

УДК 624.012:539.4

**Кундрат А. М., к. ф.-м. н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

## **ПРУЖНИЙ МАСИВ ІЗ СИСТЕМОЮ НЕРОЗТЯЖНИХ КОМПЛАНАРНИХ ПІДСИЛЕНЬ**

**Розвинуто методику дослідження крайових задач поздовжнього зсуву пружного простору з системою взаємонерухомих стрічкових підсилень. Числово-аналітичні розв'язки задач отримано для однорідного поля напружень на безмежності.**

**Ключові слова:** пружний масив, підсилення, поздовжній зсув, коефіцієнт інтенсивності.

Сучасні технології високоефективного землекористування передбачають моніторинг стану земель і при потребі застосування природоохоронних заходів. Для забудованих територій при укріпленні насипів, відкосів, териконів, берегів, ерозійного захисту, протизсувних та інших робіт застосовують армуючі елементи, на які припадає основне навантаження і які одночасно є концентраторами напружень в земляному масиві. Значне підвищення міцності та жорсткості таких укріплень одночасно супроводжується збільшенням концентрації напружень, яка потребує окремого дослідження. Напружено-деформований стан суттєво залежить від їх взаємного розташування та взаємодії між собою. Задачі такого класу, як правило, досліджують так, що забезпечується локальна рівновага кожного підсилення, а свобода їх взаємного переміщення обмежується лише матеріалом масиву. Такий підхід, цілком виправданий для цілей природокористування, потребує коригування стосовно задач керованого армування укріплюваних конструкцій, коли елементи підсилень зв'язуються у єдиний каркас.

Дослідження напружено-деформованого стану масивів з підкріпленнями особливо актуальні при оцінці міцністних властивостей композицій, для яких жорсткість матриці значно менша від жорсткості армувальних елементів та необхідне для побудови математичних моделей механічного стану композиційних та армованих матеріалів [1]. Такі задачі виникають і при вивченні підкріплювальної дії включень [2, 3], при дослідженні механічного з'єднання волокна та матриці у армованому матеріалі [4]. Використання композитів із плоским армуванням дала можливість економити до 45% матеріалу порівняно з суто однорідними конструкціями [5]. Постановки, методи розв'язування і

розв'язки деяких задач цього класу та результати досліджень подано в роботах за участю автора [6, 7].

**В композиціях** з підсиленнями підвищена жорсткість поєднується із необхідним рівнем міцності, що зумовлює їх вдале використання у низці галузей виробництва та природокористування [5, 6]. У попередніх дослідженнях для опису таких задач побудована механіко-математична модель тіла із включеннями [6, 7], завдяки якій можливо отримати картину напружено-деформованого стану конструкції для різної конфігурації розміщень підсилень та їх кількості.

**Варіювання геометричними** та силовими характеристиками підсилень та пружного тіла дає змогу змінювати сукупні характеристики в досить широкому діапазоні, задовольняючи експлуатаційні та технологічні потреби. Отримати аналітичні розв'язки таких задач у двох чи трьох вимірній постановці досить важко з огляду на нелінійність математичних моделей. Для урахування особливостей таких задач і можливого виявлення нових аспектів поведінки об'єктів дослідження скористалися числовим методом механічних квадратур. У попередніх роботах побудовано верифіковану модель дослідження пружного тіла з включеннями в умовах поздовжнього зсуву. Верифікація здійснювалась шляхом ідентифікації низки результатів одержаних числовим методом із результатами власних [6, 7] та інших [8] авторів аналітичних досліджень.

Метою даної роботи є використання верифікованої моделі для розвитку та уточнення методів дослідження масивів з підсиленнями і створення передумов розроблення нових технічних та проектних рішень, зокрема в природоохоронних системах.

**Розглянемо пружний простір**  $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , що містить п'ять компланарних стрічкових підсилень однакової ширини  $2l$  (рис. 1), геометричні центри яких  $O_k(0, y_k^0)$ ,  $y_k^0 = (k-3)d$ ,  $k = \overline{1, 5}$  розміщені по осі ординат на відстані  $d$  один від одного. Підсилення моделюємо контурами, вздовж яких розподілені об'ємні сили, що діють по осі  $Oz$ , а також приймаємо жорсткими, ідеально зчепленими з матрицею та зв'язаними в єдиний каркас. Композиція зазнає поздовжнього зсуву стосовно підсилень, який спричиняється зусиллями на безмежності. Разом зі сформульованою задачею розглядали класичний випадок незв'язаних стрічок без заданих взаємних зміщень, оскільки такий аналіз у літературі відсутній.

Оцінка напружено-деформованого стану такої композиції за умов поздовжнього зсуву згідно моделі [7] приводиться до розв'язання на-

ступної крайової задачі теорії пружності. Рівняння рівноваги пружного масиву при відсутності масових зусиль

$$\mu \nabla^2 w(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus L, \quad (1)$$

де  $\mu$  – модуль зсуву матеріалу матриці;  $w(x, y)$  –  $z$ -компонента вектора переміщення;  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  – оператор Лапласа,

$L = \bigcup_{k=1}^5 L_k$  – сумарна величина контурів підсилень.

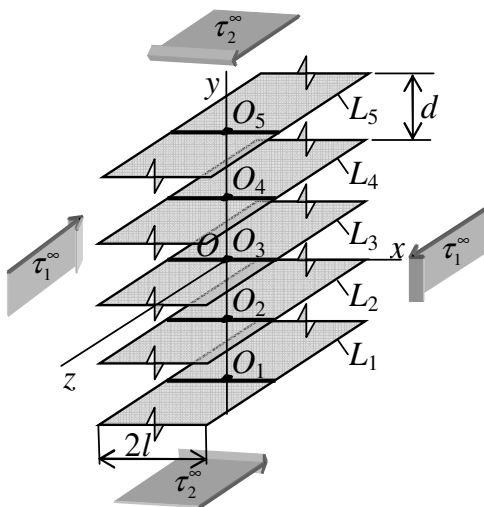


Рис. 1

Умови недеформівності кожного підкріплення

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in L_k, \quad k = \overline{1, 5}. \quad (2)$$

Напруження на безмежності

$$\mu \frac{\partial w}{\partial x} = \tau_1^\infty, \quad \mu \frac{\partial w}{\partial y} = \tau_2^\infty, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Умови зв'язаності системи підсилень між собою

$$\int_{o_1}^{o_k} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} dx = 0, \quad k = \overline{2, 5}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Трьохмірні відхилення від антиплоскої деформації в місцях зв'язаності (центри стрічок) в даній задачі не досліджуємо, тобто вважаємо, що стрічки з'єднанні за межами системи в напрямку осі  $Oz$ .

Глобальна рівновага системи

$$\sum_{i=1}^5 \int_{-l}^l [\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi = 0. \quad (5)$$

Тут  $[\tau_{yz}] = \mu[\partial w / \partial y]$  – стрибок напружень на підсиленні.

На підставі фундаментального розв'язку рівняння Лапласа (1), отримали інтегральне подання переміщення стосовно невідомих функцій стрибків напружень  $[\tau_{yz}]_i$

$$w(x, y) = w^0(x, y) + \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{i=1}^5 \int_{-l}^l \rho[\tau_{yz}]_i(\xi) d\xi, \quad \xi \in L_i, \quad (6)$$

де  $\rho = \ln \sqrt{(\xi - x)^2 + ((i-3)d)^2}$ ;  $w^0(x, y) = (\tau_1^\infty / \mu)x + (\tau_2^\infty / \mu)y$  – відома функція основного стану для однорідного масиву без підкріплень (визначена з точністю до сталої).

Враховуючи умови недеформівності (2) та симетрію композиції

$$[\tau_{yz}]_{N+1-k}(x) = -[\tau_{yz}]_k(-x), \quad x \in (-l, l), \quad k = \overline{1, 5},$$

отримуємо систему трьох сингулярних інтегральних рівнянь стосовно стрибків напружень на крайніх верхніх підсиленнях ( $k = \overline{3, 5}$ )

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \left\{ \left( \frac{\xi + x}{(\xi + x)^2 + (2d)^2} + \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (2d)^2} \right) [\tau_{yz}]_5(\xi) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\xi + x}{(\xi + x)^2 + (d)^2} + \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (d)^2} \right) [\tau_{yz}]_4(\xi) + \frac{[\tau_{yz}]_3(\xi)}{\xi - x} \right\} d\xi = \tau_1^\infty, \\ & x \in L_3, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \left\{ \left( \frac{\xi + x}{(\xi + x)^2 + (3d)^2} + \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (3d)^2} \right) [\tau_{yz}]_5(\xi) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{\xi + x}{(\xi + x)^2 + (2d)^2} + \frac{1}{\xi - x} \right) [\tau_{yz} ]_4(\xi) + \frac{[\tau_{yz} ]_3(\xi)}{(\xi - x)^2 + d^2} \Big\} d\xi = \tau_1^\infty, \\
 & \qquad \qquad \qquad x \in L_4 \\
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \left\{ \left( \frac{\xi + x}{(\xi + x)^2 + (4d)^2} + \frac{1}{\xi - x} \right) [\tau_{yz} ]_5(\xi) + \left( \frac{\xi + x}{(\xi + x)^2 + (3d)^2} + \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + d^2} \right) [\tau_{yz} ]_4(\xi) + \frac{(\xi - x)[\tau_{yz} ]_3(\xi)}{(\xi - x)^2 + (2d)^2} \right\} d\xi = \tau_1^\infty, \\
 & \qquad \qquad \qquad x \in L_5. \tag{7}
 \end{aligned}$$

Додаткові умови для зв'язаних підсилень полягають у відсутності взаємних переміщень стрічок відносно центрального (4) та рівнянні глобальної рівноваги, яке тут співпадає з умовою локальної рівноваги (5) центрального підкріплення ( $k = 3$ ):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \left\{ \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + d^2}}{\sqrt{\xi^2 + (3d)^2}} [\tau_{yz} ]_5(\xi) + \ln \frac{|\xi|}{\sqrt{\xi^2 + (2d)^2}} [\tau_{yz} ]_4(\xi) + \right. \\
 & \left. + \ln \frac{\sqrt{\xi^2 + d^2}}{|\xi|} [\tau_{yz} ]_3(\xi) \right\} d\xi = -\tau_2^\infty d, \\
 & \qquad \qquad \qquad \int_{-l}^l [\tau_{yz} ]_3(\xi) d\xi = 0. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Інтегральне зображення для переміщень (6) розглядуваної задачі матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
 \mu w(x, y) = & \tau_1^\infty x + \tau_2^\infty y + \frac{1}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \ln \frac{(\xi - x)^2 + (2d - y)^2}{(\xi + x)^2 + (2d + y)^2} [\tau_{yz} ]_5(\xi) + \right. \\
 & \left. + \ln \frac{(\xi - x)^2 + (d - y)^2}{(\xi + x)^2 + (d + y)^2} [\tau_{yz} ]_4(\xi) + \ln((\xi - x)^2 + y^2) [\tau_{yz} ]_3(\xi) \right\} d\xi. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Крайову задачу зведено до систем сингулярних інтегральних рівнянь (7) з умовами єдиності розв'язку (8). Її розв'язку будували чисельно методом механічних квадратур при симетричному чи антисимет-

ричному навантаженнях.

Розглянемо зсув простору паралельно до площини  $yOz$  симетричним однорідним полем напружень  $\tau_1^\infty \neq 0, \tau_2^\infty = 0$ . В цьому випадку зв'язаність стрічок вочевидь не впливає на розв'язок задачі.

Досліджували розподіл стрибків напружень по ширині трьох верхніх підсилень (рис. 2) для далеко ( $\lambda = 0,5$  – пунктирні лінії) та близько ( $\lambda = 5$  – суцільні лінії) рівновіддалено розташованих стрічок.

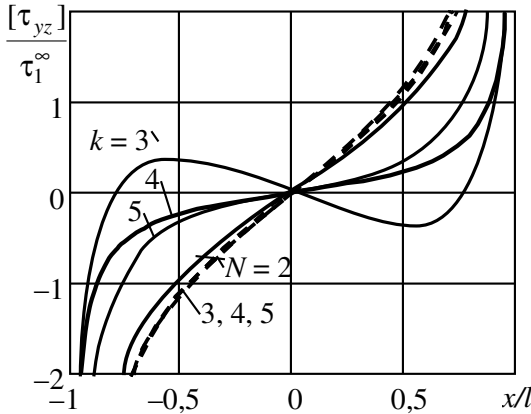


Рис. 2

У випадку далекого розташування підкріплення стрибок напружень по ширині стрічки змінює знак лише в геометричному центрі кожного, а при близькому розміщенні на центральному підкріпленні відбувається зміна знаку ще у двох точках.

Результати розрахунків порівнюємо з отриманими для системи з двох підсилень. Схеми розміщення порівнюваних систем показані на рис. 3.

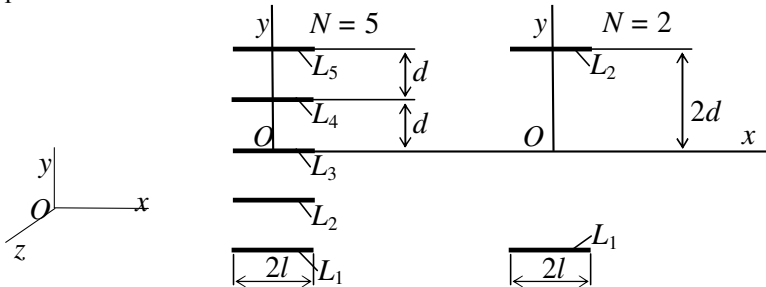


Рис. 3

Зі збільшенням відстані між підсиленнями коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) зростає (рис. 4) і в системі п'яти у вершинах крайніх стрічок порівняно з внутрішніми завжди більший. В системі з двох стрічок ( $N = 2$ ) інтенсивність напружень у вершинах більша проти максимальних в системі п'яти, наявність додаткової арматури в цьому разі розвантажує композицію. Отримані значення КІН узгоджуються з результатами, отриманими в працях [6, 7].

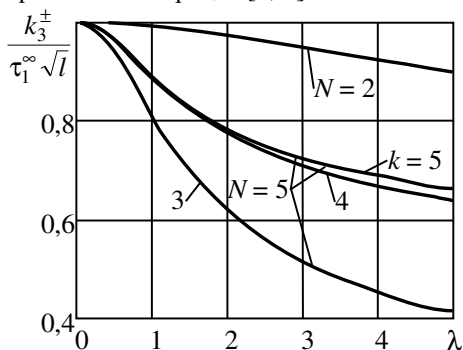


Рис. 4

На рис. 5 подано переміщення точок пружного масиву при  $\lambda = 5$ .

У випадку зсуву масиву паралельно до площини  $xz$  ( $\tau_1^\infty = 0, \tau_2^\infty \neq 0$ ), отримуємо систему однорідних інтегральних рівнянь з неоднорідними додатковими умовами для нерухомих підсилень. Стрибки напружень по ширині трьох верхніх підсилень для далеко ( $\lambda = 0,5$  – пунктирні лінії) та близько розташованих стрічок ( $\lambda = 5$  – суцільні лінії) показані на рис. 6.

Зі збільшенням взаємної відстані між зв'язаними підкріпленнями КІН зростає (рис. 7) і у вершинах крайніх стрічок порівняно з внутрішніми завжди більший.

На рис. 8 зображено головний вектор напружень, який найбільший на крайньому ( $k = 5$ ) в системі з 5-ти підсилень. Для центрального він закономірно рівний нулю.

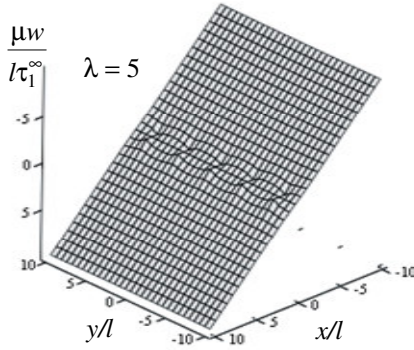


Рис. 5.

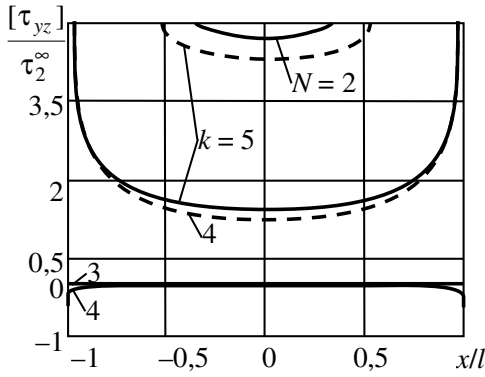


Рис. 6

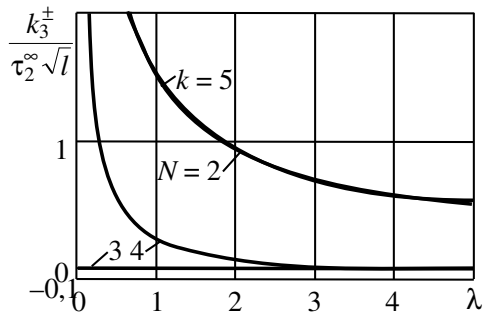


Рис. 7



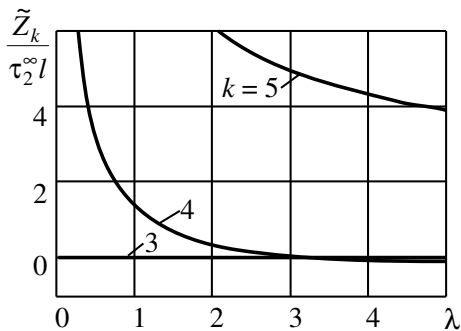


Рис. 8

На рис. 9 подано переміщення точок пружного масиву на площині  $xOy$  при  $\lambda = 5$ . Збурення породжене таким симетричним навантаженням є більш істотним проти попереднього антисиметричного, яке чітко помітно навіть на відстані подвійного підсилення від осі ординат.

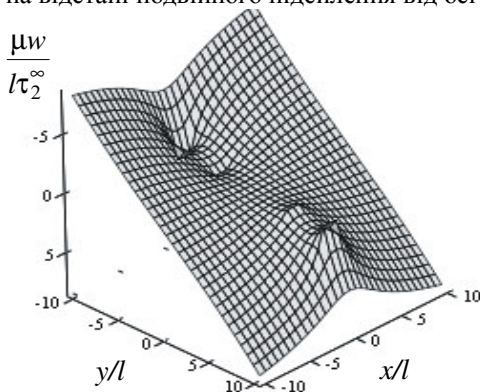


Рис. 9

Для незв'язаних підкріплень внаслідок однорідності додаткових умов локальної рівноваги

$$\int_{-l_k}^{l_k} [\tau_{y_k z}] (\xi) d\xi + Z_k = 0, \quad k = \overline{1, 5}$$

задача про збурення має очікуваний тривіальний розв'язок

$$[\tau_{yz}]_k(x, y) = 0, \quad (x, y) \in L_k.$$

Стрічки отримують переміщення:

$$w(x, (k-3)d) = w^0(x, (k-3)d) = \frac{\tau^{\infty}}{\mu} (k-3)d, \quad x \in (-l, l),$$

$$k = 1, 5.$$

**Незмінною лишається** принципова відмінність картини напружено-деформованого стану матриці зі з'єднаною стрічковою арматурою в спільний каркас порівняно з випадком розмежованого армування. У разі симетричного зсуву на безмежності перпендикулярно до площини розташування стрічок розподіл напружень поблизу паралельних незсунутих підсилень подібний до випадку ізольованого прямолінійного включення з незначною кількісною поправкою, яка зменшує КІН при зближенні підкріплень.

При несиметричному зсуві в площинах розташування стрічок зв'язаність армування якісно впливає на розв'язок задачі. Рухомі підсилення не вносять збурення в однорідне поле напружень, в той час як з'єднані елементи спричиняють значну концентрацію напружень, яка істотно зростає при взаємному віддаленні підсилень.

У результаті виконаних досліджень розширюються можливості моніторингу та прогнозування підкріплюваних об'єктів, раціонального використання забудованих територій масиви яких армовані зв'язаними в єдиний каркас підсиленнями та можливістю застосування нових композитів в природоохоронних заходах.

1. Механика композитов. В 12 т. / Под общей ред. А. Н. Гузя. – Киев : Наук. думка, 1993 – (Т. 7: Концентрация напряжений / А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко и др. – Киев : А. С. К., 1998. – 387 с.).
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М. : Наука, 1982. – 344 с.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М. : Наука, 1974. – 640 с.
4. Александров С. Е., Гольдштейн Р. В. Выдергивание жесткого волокна из упругопластической матрицы // Прикл. математика и механика. – 2000. – Т. 64, № 1. – С. 160–166.
5. Клименко Ф. Е. Сталебетонные конструкции с внешним полосовым армированием – К. : Будівельник, 1984. – 85 с.
6. Shatskyi I. P., Kundrat A. M. Longitudinal shear of a body with mutually immobile rigid collinear inclusions // Material Science. – 2004. – V. 40, № 3. – P. 55–59.
7. Шацький І. П., Кундрат А. М. Антиплоска деформація пружного простору зі зв'язаними жорсткими стрічковими включеннями // Доп. НАН України. – 2004. – № 11. – С. 55–60.
8. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.

Рецензент: д.т.н., проф. Трач В. М. (НУВГП)

---

**Kundrat A. M., Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

### **ELASTIC ARRAY WITH THE SYSTEM OF INEXTENSIBLE COPLANAR REINFORCEMENTS**

The method of research of boundary-value problems to the longitudinal shear of elastic space with the system reciprocally unmoved ribbon-like reinforcements are developed. Numerical-analytical solutions of the problem are obtained for by the homogeneous field of stress at infinity. *Keywords:* elastic array, reinforcement, longitudinal shear, intensity of factors.

---

**Кундрат А. М., к.ф.-м.н., доцент** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

### **УПРУГИЙ МАССИВ С СИСТЕМОЙ НЕРАСТЯЖИМЫХ КОМПЛАНАРНЫХ УСИЛЕНИЙ**

Развито методику исследования краевых задач продольного сдвига упругого пространства с системой взаимонеподвижных ленточных усиления. Численно-аналитические решения задач получено для однородного поля напряжений на бесконечности. *Ключевые слова:* упругий массив, усиление, продольный сдвиг, коэффициент интенсивности.

---