2/3:532.546:532.72

**Власюк А. П., д.т.н., професор** (Міжнародний економіко-гуманітарний університет імені академіка Степана Дем'янчука, м. Рівне), **Жуковська Н. А., старший викладач, Каюн Д. В., студент, Бабанов С. О., студент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

### **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ГРУНТОВОГО МАСИВУ З УРАХУВАННЯМ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНЕСЕННЯ В ДВОВИМІРНОМУ ВИПАДКУ**

Розглянуто двовимірну задачу напружено-деформованого стану (НДС) повністю водонасиченого ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення. Знайдено чисельний розв'язок відповідної крайової задачі. Проведено серію чисельних експериментів та здійснено їх аналіз.

**Ключові слова:** напружено-деформований стан, зміщення, деформації, напруження, тепломасоперенесення.

**Питання врахування деформаційних процесів, що відбуваються в ґрунтових масивах,** на сучасному етапі розвитку математичного моделювання в поєднанні з комп'ютерним експериментом представляють науковий інтерес і є актуальними в сфері будівництва.

Досить часто ґрунтові основи об'єктів і споруд можуть зазнавати впливу різноманітних факторів людської діяльності та дії техногенних факторів, зокрема забруднення ґрунтових вод різноманітними солями розчинами, зміна сезонних та добових коливань температур, захоронення відходів виробництва тощо. При цьому змінюються гідрогеологічні властивості ґрунтових масивів, що в свою чергу може призвести до зміни їх напружено-деформованого стану (НДС) внаслідок виникнення гідродинамічних сил фільтраційного потоку, зміни власної ваги та фільтраційних властивостей ґрунту. Це, в свою чергу, досить часто є причиною аварій будівель і споруд.

Задача НДС ґрунтів досліджена та описана в працях [1-10]. Зокрема, в роботі [7] розглянуто одновимірну задачу НДС ґрунтового масиву в умовах тепломасоперенесення при фільтрації сольових розчинів. Однак, дослідження вищеописаних процесів у двовимірному випадку більш реально відображає деформаційні процеси, оскільки враховуєть-

ся не тільки глибина ґрунту, але і його ширина.

Тому, враховуючи вищесказане, потребує детального вивчення задача математичного моделювання та дослідження НДС ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення в двовимірному випадку.

**Метою даної роботи** є постановка задачі та удосконалення математичної моделі НДС повністю водонасиченого ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення; розв'язання поставленої крайової задачі; отримання результатів чисельних експериментів у вигляді графіків; аналіз НДС ґрунтового масиву при врахуванні тепломасоперенесення.

**Розглянемо ґрунтовий масив**, що займає область  $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$  (див. рис. 1).

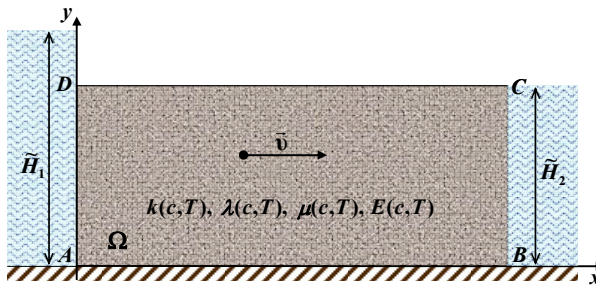


Рис. 1. Схема повністю водонасиченого ґрунтового масиву в двовимірному випадку

На рис. 1 область  $\Omega$  ґрунтового масиву вважається повністю водонасиченою, на яку діють сила тяжіння, архімедова та фільтраційна сили.

Ґрунтовий масив вважається пружно-деформівним в межах лінійної теорії пружності з пружними параметрами (коефіцієнтами Ламе)  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$ , які залежать від концентрації сольового розчину та температури.

Задані значення п'єзометричних напорів  $\tilde{H}_1$ ,  $\tilde{H}_2$ , температур  $\tilde{T}_1$  та  $\tilde{T}_2$  у лівому ( $AD$ ) та правому ( $BC$ ) водних басейнах відповідно, причому  $\tilde{H}_1 > \tilde{H}_2$ ,  $\tilde{T}_1 > \tilde{T}_2$ . У лівому водному басейні задано значення концентрації солей  $\tilde{C}_1$ , а у правому – умову швидкого виносу солей. Під впливом градієнтів напорів, концентрації солей та температури відбувається перенесення розчинених у воді речовин та тепла фільтраційним потоком. При цьому процеси фільтрації розчинених у воді ре-

човин та тепла підлягають відповідно законам Дарсі, Фіка та Фур'є.

Потрібно розрахувати значення зміщень, напружень та деформацій, а також розподіл поля напорів, швидкостей фільтрації, концентрації солей та температури ґрунтового масиву при умові, що відсутні зміщення нижньої ( $AB$ ) та верхньої ( $CD$ ) меж ґрунтового масиву, а також  $AB$  та  $CD$  вважаються теплоізолюваними і непроникними.

**Математичну модель** двовимірної задачі НДС ґрунтового масиву в умовах тепломасоперенесення в загальноприйнятих позначеннях можна описати наступною крайовою задачею [1-11]:

$$\begin{aligned} \mu(c, T)\Delta U + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \\ + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \\ - \left(\left(2\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial x} + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\right)T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\frac{\partial T}{\partial x}\right)\alpha_T = X, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mu(c, T)\Delta V + (\lambda(c, T) + \mu(c, T))\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \\ + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial \mu(c, T)}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) - \\ - \left(\left(2\frac{\partial \lambda(c, T)}{\partial y} + 2\frac{\partial \mu(c, T)}{\partial y}\right)T + (2\lambda(c, T) + 2\mu(c, T))\frac{\partial T}{\partial y}\right)\alpha_T = Y, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \end{aligned}$$

$$X = \frac{dp_1}{dx}, \quad Y = \gamma_{36} + \frac{dp_2}{dy}, \quad p_1 = \gamma_p(h - x), \quad p_2 = \gamma_p(h - y), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T)\nabla c) - \mathbf{v}\nabla c - \gamma(c - C_m) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) = n_p \frac{\partial c}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\lambda_T\nabla T) - \rho c_p \mathbf{v}\nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{v} = -\mathbf{K}(c, T)\nabla h + \mathbf{v}_c\nabla c + \mathbf{v}_T\nabla T, \quad \text{div } \mathbf{v} + \frac{\partial n_p}{\partial t} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{v}c - \mathbf{D}(c, T)\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T, \quad \mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{v}T - \lambda_T\nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (7)$$

$$\sigma_x = \frac{\theta}{1+\nu}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) - \alpha_T \bar{T}\theta, \quad \sigma_y = \frac{\theta}{1+\nu}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) - \alpha_T \bar{T}\theta, \quad \tau_{xy} = \frac{E(c,T)}{2(1+\nu)}\varepsilon_{xy}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (8)$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad h(\mathbf{X})|_{AD} = \tilde{H}_1(\mathbf{X}), \quad h(\mathbf{X})|_{BC} = \tilde{H}_2(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (9)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad c(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t), \quad \left. \frac{\partial c(\mathbf{X}, t)}{\partial n} \right|_{BC} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (10)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{AB \cup CD} = 0, \quad T(\mathbf{X}, t)|_{AD} = \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t), \quad T(\mathbf{X}, t)|_{BC} = \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = 0, \quad \mathbf{X} \in AB \cup CD, \quad \sigma_n = 0, \quad \tau_s = 0, \quad \mathbf{X} \in AD \cup BC, \quad (12)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = \tilde{H}_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = \tilde{C}_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = \tilde{T}_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (13)$$

де  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = (U(\mathbf{X}), V(\mathbf{X}))$  – вектор-функція зміщень,  $U(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осі  $Ox$ ,  $V(\mathbf{X})$  – зміщення вздовж осі  $Oy$ ;  $\mathbf{X} = (x, y)$  – точка;  $\lambda(c, T)$ ,  $\mu(c, T)$  – коефіцієнти Ламе;  $c(\mathbf{X}, t)$  – концентрація сольових розчинів;  $T(\mathbf{X}, t)$  – температура;  $\alpha_T$  – середній коефіцієнт лінійного теплового розширення в інтервалі температур  $(T_0, T)$  [10];  $p_1$ ,  $p_2$  – фільтраційні тиски сольового розчину;  $\gamma_{\text{ж}}$  – питома вага ґрунту, що знаходиться в зваженому стані;  $\mathbf{v}$  – вектор швидкості фільтрації;  $n_p$  – об'єм сольового розчину води в одиниці об'єму ґрунту;  $\mathbf{D}(c, T)$  – коефіцієнт (тензор) конвективної дифузії;  $\mathbf{D}_T$  – коефіцієнт (тензор) термодифузії;  $\lambda_T$  – коефіцієнт (тензор) ефективної теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  – густина порового сольового розчину;  $c_\rho$  – питома теплоємність порового сольового розчину;  $c_T$  – об'ємна теплоємність ґрунту при сталому об'ємі;  $\mathbf{K}(c, T)$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації сольового розчину та температури ґрунтового масиву;  $h(\mathbf{X}, t)$  – п'єзометричний напір,  $\mathbf{v}_c$  – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу,  $\mathbf{v}_T$  – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;  $\theta = \frac{E(c, T)}{1 - \nu}$ ;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\bar{T} = T(\mathbf{X}, t) - T(\mathbf{X}, 0)$  – різниця температур в даний момент часу та в початковий момент часу в заданій точці;  $\tilde{H}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{C}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{T}_0(\mathbf{X})$ ,  $\tilde{H}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{H}_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{C}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $\tilde{T}_2(\mathbf{X}, t)$  – задані функції;  $\mathbf{n}$  – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ ;  $t$  – час.

Тут (1) – це система рівнянь рівноваги в формі Ламе для зміщень ґрунту з врахуванням тепломасоперенесення сольових розчинів; (2) –

компоненти масової сили та фільтраційні тиски сольового розчину; (3) – рівняння конвективної дифузії при наявності тепломасоперенесення; (4) – рівняння конвективного теплоперенесення у всій області ґрунтового масиву; (5) – узагальнені рівняння фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах та рівняння нерозривності процесу; (6) – питомий потік розчинених солей на випадок неізотермічних умов та узагальнений закон Фур'є на випадок конвективного тепломасоперенесення; (7) – нормальні та дотичні деформації; (8) – нормальні та дотичні напруження. Крайові умови на границях ґрунтового масиву для зміщень, п'єзометричного напору, концентрації солей та температури мають вигляд (9)–(13) відповідно.

Для чисельного розв'язання системи рівнянь (1) використано ітераційний метод Гауса – Зейделя. В результаті отримано:

$$\begin{aligned} U_{j_1, j_2}^{(z+1)} &= \bar{A}_1 U_{j_1+1, j_2}^{(z)} + \bar{B}_1 U_{j_1-1, j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_1 U_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_1 U_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_1(V_{j_1, j_2}^{(z)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \\ V_{j_1, j_2}^{(z+1)} &= \bar{A}_2 V_{j_2+1, j_2}^{(z)} + \bar{B}_2 V_{j_2-1, j_2}^{(z+1)} + \bar{C}_2 V_{j_1, j_2+1}^{(z)} + \bar{D}_2 V_{j_1, j_2-1}^{(z+1)} + \bar{F}_2(U_{j_1, j_2}^{(z+1)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \frac{\lambda_{j_1+1, j_2} + 2\mu_{j_1+1, j_2}}{\Lambda_1 h_1^2}, \quad \bar{B}_1 = \frac{\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_1 h_1^2}, \quad \bar{C}_1 = \frac{\mu_{j_1, j_2+1}}{\Lambda_1 h_2^2}, \quad \bar{D}_1 = \frac{\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_1 h_2^2}, \\ \bar{F}_1(V_{j_1, j_2}^{(z)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}) &= \frac{-f_{i_1, i_2}^1(V, T)}{\Lambda_1}, \quad \bar{A}_2 = \frac{\mu_{j_1+1, j_2}}{\Lambda_2 h_1^2}, \quad \bar{B}_2 = \frac{\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_2 h_1^2}, \\ \bar{C}_2 &= \frac{\lambda_{j_1, j_2+1} + 2\mu_{j_1, j_2+1}}{\Lambda_2 h_2^2}, \quad \bar{D}_2 = \frac{\lambda_{j_1, j_2} + 2\mu_{j_1, j_2}}{\Lambda_2 h_2^2}, \quad \bar{F}_2(U_{j_1, j_2}^{(z+1)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}) = \frac{-f_{j_1, j_2}^2(U, T)}{\Lambda_2}, \\ \Lambda_1 &= \frac{(\lambda_{j_1+1, j_2} + \lambda_{j_1, j_2}) + 2(\mu_{j_1+1, j_2} + \mu_{j_1, j_2})}{h_1^2} + \frac{\mu_{j_1, j_2+1} + \mu_{j_1, j_2}}{h_2^2}, \\ \Lambda_2 &= \frac{(\lambda_{j_1, j_2+1} + \lambda_{j_1, j_2}) + 2(\mu_{j_1, j_2+1} + \mu_{j_1, j_2})}{h_2^2} + \frac{\mu_{j_1+1, j_2} + \mu_{j_1, j_2}}{h_1^2}. \end{aligned}$$

Тут  $f_{i_1, i_2}^1(V, T)$ ,  $f_{j_1, j_2}^2(U, T)$  – деякі відомі функції.

Ітерації за формулами (14) проводяться до тих пір, поки різниця значень не стане меншою за деяку задану точність  $\varepsilon$

$$\left| U_{j_1, j_2}^{(z+1)} - U_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon, \quad \left| V_{j_1, j_2}^{(z+1)} - V_{j_1, j_2}^{(z)} \right| \leq \varepsilon,$$

де  $j_1 = \overline{1, m_1 - 1}$ ,  $j_2 = \overline{1, m_2 - 1}$ ,  $s = \overline{0, n_1}$ ,  $z$  – номер ітерації,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $n_1$  – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Скінченнорізницеві аналоги для компонент тензора деформацій (7)

матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
 (\varepsilon_x)_{j_1, j_2} &= \frac{U_{j_1+1, j_2} - U_{j_1-1, j_2}}{2h_1}, \quad (\varepsilon_y)_{j_1, j_2} = \frac{V_{j_1, j_2+1} - V_{j_1, j_2-1}}{2h_2}, \\
 (\varepsilon_{xy})_{j_1, j_2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{U_{j_1, j_2+1} - U_{j_1, j_2-1}}{2h_2} + \frac{V_{j_1+1, j_2} - V_{j_1-1, j_2}}{2h_1} \right), \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1}.
 \end{aligned} \quad (15)$$

Для компонент тензора напружень (8) скінченнорізницеві аналоги запишуться в наступному вигляді:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_x)_{j_1, j_2} &= \frac{\theta}{1+\nu} ((\varepsilon_x)_{j_1, j_2} + \nu(\varepsilon_y)_{j_1, j_2}) - \alpha_T \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} \theta, \\
 (\sigma_y)_{j_1, j_2} &= \frac{\theta}{1+\nu} ((\varepsilon_y)_{j_1, j_2} + \nu(\varepsilon_x)_{j_1, j_2}) - \alpha_T \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} \theta, \\
 (\tau_{xy})_{j_1, j_2} &= \frac{E_{j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})}{2(1+\nu)} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)}) \cdot (\varepsilon_{xy})_{j_1, j_2},
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{де } \theta = \frac{E_{j_1, j_2} (c_{j_1, j_2}^{(s)}, T_{j_1, j_2}^{(s)})}{1-\nu}, \quad \bar{T}_{j_1, j_2}^{(s)} = T_{j_1, j_2}^{(s)} - T_{j_1, j_2}^{(0)}, \quad j_1 = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j_2 = \overline{1, m_2 - 1},$$

$$s = \overline{0, n_1}.$$

Для чисельного розв'язання задачі масоперенесення в нізотермічних умовах (3) та теплоперенесення (4) з додатковими умовами використано локально-одновимірний метод О.А. Самарського [12].

**Як приклад, розглянуто двовимірну задачу НДС ґрунтового масиву** прямокутної форми довжиною  $l_1 = 20$  м та товщиною  $l_2 = 10$  м.

Значення решти вхідних даних брались наступними:

$$n_p = 0,3, \quad \alpha_T = 1 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\text{град}}, \quad \gamma_p = 1 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \gamma_{36} = 1,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{м}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3},$$

$$\rho_{cp} = 1650 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad \rho_p = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad c_T = 2,137 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}},$$

$$c_\rho = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{град}}, \quad D = 2 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}, \quad D_T = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}},$$

$$\gamma = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \quad \nu_c = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{м}^{-5}}{\text{кг} \cdot \text{доба}}, \quad \nu_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}},$$

$$\lambda_T = 108 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad \tilde{T}_1(\mathbf{X}, t) = 30^\circ \text{C}, \quad \tilde{T}_2(\mathbf{X}, t) = 15^\circ \text{C},$$

$$\tilde{H}_1(\mathbf{X}, t) = 10 \text{ м}, \quad \tilde{H}_2(\mathbf{X}, t) = 1 \text{ м}, \quad \tilde{C}_1(\mathbf{X}, t) = C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}},$$

$$\tilde{C}_2(\mathbf{X}, t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{C}_0(\mathbf{X}, t) = 8 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad \tilde{T}_0(\mathbf{X}, t) = 5^\circ \text{C}.$$

Залежності коефіцієнтів Ламе, модуля Юнга та коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури взяті аналогічно [7].

Час, протягом якого розглядався процес НДС, дорівнював 3 рокам.

Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків при  $t = 1080$  діб.

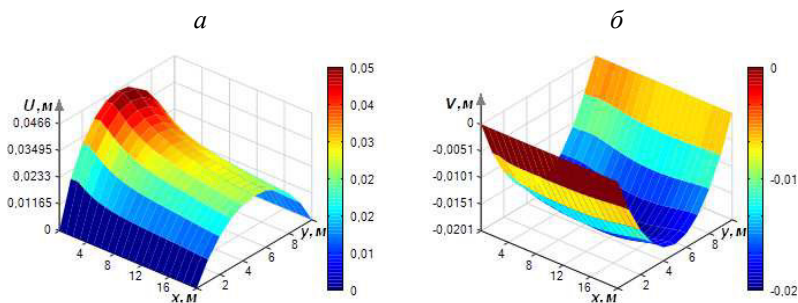


Рис. 2. Розподіл поля зміщень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)  
з врахуванням тепломасоперенесення

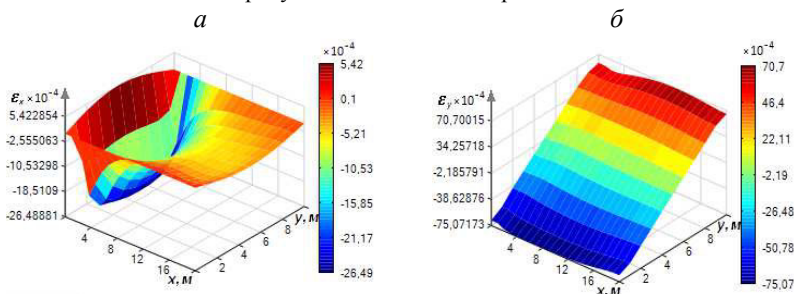


Рис. 3. Розподіл поля деформацій вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б)  
з врахуванням тепломасоперенесення

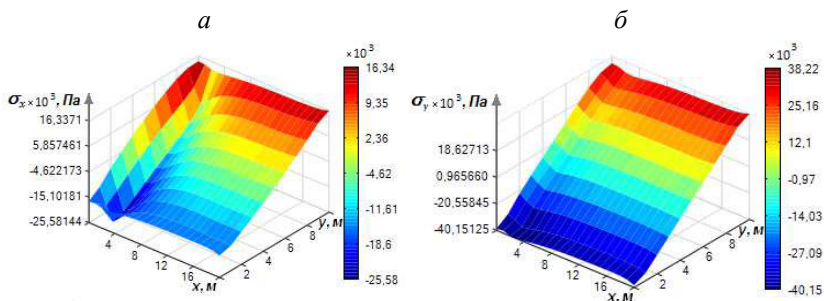


Рис. 4. Розподіл поля напружень вздовж осей  $Ox$  (а) та  $Oy$  (б) з врахуванням тепломасоперенесення

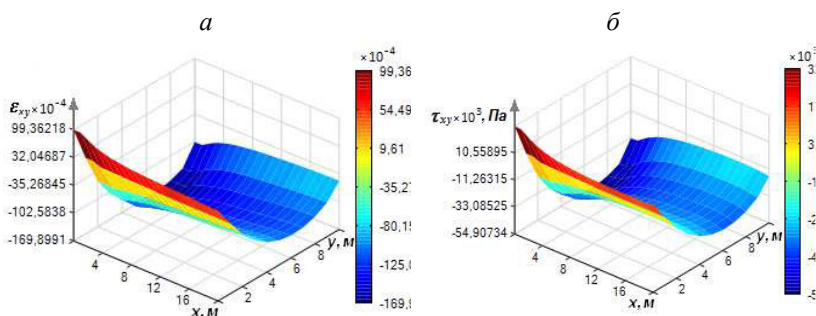


Рис. 5. Розподіл поля деформацій  $\epsilon_{xy}$  (а) та розподіл поля напружень  $\tau_{xy}$  (б) з врахуванням тепломасоперенесення

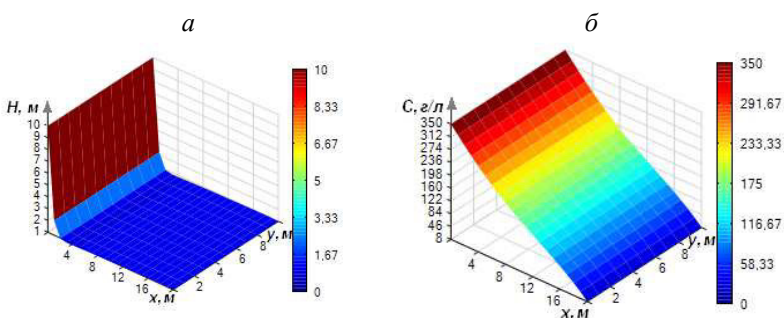


Рис. 6. Розподіл поля п'езометричного напору з врахуванням фільтрації солевих розчинів (а) та розподіл поля концентрації солей (б) в неізотермічних умовах



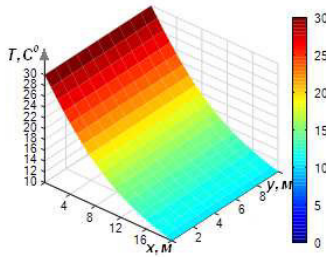


Рис. 7. Розподіл поля температури при фільтрації солевих розчинів

Як видно із рис. 2, а, 3, а, 4, а, значення зміщень, деформацій та напружень ґрунтового масиву по осі  $Ox$  досягають найбільших значень в області лівого водного басейну (області високих напорів, температури та концентрації солей). Значення зміщень по осі  $Oy$  (рис. 2, б) значно зменшуються по всій області дослідження при  $y = 5\text{ м}$ . Деформації та напруження по осі  $Oy$  (рис. 3, б, 4, б) досягають найбільших значень на нижній та верхній межах ґрунтового масиву. Дотичні деформації та напруження (рис. 5, а, 5, б) значно збільшуються в області нижньої межі ґрунтового масиву.

**Висновки.** В роботі сформульовано постановку та проведено математичне моделювання задачі НДС ґрунтового масиву з урахуванням тепломасоперенесення в двовимірному випадку. Знайдено чисельний розв'язок поставленої крайової задачі, в результаті чого отримано значення зміщень, напружень, деформацій, розподіл поля напору, концентрації солей та температури в ґрунтовому масиві. Проведено серію чисельних експериментів, результати яких наведено у вигляді графіків та здійснено аналіз отриманих результатів. Показано, що тепломасоперенесення змінює картину НДС. Тому врахування вищеописаних процесів є важливим з метою забезпечення стійкості та надійності експлуатації об'єктів і споруд.

1. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах [Текст] / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К. : Наукова думка, 1991. – 432 с. 2. Власюк А. П. Розв'язування одновимірної стаціонарної задачі НДС ґрунтових масивів в умовах масоперенесення [Текст] / А. П. Власюк, Є. І. Катерина [Текст] // Вісник Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ., 1999. – Вип. 1. – С. 50–55. 3. Власюк А. П. Про деякі нові математичні моделі підземної гідромеханіки [Текст] / А. П. Власюк // Вісник РДТУ. – Рівне. – Вип. 3(5). Ч. 2. – 2000. – С. 57–62. 4. Кузлю М. Т. Про де-

які математичні моделі напружено-деформованого стану ґрунтових масивів в процесі руху вільної поверхні ґрунтових вод [Текст] / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2005. – Вип. 2(30). – С. 282–287. 5. Кузло М. Т. Дослідження впливу концентрації солевих розчинів на деформаційні характеристики ґрунтів [Текст] / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – Рівне, 2006. – Вип. 4(36). – Ч. 2. – С. 209–214. 6. Федорчук Н. А. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах та наявності рівня ґрунтових вод [Текст] / Н. А. Федорчук // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова Нац. акад. наук України, Кам.-Под. нац. ун-т ім. І. Огієнка. – Кам'янець-Подільський : Кам.-Под. нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2010. – Вип. 4 – С. 204–215. 7. Власюк А. П. Математичне моделювання одновимірної задачі напружено-деформованого стану ґрунтового масиву в умовах тепломасоперенесення при фільтрації солевих розчинів [Текст] / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – Вип. 1. – 2012. – С. 131–136. 8. Власюк А. П. Числове моделювання впливу тепломасоперенесення на напружено-деформований стан ґрунтового масиву внаслідок утворення депресійної лунки [Текст] / А. П. Власюк, Н. А. Федорчук // Вісник Тернопільського національного технічного університету. – Тернопіль. – 2014. – № 1 (73). – С. 224–237. 9. Власюк А. П. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния основания грунтовой плотины со свободной поверхностью под влиянием тепло- и массопереноса в двумерном случае [Текст] / А. П. Власюк, Н. А. Жуковская // Инженерно-физический журнал. 2015. – Т. 88. – № 2. – С. 324–335. 10. Коваленко А. Д. Термоупругость [Текст] / А. Д. Коваленко. – К. : Вища школа, 1975. – 216 с. 11. Подстригач Я. С. Термоупругость тонких оболочек / Я. С. Подстригач, Р. Н. Швец. – К. : «Наук. думка», 1978. – 344 с. 12. Самарский А. А. Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1989. – 616 с. 13. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солевих розчинів в неізотермічних умовах: [монографія] [Текст] / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне : НУВГП, 2008. – 416 с.

Рецензент: д.т.н., професор Мартинюк П. М. (НУВГП)

---

**Vlasiuk A. P., Doctor of Engineering, Professor** (Academician Stepan Demianchuk International University of Economics and Humanities, Rivne), **Zhukovska N. A., Senior Lecturer, Kaiun D. V., Senior Student, Babanov S. O., Senior Student** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

**MATHEMATICAL MODELLING OF STRESSED AND**

## **DEFORMED STATE OF SOIL MASS UNDER HEAT AND MASS TRANSFER IN TWO-DIMENSIONAL CASE**

The two-dimensional problem of stressed and deformed state (SDS) of a completely water saturated soil mass under heat and mass transfer was solved. There is obtained the numerical solution of respective boundary value problem. A series of numerical experiments and their analysis was conducted.

**Keywords:** stressed and deformed state, displacements, deformations, tensions, heat and mass transfer.

---

**Власюк А. П.,** д.т.н., профессор (Международный экономико-гуманитарный университет им. акад. Степана Демьянчука, г. Ровно),  
**Жуковская Н. А.,** ст. преподаватель, **Каюн Д. В.,** студент,  
**Бабанов С. О.,** студент (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ГРУНТОВОГО МАССИВА С УЧЁТОМ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА В ДВУМЕРНОМ СЛУЧАЕ**

Рассмотрена двумерная задача напряженно-деформированного состояния (НДС) полностью водонасыщенного грунтового массива с учетом тепло- и массопереноса. Найдено численное решение соответствующей краевой задачи. Проведена серия численных экспериментов и выполнен их анализ.

**Ключевые слова:** напряженно-деформированное состояние, смещения, деформации, напряжения, тепло- и массоперенос.

---