Міністерство освіти і науки України

Національний університет водного господарства та природокористування

Кафедра будівельних, дорожніх, меліоративних, сільськогосподарських машин та обладнання

02–01–368

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних завдань та самостійної роботи з навчальної дисципліни
“Моделювання та оптимізація робочих процесів машин“
для студентів спеціальності 133 “Галузеве машинобудування“

Рекомендовано
науково-методичною комісією зі спеціальності:
133 Галузеве машинобудування,
протокол № 1 від 06.09.2016 р.

Рівне – 2017

Методичні вказівки до виконання практичних завдань та самостійної роботи з навчальної дисципліни "Моделювання та оптимізація робочих процесів машин" для студентів спеціальності 133 «Галузеве машинобудування» / Лук'янчук О.П. – Рівне: НУВГП, 2017, – 24 с.

Розробник: О.П.Лук'янчук, к.т.н., доцент кафедри БДМСГМіО

Відповідальний за випуск: С.В.Кравець, д-р техн. наук, професор, завідувач кафедри БДМСГМіО

Зміст

Вступ

Вивчення дисципліни "Моделювання та оптимізація робочих процесів машин" включає курс лекцій, лабораторні заняття, практичні заняття, самостійну роботу.

Мета практичних занять та самостійної роботи – отримати практичні навички самостійного застосування принципів моделювання, теоретичних досліджень, оптимізації робочих процесів машин

Практична робота №1

Тема. Дослідження вагомості параметрів робочого процесу екскаватора.
Мета. Визначити найбільш вагомі конструктивні параметри робочого обладнання.

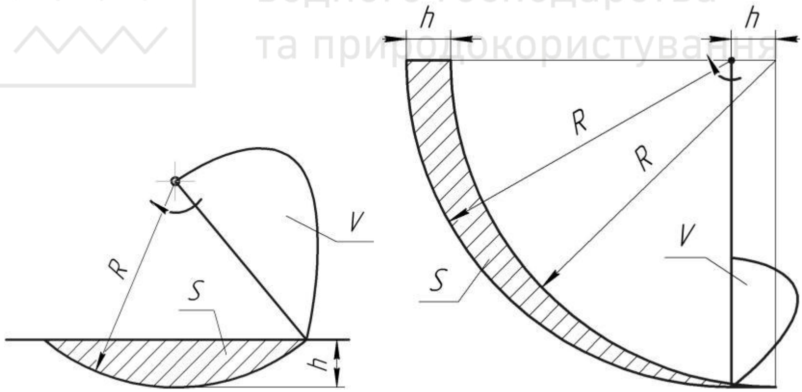
1.1. Теоретичні відомості

Продуктивність екскаватора визначається за залежністю:

$$П = \frac{V \cdot k_н}{T_ц \cdot k_p}, \text{ м}^3\text{/год;}$$

де V – об'єм ковша, м^3; $T_ц$ – час циклу, год; $k_н$, $k_р$ – відповідно, коефіцієнти наповнення ковша та розпушення ґрунту.

Для визначення вагомості конструктивних параметрів робочого обладнання необхідно розглянути схему робочого процесу (рис. 1) прирівнявши об'єм ковша та об'єм ґрунту, що вирізається ковшем ($S{\cdot}B$, B – ширина ковша, м).



а) б)

Рис. 1. Схема процесу копання ковшем екскаватора
а – зворотна лопата; б – пряма лопата

Визначення вагомості параметрів робочого процесу проводять за коефіцієнтом кореляції.

Коефіцієнтом кореляції між двома величинами (x і y) називається відношення коваріації до середніх квадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2}};$$

S_{xy} - емпірична коваріація (коваріаційний момент), надає інформацію про форму та силу (тісноту) зв'язку між величинами:
S_y - середнє квадратичне відхилення величини y (технічної продуктивності);
S_x - середнє квадратичне відхилення величини x (досліджуваний параметр робочого процесу);
y_i – розраховане значення технічної продуктивності або питомої енергоємності при величині x_i;
x_i – значення досліджуваного параметра робочого процесу з визначеного раніше діапазону його зміни (i=1 до n=3..5);
$\bar{x}$, $\bar{y}$ – середні значення, відповідно, величин x та y.

На технічну продуктивність процесу впливають декілька параметрів (*R, h, B*), тому коефіцієнт кореляції розраховують окремо для кожного з них, при цьому значення інших параметрів беруться середніми з діапазону їх зміни.

Чим тісніше розміщаються точки на кореляційному полі навколо прямої лінії, тим більша абсолютна величина коефіцієнта кореляції. Розрізняють відносно високу ступінь кореляції ($|r_{xy}|$=0,7…0,9), очевидну ($|r_{xy}|$=0,5…0,7), помірну ($|r_{xy}|$=0,3…0,5), слабку ($|r_{xy}|$=0,1…0,3). Якщо $r_{xy}=0$, то зв'язок між величинами відсутній.

1.2. Завдання для індивідуальної роботи

Визначити вагомість конструктивних параметри робочого обладнання (*R, h, B*) на продуктивність (табл. 1).

Порядок виконання: вибір вихідних даних, визначення об'єму викопаного ґрунту за схемою процесу, визначення продуктивності при варіації змінних параметрів (*R, h, B*) на 3 рівнях, визначення середнього значення продуктивності, визначення коефіцієнтів кореляції для змінних параметрів (*R, h, B*), побудова гістограми *r= f*(*R, h, B*), висновок про найбільш вагомий параметр.

Таблиця 1

Вихідні дані

№ вар.	Діапазони зміни конструктивних параметрів, м						Схема копання (рис. 1)
	Радіус копан-ня, *R*		Максимальна товщина стружки, *h*		Ширина ков-ша, *B*		
1.	0,33	0,50	0,08	0,13	0,05	0,10	а
2.	0,67	1,00	0,17	0,25	0,10	0,20	а
3.	1,00	1,50	0,25	0,38	0,15	0,30	а
4.	1,33	2,00	0,33	0,50	0,20	0,40	а
5.	1,67	2,50	0,42	0,63	0,25	0,50	а
6.	2,00	3,00	0,50	0,75	0,30	0,60	а
7.	2,33	3,50	0,58	0,88	0,35	0,70	а
8.	2,67	4,00	0,67	1,00	0,40	0,80	а
9.	3,00	4,50	0,75	1,13	0,45	0,90	а
10.	3,33	5,00	0,83	1,25	0,50	1,00	а
11.	3,67	5,50	0,92	1,38	0,55	1,10	б
12.	4,00	6,00	1,00	1,50	0,60	1,20	б
13.	4,33	6,50	1,08	1,63	0,65	1,30	б
14.	4,67	7,00	1,17	1,75	0,70	1,40	б
15.	5,00	7,50	1,25	1,88	0,75	1,50	б
16.	5,33	8,00	1,33	2,00	0,80	1,60	б
17.	5,67	8,50	1,42	2,13	0,85	1,70	б
18.	6,00	9,00	1,50	2,25	0,90	1,80	б
19.	6,33	9,50	1,58	2,38	0,95	1,90	б
20.	6,67	10,00	1,67	2,50	1,00	2,00	б

Практична робота №2

Тема. Моделювання складу робочого середовища для дослідження робочого процесу бульдозера.
Мета. Ознайомитися з принципами застосування теорії подібності.

2.1. Теоретичні відомості

Фізичне моделювання – це моделювання, яке зберігає фізичну природу явищ, а змінює тільки їхній масштаб.

При моделюванні завжди потрібно вибрати певні співвідношення, які дозволяють сформулювати умови переходу від моделі до оригіналу. Такі співвідношення називаються масштабами моделювання. Крім масштабних перетворень важливо знати умови, за яких модель адекватно представляє оригінал. Ці умови формулюються у вигляді критеріїв подібності.

Коефіцієнт подібності – множник пропорційності між величинами характеристик моделі та натури (реальних).

$$k_p = p_н/p_м.$$

де $p_н$ – параметр натури; $p_м$ – параметр моделі.

Критерій подібності – це безрозмірні комбінації фізичних величин, складені за певними правилами й однакові для групи подібних процесів (моделі і натури).

Наприклад, за критерієм Ньютона ($F=m\cdot a=m\cdot l/t^2$):

$$K = \frac{F_н \cdot t_н^2}{m_н \cdot l_н} = \frac{F_м \cdot t_м^2}{m_м \cdot l_м}.$$

Індикатор подібності – відношення критеріїв подібності для натури та моделі.

$$I = \frac{F_н / F_м \cdot t_н^2 / t_м^2}{m_н / m_м \cdot l_н / l_м} = \frac{k_F \cdot k_t^2}{k_m \cdot k_l} = 1.$$

Зусилля різання ґрунту бульдозером (для оригіналу):

$$F_н = kBh;$$

де k - питомий опір різання, Па; B – ширина відвалу, м; h - глибина різання, м.

Моделювання ґрунту досягається в основному піщано-глинистою сумішшю, яка складається з піску та суглинку (табл. 2).

Таблиця 2

Розрахункові характеристики ґрунтів

Характеристики	Тип			
	Пісок	Супісок	Суглинок	Глина
Категорія	I	II	III	IV
k, кПа	70	120	150	250

2.2. Завдання для індивідуальної роботи

Визначити склад двохкомпонентної піщано-глинистої суміші при моделюванні робочого процесу моделі бульдозера на реальному ґрунті з $k_н$= 100 кПа без зміни динаміки роботи.

Таблиця 3

Вихідні дані

№ вар.	Ширина відвалу, B, м		Маса відвалу, m, кг		№ вар.	Ширина відвалу, B, м		Маса відвалу, m, кг	
	ориг.	мод.	ориг.	мод.		ориг.	мод.	ориг.	мод.
1.	3,0	0,3	200	100	11.	2,4	0,4	300	50
2.	2,88	0,3	228	95	12.	2,24	0,4	288	45
3.	2,76	0,3	252	90	13.	2,08	0,4	272	40
4.	2,64	0,3	272	85	14.	1,92	0,4	252	35
5.	2,52	0,3	288	80	15.	1,76	0,4	228	30
6.	2,8	0,35	300	75	16.	1,8	0,45	200	25
7.	2,66	0,35	308	70	17.	1,62	0,45	168	20
8.	2,52	0,35	312	65	18.	1,44	0,45	132	15
9.	2,38	0,35	312	60	19.	1,26	0,45	92	10
10.	2,24	0,35	308	55	20.	1,08	0,45	48	5

Порядок виконання: вибір вихідних даних, запис критеріїв подібності Ньютона з врахуванням опору різання для оригіналу та моделі, запис індикатора подібності, визначення масштабних коефіцієнтів (k_t, k_m, k_l, k_h, k_b), визначення масштабного коефіцієнта питомого опору k_k з індикатора подібності, визначення питомого опору модельованого ґрунту, визначення частин пропорції складу двохкомпонентної піщано-глинистої суміші з системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 k_1 + x_2 k_2 = k_м; \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$

запис результату.

Практична робота №3

Тема. Визначення критеріїв моделі за аналізом розмірностей.
Мета. Ознайомитися з принципами застосування теорії подібності.

3.1. Теоретичні відомості

критерій подібності K_1, який вміщує досліджену величину, повинен бути виражений як функція інших критеріїв $K_2, K_3, ..., K_n$, які відображають різні сторони процесу

$$K_1 = f\left(K_2, K_3, ..., K_n\right).$$

Параметр K_1 є визначальним критерієм. Незалежно від бажання людини розвиток природи здійснюється за законами геометричних прогресій, логарифмів і ймовірних процесів, а логарифмічна залежність найчастіше визначає багато фізичних процесів. Тому результати дослідів після їх обробки можна записати у вигляді степеневої функції

$$K_1 = CK_2^{\alpha_2} K_3^{\alpha_3} K_4^{\alpha_4} ... K_n^{\alpha n},$$

або у вигляді експоненціальної функції

$$\begin{cases} K_1 = K_0\, exp\left(-t/\Theta\right) & \text{- для процесу, що загасає} \\ K_1 = K_0\left[1 - exp\left(-t/\Theta\right)\right] & \text{- для зростаючого процесу,} \end{cases}$$

де: C, α_2, α_3, ..., α_n, - постійні, які отримані експериментально; K_0 – початкове значення критерію K_1 при $t=0$ або кінцеве при $t = \infty$; t – змінний час; Θ – постійна часу процесу, яка залежить від умов його проведення і виражається через критерій подібності.

π-теорема Букінгема. Якщо будь-який процес залежить від n фізичних величин, із яких m – основні величини в одиницях СІ (з незалежними розмінностями, табл. 4), то із вказаних величин можна утворити $\pi=n-m$ безрозмірних критеріїв подібності (для механічних систем m=3).

Після отримання моделі невідомі коефіцієнти визначаються експериментально. Наприклад, для моделі типу $K_1 = AK_2^{\alpha_2}$ це будуть A і α_2. Для цього проводиться експеримент на дослідній установці за допомогою критеріального планування для визначення залежності між критеріями K_1 і K_2. Отримані експериментальні дані представляються графічно у логарифмічних координатах. При цьому всі експериментальні точки знаходяться на одній прямій

$$l_n K_1 = l_n A + \alpha_2 l_n K_2.$$

Показник α_2 визначаємо як тангенс кута нахилу отриманої прямої лінії до осі абсцис. Коефіцієнт A знаходимо для не менше як 3-х значень за залежністю

$$A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{K_{1i}}{K_{2i}^{\alpha_2}},$$

де N – число значень K_1 і K_2.

Таблиця 4

Основні і похідні одиниці системи СІ

Величина	Позна-чення	Одиниця	Розмірність
Довжина	L	метр	м
Маса	M	кілограм	кг
Час	T	секунда	с
Температура	Q	кельвін	К
Площа	L^2	квадратний метр	$м^2$
Об’єм	L^3	кубічний метр	$м^3$
Швидкість	LT^{-1}	метр в секунду	м/с
Прискорення	LT^{-2}	метр на секунд. у кв.	$м/с^2$
Щільність	ML^{-3}	кілограм на куб. м.	$кг/м^3$
Сила	MLT^{-2}	ньютон	Н
Напруження, тиск	$ML^{-1}T^{-2}$	паскаль	Па
Енергія, робота	ML^2T^{-2}	джоуль	Дж
Потужність	ML^2T^3	ват	Вт

Приклад. За допомогою π–теореми отримати критеріальне рівняння (модуль функціонування) при грохоченні щебеню.

Приймаємо, що в матеріалі відсутнє внутрішнє тертя і злипання частинок. Тоді процес грохочення (просіювання кускового матеріалу через сито) буде характеризуватися наступними параметрами: масовою швидкістю просіювання матеріалу через сито q, кг/с; діаметром отворів сита D , м; середнім діаметром кускового матеріалу (щебеню) d, м, ; прискоренням вільного падіння g, м/с^2; щільністю кускового матеріалу ρ, кг/м^3.

Залежність швидкості грохочення (протікання) від інших параметрів можна представити у загальному вигляді

$$q = f\left(D, d, \rho, g\right),$$

або у вигляді степеневої залежності

$$q = AD^{\alpha_1} d^{\alpha_2} \rho^{\alpha_3} g^{\alpha_4},$$

де A – деяка постійна.

Запишемо розмірності всіх параметрів через основні розмірності:
$[q]=L^0M^1T^{-1}$; $[D]=L^1M^0T^0$; $[d]=L^1M^0T^0$; $[\rho]=L^{-3}M^1T^0$; $[g]=L^1M^0T^{-2}$.

Підставимо ці розмірності у рівняння:

$$\left[L^0M^1T^{-1}\right]=A\left[L^1M^0T^0\right]^{\alpha_1}\left[L^1M^0T^0\right]^{\alpha_2}\left[L^{-3}M^1T^0\right]^{\alpha_3}\left[L^1M^0T^{-2}\right]^{\alpha_4}.$$

Порівняємо показники степенів при однакових символах розмірностей і отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases}0=\alpha_1+\alpha_2-3\alpha_3+\alpha_4;\\ 1=0+0+\alpha_3+0;\\ -1=0+0+0-2\alpha_4.\end{cases}$$

У цій системі і з трьох рівнянь маємо чотири невідомих. Будь-які три із них можна виразити через четверту невідому. Отримаємо

$$\alpha_1=\frac{5}{2}-\alpha_2;\quad \alpha_3=1;\quad \alpha_4=1/2.$$

Підставимо значення α_1, α_3, і α_4 у рівняння отримаємо

$$q=AD^{5/2-\alpha_2}d^{\alpha_2}\rho g^{1/2}.$$

У цьому рівнянні на основі π – теореми зв'язок між 5 вихідними величинами (q, D, d, ρ, g) може бути представлений у вигляді узагальненої залежності між двома (5−3=2) безрозмірними комплексами (критеріями грохочення) цих величин:

$$\frac{q}{\rho D^{5/2}g^{1/2}}=A\left(\frac{d}{D}\right)^{\alpha_2},\quad K_1=\frac{q}{\rho D^{5/2}g^{1/2}};\qquad K_2=A\left(\frac{d}{D}\right)^{\alpha_2}.$$

Тоді критеріальне рівняння прийме вигляд

$$K_1=AK_2^{\alpha_2}.$$

На цьому закінчується теоретична частина досліджень.

3.2. Завдання для індивідуальної роботи

Скласти критеріальне рівняння при моделюванні робочих процесів будівельних машин та обладнання.

Порядок виконання: вибір вихідних даних, визначення залежних параметрів процесу, запис розмірностей параметрів процесу через основні розмірності, підстановка отриманих розмірностей у рівняння процесу, розв'язування системи рівнянь складеної за степенями однакових символів розмірностей, отримання рівняння процесу зі степенями, запис критеріального рівняння, визначення числа критеріїв моделювання.

Таблиця 5

Вихідні дані

№ вар.	Параметри робочого процесу для моделювання	
	Тип машини або обладнання	Визначальний критерій
1.	Бульдозер	Продуктивність
2.		Енергоємність
3.	Екскаватор одноківшевий	Продуктивність
4.		Енергоємність
5.	Екскаватор багатоківшевий	Продуктивність
6.		Енергоємність
7.	Скрепер	Продуктивність
8.		Енергоємність
9.	Підйомний кран	Продуктивність
10.		Енергоємність
11.	Конвеєр стрічковий	Продуктивність
12.		Енергоємність
13.	Щокова дробарка	Продуктивність
14.		Енергоємність
15.	Гравітаційний змішувач	Продуктивність
16.		Енергоємність
17.	Трубний млин	Продуктивність
18.		Енергоємність
19.	Розчинонасос	Продуктивність
20.		Енергоємність

Практична робота №4

Тема. Вирішення оптимізаційних задач класичними методами.
Мета. Ознайомитися з принципами деяких класичних методів багатомірної оптимізації.

4.1. Теоретичні відомості

Теорема Ферма – необхідна умова екстремуму – нехай дійсна функція $f(x)$ визначена в околі деякої точки x_0 і має в цій точці похідну. Тоді, якщо в цій точці $f(x)$ має екстремум то $f^{/}(x_0)= 0$.

Якщо цільова функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ має безперервні часткові похідні за своїми аргументами, то якщо прирівняти до нуля перші часткові похідні функції по x_i і вирішити сумісно n рівнянь:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 ,$$

де i=1, 2, ..., n, то знайдемо значення x_i , при яких цільова функція має екстремальні значення.

Щоб встановити буде це значення максимальним або мінімальним, потрібно досліджувати другі похідні функції f від x_i. Якщо друга похідна у тій або іншій точці більша нуля, то у цій точці маємо мінімум функції і навпаки, якщо менша нуля, то маємо максимум. Якщо друга похідна у тій або іншій точці дорівнює нулю $f^{//}(x_i)$= 0, то потрібно аналізувати третю похідну. Якщо третя похідна у цій точці не дорівнює нулю, то у даній точці функція не має ні максимуму, ні мінімуму, а має перегин і т.д.

Приклад. Знайти сторони прямокутника максимальної площі обмеженого описаним колом радіусом r з центром в початку координат.

Застосуємо теорему Ферма. Виражаємо площу прямокутника враховуючи рівняння кола:

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad S = 2x \cdot 2y = 4y\sqrt{r^2 - y^2}\,.$$

Необхідна умова екстремуму $S^{/}$=0,

$$S^{/} = 4\sqrt{r^2 - y^2} - \frac{4y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}} = 0\,.$$

Звідки отримаємо $y = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

Після підстановки y в рівняння кола отримаємо

$$x^2 + \left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2 = r^2 , \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}\,.$$

Тоді, $S = 4xy = 4\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}} = 2r^2$.

4.2. Завдання для індивідуальної роботи

Знайти оптимальне співвідношення конструктивних параметрів робочого обладнання (табл. 6) використовуючи теорему Ферма.

Таблиця 6

№ вар.	Об’єкт оптимізації	Мета оптимізації	Критерії оптимізації	Умова обмеження
1.	Відкритий циліндричний змішувальний барабан	$V \to$ max	d, h	S= const
2.		$S \to$ min	d, h	V= const
3.		$L_ш \to$ min	d, h	V= const
4.		$V \to$ max	d, h	$L_ш$= const
5.	Циліндричний гідробак	$V \to$ max	d, L	S= const
6.		$S \to$ min	d, L	V= const
7.		$L_ш \to$ min	d, L	V= const
8.		$V \to$ max	d, L	$L_ш$= const
9.	Напівциліндричний ківш навантажувача	$V \to$ max	d, B	S= const
10.		$S \to$ min	d, B	V= const
11.		$L_ш \to$ min	d, B	V= const
12.		$V \to$ max	d, B	$L_ш$= const
13.	Чвертьсегментний ківш грейфера	$V \to$ max	d, B	S= const
14.		$S \to$ min	d, B	V= const
15.		$L_ш \to$ min	d, B	V= const
16.		$V \to$ max	d, B	$L_ш$= const
17.	Прямокутна опорна поверхня аутригера	$S \to$ max	a, b	P= const
18.		$P \to$ min	a, b	S= const
19.	Пірамідальний об’єм переповнення ковша екскаватора	$V \to$ max	a, b	P= const
20.		$P \to$ min	a, b	V= const

Позначення в табл. 6:
V − об’єм; S − площа поверхні, $L_ш$ – довжина зварних, B. – ширина, P – периметр, a, b – лінійні розміри профілю, d – діаметр; , h − висота.

Порядок виконання: вибір вихідних даних, побудова розрахункової схеми, запис функціональних залежностей мети та обмеження, вираження одного з параметрів з функції обмеження, підстановка його у функцію мети, спрощення виразу, знаходження похідної за змінним параметром, прирівнювання її до «0», підстановка функції обмеження, знаходження співвідношення між змінними параметрами, запис результату.

Практична робота №5

Тема. Вирішення оптимізаційних задач класичними методами.
Мета. Ознайомитися з принципами застосування класичних методів багатомірної оптимізації.

5.1. Теоретичні відомості

Метод невизначених множників Лагранжа – метод знаходження умовного оптимуму, запропонований італійським математиком Жозефом-Луї Лагранжем. Метод дозволяє звести задачу на відшукання умовного оптимуму до задачі на знаходження безумовного оптимуму.

Нехай потрібно знайти оптимум функції n змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при m умовах $g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Суть методу полягає в тому, що складають допоміжну функцію:

$$F = f + \sum \lambda_m g_m,$$

і вирішують систему $(n+m)$ рівнянь відносно невідомих x_n і λ_m.

Таким чином будуть отримані тільки екстремальні точки цільової функції. Що стосується екстремальних її значень (min, max), то, потрібно дослідити часткові похідні:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0 \\ &g_j\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0 \end{aligned}\right\},$$

де: $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,m$.

Приклад. Знайти сторони прямокутника максимальної площі обмеженого описаним колом радіусом r з центром в початку координат.

Застосуємо метод невизначених множників Лагранжа. Площа прямокутника:

$$S = 2x \cdot 2y = 4xy.$$

Тоді:

$$F = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - r^2).$$

Умови екстремуму:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 4y + 2\lambda x = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 4x + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 = r^2. \end{cases}$$

Звідки λ=–2, $x = y = r\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5.2. Завдання для індивідуальної роботи

Знайти оптимальне співвідношення конструктивних параметрів робочого обладнання (табл. 7) використовуючи метод невизначених множників Лагранжа.

Таблиця 6

№ вар.	Об’єкт оптимізації	Мета оптимізації	Критерії оптимізації	Умови
1.	Пірамідальний об’єм перенаповнення ковша екскаватора	$V\rightarrow$ max	a, b	P= const
2.		$P\rightarrow$ min	a, b	V= const
3.	Напівциліндричний ківш навантажувача	$V\rightarrow$ max	d, B	S= const
4.		$S\rightarrow$ min	d, B	V= const
5.		$L_ш\rightarrow$ min	d, B	V= const
6.		$V\rightarrow$ max	d, B	$L_ш$= const
7.	Чвертьсегментний ківш грейфера	$V\rightarrow$ max	d, B	S= const
8.		$S\rightarrow$ min	d, B	V= const
9.		$L_ш\rightarrow$ min	d, B	V= const
10.		$V\rightarrow$ max	d, B	$L_ш$= const
11.	Циліндричний гідробак	$V\rightarrow$ max	d, L	S= const
12.		$S\rightarrow$ min	d, L	V= const
13.		$L_ш\rightarrow$ min	d, L	V= const
14.		$V\rightarrow$ max	d, L	$L_ш$= const
15.	Прямокутна опорна поверхня аутригера	$S\rightarrow$ max	a, b	P= const
16.		$P\rightarrow$ min	a, b	S= const
17.	Відкритий циліндричний змішувальний барабан	$V\rightarrow$ max	d, h	S= const
18.		$S\rightarrow$ min	d, h	V= const
19.		$L_ш\rightarrow$ min	d, h	V= const
20.		$V\rightarrow$ max	d, h	$L_ш$= const

Позначення в табл. 7:
V − об’єм; S − площа поверхні, $L_ш$ – довжина зварних, $B_.$ – ширина, P – периметр, a, b – лінійні розміри профілю, d – діаметр; , h − висота.

Порядок виконання: вибір вихідних даних, побудова розрахункової схеми, запис функціональних залежностей мети та обмеження, складання допоміжної функції, запис системи рівнянь, знаходження часткових похідних за змінним параметром, розв’язок системи рівнянь, знаходження співвідношення між змінними параметрами, запис результату.

Практична робота №6

Тема. Вирішення оптимізаційних задач методом варіаційного числення

Мета. Ознайомитися з принципами застосування методів варіаційного числення.

6.1. Теоретичні відомості

Для механічних систем часто використовується варіаційне числення, де ключовим є функціонал та інтегральний функціонал.

Функціоналом називається змінна величина F, яка залежить від аргументу x, функції $y(x)$ та її похідних $F=f(x, y, y')$.

Інтеграл від цієї величини називається *інтегральним функціоналом* $I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')dx \cdot$

Основною задачею варіаційного числення є визначення екстремуму функціоналу I за заданих граничних точок (x, y) і (x_1, y_1) – задача Лагранжа. Для того щоб функція $y=f(x)$ давала екстремум функціоналу, вона має задовольняти диференціальному рівнянню Ейлера $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \cdot \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \cdot \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \,.$

У загальному випадку, якщо функція $F=f(x, y, y')$ дійсно вміщує y', рівняння Ейлера є нелінійним диференціальним рівнянням другого порядку і його загальний інтеграл вміщує дві довільні сталі C_1 і

C_2, що визначаються із умов, що крива (екстремаль) проходить крізь задані точки (x, y) і (x_1, y_1).

Для визначення характеру екстремуму служить умова Лежандра, при $F''_{y'y'} \geq 0$ має місце мінімум, а при $F''_{y'y'} \leq 0$ – максимум.

Інтегрування рівняння Ейлера спрощується для ряду окремих типів функціоналів.

1 – функціонал не залежить явно від y, тобто $F= f(x, y')$, тоді інтеграл Ейлера набуває вигляду: $\frac{d}{dx}Fy' = 0$.

Отже, отримуємо $F_{y'} = C$, тобто маємо диференціальне рівняння першого порядку.

2 – функціонал не залежить явно від x, тобто $F= f(y, y')$, тоді рівняння Ейлера: $F - y'F_{y'} = C$.

Це також диференціальне рівняння першого порядку.

3 – функціонал залежить лише від y', тобто $F=f(y')$. У цьому випадку $F_{y'} = C$, і, отже: $y= C_1 \cdot x + C_2$, тобто екстремум може досягатись лише на прямих лініях.

Передбачалось, що під час досліджень функціоналу граничні точки задано. Якщо обидві граничні точки можуть переміщуватись по деяких кривих $y_0= \varphi_0(x_0)$; $y_1= \varphi_1(x_1)$, то шукана функція $y=f(x)$ задовольняє таким умовам трансверсальності, які дають напрям екстремальній лінії:

$$[F + (\varphi_0' - y')F_{y'}]_{x=x_0} = 0; \quad [F + (\varphi_1' - y')F_{y'}]_{x=x_1} = 0.$$

Природно, якщо один із кінців закріплений, то буде виконуватись лише одна із умов.

Якщо гранична точка *(x, y(x))* може переміщуватись лише вертикальною прямою, то замість виходить інша умова: $F_{y'}\Big|_{x=x_1} = 0$.

Таким чином, умови трансверсальності можуть значно спростити розв'язання варіаційних задач з нерухомими кінцями.

Приклад. Типовою э задача про максимальну швидкодію (брахістохрону). Знайти криву, розміщену у вертикальній площині, що сполучає дві задані точки $A(a; y_a)$ і $B(b; y_b)$, які не лежать на одній вертикальній прямій, і таку, що матеріальна точка, рухаючись по цій кривій під дією сили тяжіння з точки A без початкової швидкості досягне точки B за найменший проміжок часу (рис.6.1).

Тобто серед неперервно диференційовних функцій $y(x)$ знайти таку, яка доставляє мінімум функціоналу $I=\int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}dx$ при граничних умовах $y(a)=y_a;\ y(b)=y_b$.

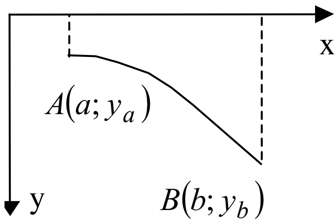


Рис. 6.1

6.2. Завдання для індивідуальної роботи

Дослідити на екстремум функціонал (вид і точка екстремуму)

1. $I=\int_{-1}^{0}\left(12y-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=1;\ y(0)=0.$

2. $I=\int_{0}^{1}\left(y'+2(y')^2\right)dx;$ $y(0)=3;\ y(1)=1.$

3. $I=\int_{0}^{1}\left(x+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2.$

4. $I=\int_{0}^{1}\left((y')^2-y^2-y\right)dx;$ $y(0)=0;\ y(1)=-1.$

5. $I=\int_{1}^{2}\left((y')^2+2yy'+y^2\right)dx;$ $y(1)=1;\ y(2)=0.$

6. $I=\int_{1}^{e}\left(x(y')^2+y'\right)dx;$ $y(1)=0;\ y(e)=1.$

7. $I=\int_{0}^{2\pi}\left((y')^2-y^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(2\pi)=1.$

8. $I=\int_{1}^{2}y'\left(1+x^2y'\right)dx;$ $y(1)=3;\ y(2)=5.$

9. $I=\int_{-1}^{1}\left(2xy'-(y')^2\right)dx;$ $y(-1)=0;\ y(1)=\frac{1}{2}.$

10. $I=\int_{0}^{1}\left(y+2y'+(y')^2\right)dx;$ $y(0)=1;\ y(1)=2.$

11. $I=\int_0^1 \left(x+xy'\right)dx;$

$y(0)=0;\ y(1)=0.$

12. $I=\int_0^1 \left(xy'-\left(y'\right)^2\right)dx;$

$y(0)=1;\ y(1)=\frac{1}{4}.$

13. $I=\int_{-1}^2 \frac{\sqrt{1+\left(y'\right)^2}}{y}dx;$

$y(-1)=1;\ y(2)=4.$

14. $I=\int_0^1 \frac{dx}{\left(y'\right)^2};$

$y(0)=0;\ y(1)=1.$

15. $I=\int_1^2 \left(x^2\left(y'\right)^2+12x^2\right)dx;$

$y(1)=1;\ y(2)=8.$

16. $I=\int_0^1 \left(y^2+2yy'\right)dx;$

$y(0)=0;\ y(1)=0.$

17. $I=\int_0^1 \left(y+y'\right)dx;$

$y(0)=0;\ y(1)=1.$

18. $I=\int_0^2 \left(xy'+\left(y'\right)^2\right)dx;$

$y(0)=1;\ y(2)=0.$

19. $I=\int_0^1 \left(y+y^2-2y^2y'\right)dx;$

$y(0)=1;\ y(1)=2.$

20. $I=\int_1^2 \left(x^2\left(y'\right)^2+2x\right)dx;$

$y(1)=1;\ y(2)=8.$

Практична робота №7

Тема. Вирішення оптимізаційних задач методами математичного програмування

Мета. Отримати практичні навички використання методу випадкового пошуку, чисельних методів спуску та нульового порядку (самостійно)

7.1. Теоретичні відомості

Метод випадкового пошуку застосовується для знаходження мінімуму (максимуму) довільної функції $y=f(x)$, що задана в будь-якій допустимій області D.

Розглянемо реалізацію даного методу для функції однієї змінної. Нехай довільна функція $f(x)$ задана на проміжку $[a, b]$. За допомогою генератора випадкових чисел, рівномірно розподілених на проміжку [0, 1], будується послідовність випадкових чисел $x\{k\}$, $k= 1, ..., n$, рівномірно розподілених на проміжку $[a, b]$.

Обчислюються та порівнюються між собою значення функції $f(x)$ в точках $x\{k\}$. Мінімальне з них приймається за оцінку мінімуму функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$.

Якщо n прямує до нескінченності, отримана оцінка по ймовірності збігається до глобального мінімуму функції, що розглядається.

При розв'язуванні задачі максимізації функції $f(x)$ необхідно замінити її на функцію $–f(x)$.

Метод випадкового пошуку ефективний із використанням ЕОМ для розв'язування задач оптимізації. Випадкові числа отримані на ЕОМ називаються псевдовипадковими числами.

Для рішення задач діють наступним чином:

– рівномірно розбивають область значень x на $(n–1)$ частин, отримують значення $x_1, x_2, ..., x_n$;

– генерують випадкові числа $\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_{n-1}$ від 0 до 1.

– визначають модельні значення $x_1^{мод}=\zeta_1 x_1$, $x_2^{мод}= \zeta_2 x_2$, ..., $x_{n-1}^{мод}= \zeta_{n-1} x_{n-1}$,

– визначають значення функції для $x_1^{мод}, x_2^{мод}, \ldots, x_n^{мод}$.

Проводять розрахунки певну кількість разів.

Серед множини значень функції знаходять рішення $x_1^{мод}, x_2^{мод}, \ldots, x_n^{мод}$, за якими функція приймає мінімальне значення.

Числові (пошукові) методи відіграють істотну роль під час розв'язання багатьох прикладних задач, що вирішуються у виробничих системах. Це обумовлено рядом причин, серед яких головне місце займає різноманітність видів цільових функцій і обмежень, а також форм їхнього завдання.

Допустимо, що розглядається задача безумовної мінімізації цільової функції $F(x)$. Сутність усіх методів розв'язання цієї задачі складається в побудові послідовності точок $x_j^{(0)}$, $x_j^{(1)}$, ..., $x_j^{(k)}$, ..., що монотонно зменшують значення цільової функції, тобто

$$F\left(x_j^{(0)}\right) \geq F\left(x_j^{(1)}\right) \geq F\left(x_j^{(2)}\right) \geq \ldots \geq F\left(x_j^{(k)}\right) \geq \ldots$$

Такі методи називають ***методами спуску*** (підйому в процесі максимізації цільової функції). Їхньою найважливішою характеристикою є збіжність, що полягає в тому, що в процесі збільшення числа ітерацій послідовність $x_j^{(0)}$, $x_j^{(1)}$, ..., $x_j^{(k)}$, ..., збігається до точки глобального (локального) мінімуму.

Використання всіх методів спуску зводиться до наступної схеми.

Нехай на k-й ітерації (k-ому кроці) є точка $x_j^{(k)}$. Тоді вибирають напрямок спуску – одиничний вектор $l^{(k)}$, що визначає цей напрямок, а також довжину кроку $a_k > 0$ уздовж цього напрямку. Наступну точку обчислюють за формулою:

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + a_k l^{(k)},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Різні методи спуску відрізняються один від одного підходом до вибору довжини кроку a_k (якщо $a_k = a$ спуск здійснюється з постійним кроком) і вектора $l^{(k)}$. Усі методи спуску можна поділити на три групи в залежності від того, які характеристики цільової функції $F(x)$ використовуються для визначення a_k і $l^{(k)}$. До першої групи відносять методи, що вимагають тільки обчислення значень цільової функції. Ці методи називаються методами нульового порядку. Методи першого порядку вимагають обчислення цільової функції і її перших похідних. Методи другого порядку припускають дослідження і других похідних.

За допомогою методів нульового порядку можна вирішувати задачі більш широкого класу, ніж за допомогою методів першого і другого порядку. Зокрема, на їхній основі можуть мінімізуватися недиференційовані функції, що задаються таблично чи алгоритмічно.

Метод нульового порядку знайшов широке використання в автоматизованих системах керування як метод координатного спуску. Відповідно до цього методу напрямок спуску вибирають паралельно координатним осям. Спочатку роблять спуск уздовж осі x_1, потім – уздовж осі x_2, і т.д. аж до осі x_n.

Позначимо через l_i вектор, у якого всі компоненти крім i-го є нульовими. Нехай $x_j^{(0)}$ – початкова точка і a – довжина кроку. Обчислюємо значення функції $F(x)$ за формулою $x_j = x_j^{(0)} + al_1$, і перевіряємо виконання нерівності

$$F\left(x_j^{(0)} + al_2\right) < F\left(x_j^{(0)}\right),$$

яка може бути представленою та іншим чином

$$F\left(x_1^{(0)} + a, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) < F\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right).$$

Якщо умова виконується, тобто значення цільової функції зменшилося, то вважають крок успішним і приймаємо

$$x_j^{(1)} = x_j^{(0)} + al_1 = \left(x_1^{(0)} + a, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right).$$

Якщо умова не виконується, то здійснюємо крок у протилежному напряму, тобто перевіряємо умову $F\left(x_j^{(0)} - al_1\right) < F\left(x_j^{(0)}\right)$.

У випадку виконання останньої умови вважають, що

$$x_j^{(1)} = x_j^{(1)} - al_1 = \left(x_1^{(0)} - a, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right).$$

Якщо ж обидві умови не виконуються, то вважають $x_j^{(1)} = x_j^{(2)}$.

Другий крок виконуємо аналогічним чином, але вздовж осі x_2. У результаті перегляду всіх n координатних осей буде визначена точка $x_j^{(k)}$. На цьому завершується перший цикл перегляду змінних (перша ітерація). Якщо на кожнім кроці жодна з умов не виконувалася, то варто зменшити довжину кроку і здійснити наступну ітерацію за новим значенням довжини кроку.

Звичайно ітераційний процес продовжують доти, поки не буде виконана умова

$$\left|F\left(x_j^{(k+1)}\right) - F\left(x_j^{(k)}\right)\right| \le \varepsilon,$$

де ε – додатне число, що характеризує точність розв’язання, величина якого задається на початку розрахунків.

Необхідно відзначити, що ознакою завершення розрахунків може бути не лише вказана умова. У тому випадку, якщо по змісту розв'язуваної задачі змінювати довжину кроку a не можна, то ознакою зупинки на деякому циклі перегляду може бути і умова $x_j^{(n)} = x_j^{(0)}$.

7.2. Завдання для індивідуальної роботи

Знайти максимальне значення функції двох змінних. При генеруванні випадкових чисел (метод випадкового пошуку) можна використати табл. 7.1. $x \in [0, 5]$, $y \in [2, 7]$, $n=10$.

Варіант завдання вибирається за порядковим номером у списку групи.

Таблиця 7.1

Варіанти завдань

№ вар.	Функціональна залежність	№ вар.	Функціональна залежність
1.	$f(x,y)=e^{x^2}+y+x^2$	11.	$f(x,y)=e^{x+y}+x^2+y^2$
2.	$f(x,y)=e^{y^2-x}+e^x$	12.	$f(x,y)=x^2+e^y-3y$
3.	$f(x,y)=e^{-x}+x^2+y^2$	13.	$f(x,y)=e^y+x^2+y^2$
4.	$f(x,y)=e^{x^2-y}+e^y$	14.	$f(x,y)=e^{-x}+y^2+2x$
5.	$f(x,y)=e^x+y^2-2x$	15.	$f(x,y)=e^{-y}+x^2+y^2$
6.	$f(x,y)=y^2+e^x-3x$	16.	$f(x,y)=e^{-x-y}+x^2+y^2$
7.	$f(x,y)=e^{x-y}+x^2+y^2$	17.	$f(x,y)=y^2+e^{-x}+3x$
8.	$f(x,y)=e^x+x^2+y^2$	18.	$f(x,y)=e^y+x^2-2y$
9.	$f(x,y)=e^{y^2-x}+x^2$	19.	$f(x,y)=x^2+e^{-y}+3y$
10.	$f(x,y)=e^{-y}+x^2+y^2$	20.	$f(x,y)=e^{-y}+x^2+2y$

Таблиця 7.2

Значення випадкових чисел в різних точках

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,751	0,871	0,646	0,522	0,189	0,186	0,500	0,667	0,406	0,221
2	0,539	0,406	0,714	0,321	0,316	0,725	0,082	0,050	0,804	0,342
3	0,277	0,340	0,401	0,697	0,218	0,495	0,659	0,719	0,814	0,905
4	0,060	0,835	0,453	0,898	0,995	0,857	0,131	0,642	0,448	0,747
5	0,391	0,261	0,815	0,770	0,692	0,178	0,999	0,442	0,082	0,790
6	0,483	0,813	0,079	0,461	0,048	0,102	0,544	0,402	0,142	0,609
7	0,942	0,518	0,594	0,070	0,705	0,761	0,379	0,231	0,049	0,498
8	0,495	0,298	0,343	0,626	0,572	0,892	0,649	0,438	0,211	0,767
9	0,102	0,048	0,594	0,709	0,430	0,875	0,706	0,406	0,100	0,828
10	0,330	0,655	0,819	0,607	0,591	0,036	0,920	0,147	0,107	0,776
11	0,038	0,751	0,201	0,690	0,152	0,853	0,567	0,483	0,352	0,722
12	0,418	0,925	0,519	0,511	0,312	0,372	0,319	0,132	0,682	0,692
13	0,110	0,509	0,359	0,091	0,489	0,918	0,462	0,652	0,760	0,020
14	0,118	0,136	0,883	0,660	0,897	0,944	0,065	0,800	0,328	0,227
15	0,991	0,124	0,573	0,391	0,841	0,575	0,746	0,265	0,684	0,781

продовження табл. 7.2

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
16	0,938	0,569	0,408	0,023	0,464	0,362	0,118	0,364	0,956	0,253
17	0,971	0,028	0,877	0,251	0,591	0,098	0,724	0,389	0,819	0,680
18	0,610	0,476	0,416	0,679	0,504	0,116	0,218	0,220	0,599	0,724
19	0,372	0,212	0,154	0,407	0,261	0,336	0,983	0,369	0,218	0,780
20	0,800	0,181	0,917	0,410	0,343	0,013	0,027	0,041	0,702	0,798

Рекомендована література

1. Кравець С.В., Лук'янчук О.П., Тимейчук О.Ю. Дослідження робочих процесів машин і методи оптимізації: Навч.посіб. -Рівне: НУВГП, 2011. - 239с.
2. Інформаційні системи та математичні методи наукових досліджень. Навч. посіб./ О.Ю. Тимейчук, В.М. Кузьменко, Т.Б. Тимейчук – Рівне: НУВГП, 2011.- 118 с.
3. Сухарєв Е.А. Методы моделирования и оптимизации механических систем машин и оборудования: Учеб. пособие. – Ровно: НУВХП, 2008, – 194 с.
4. Кочкарьов Д.В. Інформаційні системи та математичні методи в наукових дослідженнях. - Навч. посібник.-Рівне:НУВГП, 2010. - 75с.-