

УДК 539.3

Тинчук С. О., к.т.н., доцент (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК НЕСКІНЧЕННОЇ ПЛИТИ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ ПІД ЗОСЕРЕДЖЕНОЮ СИЛОЮ

Для аналізу напружено-деформованого стану (НДС) плити використано уточнену континуальну модель беззгинового НДС. Показано методику отримання аналітичного розв'язку для нескінченної плити на жорсткій основі під дією зосередженої сили.

Ключові слова: уточнена модель, поперечний зсув, поперечне обтиснення, жорстка основа.

Розрахунки на міцність та жорсткість однорідних та неоднорідних композитних, особливо багатошарових, покриттів зводяться до аналізу їх НДС, як плит, що контактують із основою. Це стосується розрахунку дорожнього багатошарового одягу на достатньо жорстких мостових, тунельних та інших конструкціях транспортних споруд, захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій та деталей, функціональних покриттів робочих поверхонь різного обладнання, зокрема емалевих покриттів корпусів хімічних апаратів тощо. Тому достовірне визначення НДС плит на жорстких основах при дії поперечно-го навантаження є актуальною задачею.

Об'єднання матеріалів з ізотропними та трансверсально-ізотропними фізичними характеристиками в багатошаровий пакет дозволяє створювати багатофункціональні конструкції. НДС таких конструкцій, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Потрібно відмітити, що застосування класичної теорії пластин чи уточнених поперечно-зсувних моделей призводить до тривіально-нульового розв'язку для НДС поперечно навантажених плит на жорсткій основі.

Відомі уточнені моделі НДС [1; 2], що враховують поперечні зсуви та поперечне обтиснення, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС, тоді як у плитах на жорсткій основі переважає беззгинова складова НДС. Отже, потрібне використання уточненої моделі, яка б з високою точністю описувала беззгинову складову НДС плити на жорсткій основі.

В роботі [3] запропоновано гіпотези та побудована спеціальна модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. В роботах [4; 5] розглянуті структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит, в яких ідея ітераційного моделювання [3], застосована для плит на жорсткій основі. Проте в даних роботах розглянуті задачі при дії на плиту синусоїдального навантаження.

Метою даної роботи є показати можливість отримання аналітичного розв'язку на прикладі нескінченної плити під зосередженою силою з використанням підходів до моделювання НДС плит на жорсткій основі [3-5].

Розглядається задача плоскої деформації багатшарової нескінченної $-\infty \leq x_i \leq \infty$ плити на жорсткій основі під дією розподіленого навантаження інтенсивністю F по лінії $x_1 = 0$. При розв'язку використовується підхід оптимізації розрахункової схеми плити [5], для чого плита симетрично добудовується відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде у цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє $H = 2h$. При цьому контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя.

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати розглянуту в [4] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС – згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС в симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні повністю описується беззгиновим НДС.

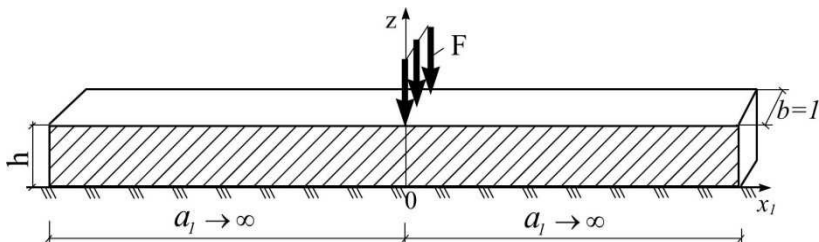


Рисунок. Розрахункова схема нескінченної плити на жорсткій основі

Для розрахунку НДС полоси плити одиничної ширини (рисунок) використаємо уточнену модель [5] при утриманні в ній двох невідомих

функцій поперечного обтиснення γ_1 та γ_2 і однієї функції поперечно-го зсуву β_{11} та функції тангенціальних зміщень v_1 на поверхні контакту плити з основою в напрямку Ox_1 у вигляді:

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{31,3}^{(k)} \gamma_1 + \psi_{32,3}^{(k)} \gamma_2; \\ u_1^{(k)} &= v_1 - \psi_{31}^{(k)} \gamma_{1,1} - \psi_{32}^{(k)} \gamma_{2,1} - \psi_{11}^{(k)} \beta_{11}. \end{aligned} \quad (1)$$

Гіпотетично задані функції $\psi_{3l}^{(k)}$, $\psi_{11}^{(k)}$, що моделюють розподіл зміщень за координатою z мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_1^{(s)} dz; \quad \psi_{32,3}^{(k)} = \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; \quad s = \overline{1, k}; \\ \psi_{11}^{(k)} &= -\int_0^z a_{1313}^{(s)} f_{11}^{(s)} dz; \quad \psi_l^{(k)} = \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; \quad l = 1, 2, \end{aligned} \quad (2)$$

які для випадку однорідної плити запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned} \psi_{31,3} &= A_{1111} a_{3333} H^5 (48\xi^5 - 40\xi^3 + 15\xi) / 5760; \quad \xi = z / H; \\ \psi_{32,3} &= a_{3333} H\xi; \quad \psi_{32} = a_{3333} H^2 \xi^2 / 2; \quad H = 2h; \\ \psi_{31} &= A_{1111} a_{3333} H^6 (16\xi^6 - 20\xi^4 + 15\xi^2) / 11520; \\ \psi_{11} &= -A_{1111} a_{1313} H^4 (2\xi^4 - \xi^2) / 48, \end{aligned} \quad (3)$$

де $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ та $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – коефіцієнти закону Гука $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}$ і $e_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}$. Тут і надалі диференціювання по x_α позначено нижніми індексами після коми.

Загальний розв'язок, відповідно до методики [6], запишемо у вигляді:

$$v_1 = \bar{A} \cdot e^{kx}; \quad \gamma_1 = \bar{B} \cdot e^{kx}; \quad \gamma_2 = \bar{C} \cdot e^{kx}; \quad \beta_{11} = \bar{D} \cdot e^{kx}. \quad (4)$$

Підставивши (4) в однорідну систему розрахункових рівнянь в зміщеннях $[L] \cdot [u] = [p]$ із [5], отримаємо характеристичне рівняння у вигляді матриці 4×4 :

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} = 0, \quad (5)$$

коефіцієнти характеристичного рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= -k^2 B_0; \quad L_{12} = -L_{21} = k^3 B_{31} - kP_1; \quad L_{13} = -L_{31} = k^3 B_{32} - kP_2; \\
 L_{14} &= L_{41} = k^2 B_{11}; \quad L_{22} = k^4 D_{11}^{33} - k^2 (H_{11}^3 + J_{11}^3) - R_{11}; \\
 L_{23} &= L_{32} = k^4 D_{12}^{33} - k^2 (H_{12}^3 + J_{12}^3) - R_{12}; \quad L_{24} = -L_{42} = k^3 D_{11}^{31} - kH_{11}^1; \\
 L_{33} &= k^4 D_{22}^{33} - k^2 (H_{22}^3 + J_{22}^3) - R_{22}; \quad L_{34} = -L_{43} = k^3 D_{21}^{31} - kH_{12}^1; \\
 L_{44} &= -k^2 D_{11}^{11} + T_{11}^1. \tag{6}
 \end{aligned}$$

Сталі коефіцієнти в рівняннях (5) і (6) є узагальненими фізико-геометричними характеристиками плити і визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} dz; \quad B_{\alpha s} = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha s} dz; \quad P_t = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t, 33} dz; \\
 D_{fs}^{\alpha\mu} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1111} \psi_{\alpha f} \psi_{\mu s} dz; \quad \alpha, \mu = 1, 3; \quad s, f = \overline{1, 2}; \\
 J_{ft}^\alpha &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{\alpha f} \psi_{3t, 33} dz; \quad H_{ts}^\alpha = \int_{-b_n}^{b_n} A_{1133} \psi_{3t, 33} \psi_{\alpha s} dz; \\
 R_{tq} &= \int_{-b_n}^{b_n} A_{3333} \psi_{3t, 33} \psi_{3q, 33} dz; \quad T_{11}^1 = \int_{-b_n}^{b_n} G' \psi_{11, 3} \psi_{11, 3} dz; \quad t, q = \overline{1, 2}, \tag{7}
 \end{aligned}$$

де $b_n = H / 2 = h$ – координата верхньої поверхні плити.

Характеристичне рівняння (5), наприклад, для випадку однорідної ізотропної плити з $E = 1 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,25$ запишеться у вигляді:

$$5,296 \cdot 10^{-6} k^{12} - 7,747 \cdot 10^{-2} k^{10} + 1,007 k^8 - 143,62 k^6 + 878,66 k^4 - 4408,2 k^2 = 0.$$

Розв'язком характеристичного рівняння (5) будуть: два нульові корені $k_1 = k_2 = 0$; чотири пари комплексно спряжених коренів $k_3 = -k_4 = a - ib$; $k_5 = -k_6 = a + ib$; $k_7 = -k_8 = c - id$; $k_9 = -k_{10} = c + id$, а також два дійсні корені $k_{11} = -k_{12} = f$.

Загальний розв'язок, наприклад, для функції v_1 (функції зміщень на

поверхні ковзкого контакту плити з основою) запишеться у вигляді:

$$v_1 = C_1 + C_2 x + e^{ax} (C_3 \cos bx + C_5 \sin bx) + e^{-ax} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + e^{cx} (C_7 \cos dx + C_9 \sin dx) + e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + C_{11} e^{fx} + C_{12} e^{-fx}, \quad (8)$$

де C_μ ($\mu = \overline{1, 12}$) – сталі інтегрування, що визначаються із граничних умов.

Оскільки розглядається нескінченно довга полоса плити одиничної ширини при «зосередженому» навантаженні F , то для точок, суттєво віддалених від місця прикладання сили F , зміщення $u_\alpha^{(k)}$ зменшаться до нуля. Це можливо, якщо $C_2 = C_3 = C_5 = C_7 = C_9 = C_{11} = 0$. Тоді вираз (8) матиме вигляд:

$$v_1 = C_1 + e^{-ax} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + C_{12} e^{-fx}. \quad (9)$$

Подібний вигляд мають розв'язки і для інших шуканих функцій γ_i і β_{11} :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \overline{B}_4 \cdot e^{-ax} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \overline{B}_8 \cdot e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \\ &+ \overline{B}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}; \\ \gamma_2 &= \overline{C}_4 \cdot e^{-ax} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \overline{C}_8 \cdot e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \\ &+ \overline{C}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}; \\ \beta_{11} &= \overline{D}_4 \cdot e^{-ax} (C_4 \cos bx + C_6 \sin bx) + \overline{D}_8 \cdot e^{-cx} (C_8 \cos dx + C_{10} \sin dx) + \\ &+ \overline{D}_{12} \cdot C_{12} e^{-fx}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для відшукування інших сталих інтегрування необхідно задовольнити граничні умови в поперечному перерізі під силою F посередині плити (при $x_1 = 0$):

$$\text{– кінематичні умови: } v_1 = 0; \quad \gamma_{1,1} = 0; \quad \gamma_{2,1} = 0; \quad \beta_{11} = 0; \quad (11)$$

$$\text{– статичні умови: } M_{11,1}^{[13]} - Q_1^{[13]*} = 0; \quad M_{11,1}^{[23]} - Q_3^{[23]*} = 0, \quad (12)$$

де $M_{11}^{[t3]}$ – узагальнений згинний момент :

$$M_{11,1}^{[t3]} = \int_{-b_n}^{b_n} \sigma_{11,1}^{(k)} \psi_{3t}^{(k)} dz; \quad t=1, 2; \quad (13)$$

$Q_t^{[t3]*}$ – узагальнена поперечна сила в центрі плити:

$$Q_t^{[t3]*} = F \cdot \psi_{3t,3}^{(n)}, \quad \text{при } z = h. \quad (14)$$

Для кожного з коренів k_μ ($\mu = \overline{1, 12}$) із характеристичного рівняння (5) знаходяться значення коефіцієнтів $\overline{A}_\mu = 1$, \overline{B}_μ , \overline{C}_μ та \overline{D}_μ в (4), а потім із системи рівнянь (11), (12) отримуємо шуканий розв’язок для сталих інтегрування C_μ .

Розв’язок даної задачі містить тільки загальний розв’язок і має задухаючий характер при $x_1 \rightarrow \infty$.

Для полоси шириною $b = 1$ м ізотропної плити з $E = 1 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,25$, вертикальні зміщення в поперечному перерізі при $x_1 = 0$ та $F = 10$ кН/м показано в таблиці (варіант В1).

Таблиця

Величина прогину в нескінченній плиті (в перерізі при $x_1 = 0$)

Варіанти	z/h	1	0,8	0,5	0
В1	u_3 , мм	55,93	22,32	10,16	0
В2		57,67	24,09	11,83	0

Також розглянута задача для нескінченної ізотропної плити з такими ж пружними характеристиками, але з дефектом розшарування при $z/h = 0,5$, що моделюється введенням тонкого трансферсально-ізотропного шару $h_d^{(2)} = h/200$ ($0,5h \leq z \leq 0,505h$) з характеристиками пружності $E'_d = E^{(1)}$; $E_d = E^{(1)}/10^3$; $\nu_d = \nu'_d = 0$; $G_d = G'_d = E_d/2$ (варіант В2 в таблиці).

З результатів розрахунку (таблиця) видно, що введення шару проковзування дещо збільшує величину прогину u_3 під навантаженням.

Як видно з наведених результатів запропонована методика дозволяє отримувати аналітичні розв’язки як для однорідних, так і багат шарових плит на жорсткій основі при дії зосередженого навантаження.

Вводячи в плити шари різної жорсткості, можна моделювати різні умови контакту як між шарами плити, так і на поверхні контакту плити з основою.

Автор висловлює вдячність доценту Гуртовому О.Г. за постановку задачі і участь в аналізі отриманих результатів.

1. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин / В. Г. Пискунов // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 76–81. 2. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек / А. О. Рассказов // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 50–56. 3. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А. Г. Гуртовий // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 13–28. 4. Гуртовий О. Г. Задача поперечно-деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою / О. Г. Гуртовий, С. О. Тинчук // 36. наук. праць – Вісник УДУВГП. – Рівне : УДУВГП. – 2004. – Випуск 2 (26). – С. 222–229. 5. Гуртовий А. Г. Безыггибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании / А. Г. Гуртовий, С. А. Тынчук // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 643–654. 6. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов / Н. С. Пискунов. – 13-е изд. – М. : Наука, 1985. – 560 с.

Рецензент: д.т.н., професор Трач В. М. (НУВГП)

Tynchuk S. O., Candidate of Engineering, Associate Professor (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

ANALYTICAL CALCULATION OF ENDLESS PLATE ON A RIGID FOUNDATION UNDER THE ACTION OF CONCENTRATED FORCE

To analyze the stress-strain state (SSS) of plate refined continuum model of unflexural SSS are used. Showing method for obtaining analytical solution for an infinite plate on a an rigid foundation under concentrated force.

Keywords: refined model, transverse shear, transverse compression, rigid foundation.

Тынчук С. А., к.т.н., доцент (Національного університету водного господарства и природопользования, г. Ровно)

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛИТЫ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ ПОД СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛОЙ

Для анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) плиты на жестком основании использовано уточненную континуальную модель безызгибного НДС. Показана методика получения аналитического решения для бесконечной плиты на жестком основании под действием сосредоточенной силы.

Ключевые слова: уточненная модель, поперечный сдвиг, поперечное обжатие, жесткое основание.
