



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства та
природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-12

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ЗАВДАННЯ

до виконання самостійної роботи
з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділів

"Лінійна алгебра та аналітична геометрія",
"Вступ до математичного аналізу",
"Диференціальне числення функції однієї
змінної "

студентами спеціальності 151
"Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології"
денної форми навчання

Рекомендовано науково-методичною
комісією зі спеціальності 151
"Автоматизація та комп'ютерно-
інтегровані технології".
Протокол №5 від 30.12.2016 р.

Рівне — 2017



Методичні вказівки та завдання до виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища математика" з розділів "Лінійна алгебра та аналітична геометрія", "Вступ до математичного аналізу", "Диференціальне числення функції однієї змінної" студентами спеціальності 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології" денної форми навчання / Кушнір В.П., Тадеєв П.О., Дейнека О.Ю. — Рівне: НУВГП, 2017. — 28 с.

Упорядники:

В. П. Кушнір, канд. фіз.-мат. наук;

П.О. Тадеєв, канд. фіз.-мат. наук, доктор педагогічних наук,
професор;

О.Ю. Дейнека.



Відповідальний за випуск: Я.Г. Іващук, кандидат фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики.



Вступ

Мета методичних вказівок — максимально залучити студентів до активної самостійної роботи з вищої математики на практичних заняттях.

Для цього, відповідно до робочої програми, на кожне заняття пропонуються приклади і задачі від простих до складніших, що дасть можливість кожному студентові під керівництвом викладача розв'язувати ті завдання, які відповідають його математичній підготовці в цілому та його підготовці до даного заняття. Пропонуються також завдання для домашніх робіт до кожного заняття для закріплення набутих навичок.

Заняття 1. Визначники, їх властивості.

1. Означення визначників 2-го, 3-го порядку. Перестановка, кількість інверсій перестановки. Парні і непарні перестановки. Яка парність перестановки (2,3,5,4,1)? Означення визначників n -го порядку.
2. Властивості визначників: про нульовий рядок, спільний множник елементів рядка, перестановку рядків.
3. Властивості визначників: про транспонування, про однакові рядки, про пропорційні рядки.
4. Властивості визначників: про рядок, що є сумою двох рядків, про додавання рядка (стовпчика).
5. Означення M_{ij} , A_{ij} . Теорема Лапласа.
6. Властивість визначника про елементи рядка і алгебраїчні доповнення до іншого рядка. Довести, що визначник 2-го порядку дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли його рядки пропорційні.
7. Означення суми рядків (стовпчиків), добутку рядка (стовпчика) на число, лінійної комбінації рядків (стовпчиків), лінійно залежних і лінійно незалежних рядків (стовпчиків).
8. Властивість визначника про лінійно залежні рядки (ст.).

1. Обчислити визначники: а) $|2|$, б) $|-2|$, в) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$,



г) $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$, д) $\begin{vmatrix} 0 & a \\ a & 2a \end{vmatrix}$, е) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$,

е) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, ж) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$, з) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

и) $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

2. Обчислити $M_{12}, M_{22}, A_{12}, A_{22}$ для завдання 1г.

3. Обчислити $M_{21}, M_{32}, A_{21}, A_{32}$ для завдання 1ж.

4. Обчислити визначники завдань 1 е, ж, розклавши їх зразу ж за елементами деякого рядка, чи стовпця.

5. Обчислити визначники 3-го порядку методом накопичення нулів із завдань 1 е, ж.

6. Обчислити визначник 4-го порядку методом накопичення

нулів $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

7. Чи лінійно залежні рядки? а) (2;3), (0;1), б) (2;3), (-4;-6),
в) (2;3), (0;0), г) (2;3;6), (0;1;7), (-1;2;3).

Домашнє завдання

1. Обчислити визначники:

а) $|x|$, б) $|-5|$ в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, г) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix}$,



$$д) \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \quad е) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad є) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Розв'язати нерівності та рівняння:

$$а) \begin{vmatrix} 4x & -1 \\ 3x & 2 \end{vmatrix} = 7x - 2, \quad б) \begin{vmatrix} a & -2 \\ 2a & a \end{vmatrix} > -3,$$

$$в) \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1/2.$$

3. Обчислити $M_{12}, M_{22}, A_{12}, A_{22}$ для завдання 1 г.

4. Обчислити $M_{21}, M_{32}, A_{21}, A_{32}$ для завдання 1 є.

5. Обчислити визначники завдань 1 д, є, розклавши їх зразу ж за елементами деякого рядка, чи стовпця.

6. Обчислити визначник 3-го порядку методом накопичення нулів із завдання 1 д.

7. Обчислити визначник 4-го порядку методом накопичення

$$\text{нулів} \begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

8. Чи лінійно залежні рядки? а) (2;-3), (10;1), б) (-2;-3), (-4;-6), в) (4;0), (0;0), г) (2;3;7), (-2;1;3), (0;2;5).

Заняття 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), їх розв'язування з допомогою визначників. Однорідні СЛАР, фундаментальна система розв'язків (ФСР).

1. Означення СЛАР, її розв'язку, несумісної системи, квадратної системи, рівносильних систем. Які перетворення можна робити з рівняннями системи, щоб вона залишалась рівносильною?

2. Теорема Крамера.

3. Наслідок з теореми Крамера про несумісну систему. Теорема про сумісну систему з головним визначником, що дорівнює



нулю. Скільки розв'язків може мати квадратна СЛАР в залежності від головного визначника?

4. Теорема про систему, в якій одне з рівнянь є наслідком інших.
5. Теорема про систему, в якій рівнянь менше, ніж невідомих.
6. Однорідні СЛАР: означення, властивості розв'язків.
7. Означення лінійного простору, приклади. Означення фундаментальної системи розв'язків однорідної системи та її знаходження, коли відомі всі розв'язки однорідної системи.

1. Дослідити та розв'язати системи з допомогою визначників. Виконати перевірки.

а)
$$\begin{cases} 2x - 3y - 5 = 0, \\ 4x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

е)
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 4x + 3y - 2z = 1, \\ 5x - z = 7 \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x - 3y = 6, \\ 2x + 3y = 0. \end{cases}$$

е)
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 4x + 3y - 2z = 1, \\ 5x - z = 2. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 4x + 3y - 2z = 1, \\ 5x - 3y = 2. \end{cases}$$

ж)
$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 1, \\ x + 2y - 2z = 3, \\ 5x - 4y = 5. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x - 3y = 6, \\ -2x + 6y = 0. \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} x - 3y = -1, \\ -2x + 3y = 2. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему, в якій рівнянь менше ніж невідомих, з допомогою визначників
$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 1, \\ 4x + 3y - 2z + 5t = 1. \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідні системи та знайти їх фундаментальні системи розв'язків.

а)
$$\begin{cases} x + y = 0, \\ -2x + 6y = 0. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ 4x + y - 2z = 0, \\ 5x - 2y - z = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x - 3y = 0, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 2x - y + z - t = 0, \\ 4x + 3y - 2z + 5t = 0. \end{cases}$$



Домашнє завдання

1. Дослідити та розв'язати системи з допомогою визначників.

а)
$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} x - 5y = -1, \\ 2x - 10y = -2. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

е)
$$\begin{cases} x - y + 3z = 1, \\ 5x - 3y - 2z = 3, \\ 4x - 2y - 5z = 4. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 4, \\ x - 3y - z = 0, \\ 5x - 3y - z = 4. \end{cases}$$

є)
$$\begin{cases} 2x - y + z = 3, \\ x - 2y - 2z = 1, \\ 4x - 5y - 3z = 5. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ -2x - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему, в якій рівнянь менше ніж невідомих, з допомогою визначників
$$\begin{cases} x + 2y + z - t = 1, \\ 2x + 4y - 2z + t = 5. \end{cases}$$

3. Розв'язати однорідні системи та знайти їх фундаментальні системи розв'язків.

а)
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + 3z = 0, \\ -2x + 6y + 3z = 0. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x - y + 4z = 0, \\ 4x + 2y - z = 0, \\ 2x + 4y - 9z = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -4x + 6y = 0. \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} x - 3y + z - 2t = 0, \\ x - 3y - 2z + t = 0. \end{cases}$$

Заняття 3. Матриці, дії над ними. Обернена матриця, матричний метод для СЛАР.

1. Означення матриці, розміру матриці, квадратної матриці, рівних матриць, нульової, діагональної, одиничної матриці, визначника матриці. Транспонування матриць.

2. Додавання матриць і множення матриці на число. Властивості цих операцій.

3. Множення матриць. Чи виконується комутативний закон? Довести асоціативний закон.

4. Властивості множення матриць: дистрибутивність, про винесення числового множника, про множення на одиничну



матрицю.

5. Для якої матриці можна шукати визначник? Означення виродженої і невиродженої матриць. Властивість про визначник добутку квадратних матриць.

6. Означення оберненої матриці і теорема про обернену матрицю.

7. Матричний метод розв'язування систем.

1. Виконати дії з даними матрицями.

а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. $3A$ -? $2A-3B^T$ -? AB -? BA -?

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $A-2B$ -? AB -? BA -?

2. Знайти обернені матриці до матриць з пункту 1 і зробити перевірки.

3. Розв'язати системи матричним методом.

а) $\begin{cases} 2x + y - 5 = 0, \\ x + 2y - 4 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4, \\ x - 3y - z = 0, \\ 5x - 3y - z = 4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 2, \\ -2x - 2y = 0. \end{cases}$

4. Розв'язати матричне рівняння $AX - B = C$,

якщо $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Домашнє завдання

1. Виконати дії з даними матрицями.

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. $3A$ -? $2A-3B^T$ -? AB -? BA -?



б) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad A-2B-? \quad AB-? \quad BA-?$

2. Знайти обернені матриці до матриць з пункту 1 і зробити перевірки.

3. Розв'язати системи матричним методом.

а) $\begin{cases} 2x + y = 0, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + z = 4, \\ x + 3y - 2z = -2, \\ 3x - y - z = 4. \end{cases}$

4. Розв'язати матричне рівняння $XB = C$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Заняття 4. Метод елементарних перетворень розв'язування систем (Гауса) та відшукування оберненої матриці. Власні числа та власні вектори матриці.

1. Метод Гауса розв'язування систем. Метод елементарних перетворень відшукування оберненої матриці.

2. Власні числа та власні вектори матриці. Властивості власних векторів. Знаходження власних чисел та власних векторів.

1. Розв'язати системи методом елементарних перетворень (Гауса) і зробити перевірки.

а) $\begin{cases} x - y + z = 4, \\ x + 3y - 2z = -2, \\ 3x - y - z = 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 2t = 7, \\ x - 2y - z - 3t = -2, \\ 3x - y - z + 4t = 4, \\ x + 3y - 3z + 9t = -1. \end{cases}$

2. Знайти обернені матриці до даних матриць методом елементарних перетворень і зробити перевірки:

а) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$ б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$ в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$



3. Розв'язати однорідну систему методом елементарних перетворень і знайти її фундаментальну систему розв'язків

$$\begin{cases} x - y - 3z + t = 0, \\ x - 2y + z - 3t = 0, \\ 3x - 4y - 5z - t = 0, \\ 3x - 5y - z - 5t = 0. \end{cases}$$

4. Знайти власні числа та власні вектори заданих матриць та

зробити перевірки: а) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Домашнє завдання

1. Розв'язати системи методом елементарних перетворень (Гауса) і зробити перевірки.

а) $\begin{cases} 2x - y + z = 4, \\ 3x + 3y - 2z = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - y - z - t = 0, \\ 3x + y + z - 4t = 5, \\ 3x - y - z + 4t = 1, \\ x + 3y - 3z + 9t = 1. \end{cases}$

2. Знайти обернені матриці до даних матриць методом елементарних перетворень і зробити перевірки:

а) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Розв'язати однорідну систему методом елементарних перетворень і знайти її фундаментальну систему розв'язків

$$\begin{cases} x + 3y - z + 2t = 0, \\ 2x - y + 4z - t = 0, \\ 3x + 2y + 3z + t = 0, \\ 3x - 5y - z - 5t = 0. \end{cases}$$

4. Знайти власні числа та власні вектори заданих матриць та



зробити перевірки: а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Підготувитись до модульної контрольної роботи.

Заняття 5. Вектори. Лінійні операції над векторами. Скалярний добуток.

1. Означення вектора, нульового вектора, абсолютної величини вектора, колінеарних, рівних, та компланарних векторів. Чи будуть рівні вектори колінеарними, а колінеарні – компланарними? Чи будуть два будь-які вектори компланарними?
2. Множення вектора на число в геометричній формі. Теорема про колінеарні вектори.
3. Додавання і віднімання векторів у геометричній формі. Властивості додавання векторів і множення вектора на число. Довести одну з властивостей геометрично.
4. Означення базису деякої сукупності векторів. Теорема про базис векторів площини.
5. Теорема про базис векторів трьохвимірного простору. Довести, що вектори базису лінійно незалежні. Властивості координат векторів, розкладених за одним базисом.
6. Проекція вектора на вісь та її властивості.
7. Розклад вектора по базису векторів \vec{i}, \vec{j} та $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Координати вектора в декартовій системі координат та їх властивості.
8. Означення орта вектора та напрямних косинусів вектора та їх знаходження. Означення і позначення ортів осей координат.
9. Скалярний добуток векторів і його властивості.
10. Скалярний добуток через координати векторів і його застосування: знаходження кута між векторами і проекції вектора на вектор, перевірка векторів на перпендикулярність. Формули для довжини та напрямних косинусів вектора через його координати. Теорема про напрямні косинуси. Фізичний зміст скалярного добутку. Скалярний добуток і пов'язані з ним означення для n -вимірних векторів. Формула Коші-Буняковського.



1. Задачі на додавання і множення векторів на число в геометричній формі.

а) Виразити вектори-медіани трикутника через два вектори-сторони трикутника, що виходять з однієї точки. Знайти суму векторів, що сполучають центр мас трикутника з його вершинами.

б) При яких двох векторах, їхня сума буде направлена по бісектрисі кута між ними?

2. $A(0;-3;2)$, $B(9;3;-1)$, $C(3;-5;4)$, $D(-1;0;3)$. Знайти координати векторів $\vec{a} = \overline{AB}$, $\vec{b} = \overline{CB}$, $\vec{c} = \overline{AD}$, $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$. Чи є серед них колінеарні?

3. Задача на колінеарні вектори. Перевірити чи служать чотири точки вершинами трапеції (паралелограма) і назвати цю трапецію. $A(1;3;-2)$, $B(4;2;-2)$, $C(3;-5;4)$, $D(5;-2;1)$.

4. Знайти напрямні косинуси і орти векторів, заданих координатами. $\vec{a} = (-3; 4)$, $\vec{b} = (2; -4; 4)$.

5. Перевірити, що перші два вектори утворюють базис площини, і розкласти третій вектор по цьому базису. Зобразити всі вектори в декартовій системі координат.

$$\vec{a} = (-1; 4), \vec{b} = (2; -1), \vec{c} = (5; -6).$$

$$6. |\vec{a}|=3, |\vec{b}|=5, \widehat{\vec{a}, \vec{b}}=2\pi/3. \vec{a} \cdot \vec{b}=? (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b})=? |\vec{a} + 2\vec{b}|=?$$

7. Для векторів, заданих своїми координатами, знайти скалярний добуток, кут між ними та проекцію першого вектора на другий.

$$\vec{a} = (-3; 1), \vec{b} = (3; 5).$$

8. Знайти зовнішній кут при вершині А в трикутнику АВС, якщо $A(2; 0)$, $B(5; -3)$, $C(3; 0)$.

9. Знайти роботу сили $\vec{F} = (-4; 1; 3)$ по переміщенню з точки $A(3; 0; -2)$ в початок координат.

10. Перевірити чи трикутник, заданий координатами своїх вершин, прямокутний, тупокутний чи гострокутний. Якщо тупокутний чи прямокутний назвати вершину найбільшого кута.

$$A(-3; 2; 0), B(4; 5; -3), C(-6; 9; 0).$$

Домашнє завдання

1. Задачі на додавання і множення векторів на число в геометричній формі.

а) В правильному п'ятикутнику ABCDE задані вектори-сторони:



$\overline{AB} = \vec{m}, \overline{BC} = \vec{n}, \overline{CD} = \vec{p}, \overline{DE} = \vec{q}, \overline{EA} = \vec{r}$. Побудувати

вектори $\vec{m} - \vec{n} + \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}, \vec{m} + 2\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{r}$.

б) Через два вектори-медіани трикутника виразити вектори-сторони трикутника і третю медіану.

в) При яких двох векторах, їхня сума буде перпендикулярною (паралельною) до їх різниці?

2. $A(-3; 2), B(3; -1), C(-1; 3)$. Знайти координати векторів $\vec{a} = \overline{AB}, \vec{b} = \overline{CB}, \vec{a} - 2\vec{b}$. Чи є серед них колінеарні?

3. При яких значеннях α, β задані вектори будуть колінеарними? Який з них тоді буде довшим і в скільки разів і чи будуть вони співнапрямленими? $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}, \vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$

4. Чи можуть дані кути бути напрямними кутами деякого вектора? а) $30^\circ, 45^\circ, 20^\circ$, б) $\pi/3, 5\pi/6, \pi/2$.

5. Знайти напрямні косинуси і орт вектора, заданого координатами $\vec{a} = (0; 2; -1)$.

6. Перевірити, що перші три вектори утворюють базис площини, і розкласти третій вектор по цьому базису. $\vec{a} = (-1; 4; 2), \vec{b} = (2; -1; 0), \vec{c} = (5; -6; 3), \vec{d} = (1; -4; 3)$.

Чи утворюють базис простору три останні вектори?

7. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, \vec{a}, \vec{b} = \pi/6$. $\vec{a} \vec{b} - ? (\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + \vec{b}) - ? |\vec{a} - \vec{b}| - ?$

8. Для векторів, заданих своїми координатами, знайти скалярний добуток, кут між ними та проекцію першого вектора на другий. $\vec{a} = (-1; 1; 2), \vec{b} = (0; 3; 5)$.

9. Знайти кут між медіанами рівнобедреного прямокутного трикутника, проведених до його катетів. *Вказівка:* можна використати метод координат, помістивши вершину кута в початок координат, а катети направивши по осях.

10. Знайти роботу суми сил (тобто їх рівнодійної) $\vec{F}_1 = (2; 1; -3), \vec{F}_2 = (-4; 5; -2)$ по переміщенню з точки $A(3; 0; -2)$ в точку $B(0; 4; -2)$.

11. Перевірити чи є чотири дані точки вершинами прямокутника або квадрата. Якщо так, назвати порядок вершин та знайти його площу. $A(-3; 2; 2), B(4; 5; -3), C(-6; 9; 2), D(-13; 6; 7)$.



Заняття 6. Векторний та змішаний добуток векторів.

1. Права і ліва трійки векторів. Означення векторного добутку та геометричний зміст його довжини. Чи змінюється орієнтація трійки векторів при круговій перестановці векторів?
2. Фізичний зміст векторного добутку і властивості.
3. Векторний добуток через координати векторів. Застосування.
4. Змішаний добуток векторів та його геометричний зміст. Властивості змішаного добутку векторів.
5. Змішаний добуток векторів через координати. Застосування.

1. $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=1, \widehat{\vec{a}, \vec{b}}=\pi/6.$ $|\vec{a}\times\vec{b}|=? (\vec{a}\times\vec{b})^2=?$

$((\vec{a}-2\vec{b})\times(2\vec{a}+\vec{b}))^2=? ((\vec{a}-2\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b}))^2=?$

2. $\vec{a}=(1; 4; 2), \vec{b}=(3; 6; 5).$

$\vec{a}\times\vec{b}=? (2\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=? (2\vec{a}+\vec{b})\times(2\vec{a}-\vec{b})=?$

3. Знайти момент сили, його абсолютну величину і напрямні косинуси для сили, прикладеної в точці $A(2;-1;1)$ відносно початку координат.

4. Знайти площу трикутника, заданого координатами його вершин. $A(1;-1;2), B(5;-6;2), C(1;3;-1)$ і його висоту з вершини B .

5. Знайти координати вектора, знаючи його довжину 26, і що він перпендикулярний до двох заданих векторів $\vec{a}=(4;-2;-3), \vec{b}=(0;1;3)$, і утворює з віссю Oy тупий кут.

6. Три вектори утворюють ліву трійку, взаємноперпендикулярні та мають довжини 1, 3, 5 відповідно. Знайти їх змішаний добуток та об'єм паралелепіпеда, який вони задають.

7. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах. Яку трійку вони утворюють?

$\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}, \vec{b}=\vec{i}-6\vec{j}+2\vec{k}, \vec{c}=2\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}.$

Чи компланарні ці вектори? Чи утворюють вони базис простору?

8. Знайти об'єм тетраедра, заданого координатами його вершин. $A(2;-1;1), B(5;5;4), C(3;2;-1), D(4;1;3).$

9. Чи лежать чотири точки, задані своїми координатами, на одній площині? $A(1;2;-1), B(0;1;5), C(-1;2;1), D(2;1;3).$



Домашнє завдання

- $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, \widehat{\vec{a}, \vec{b}}=3\pi/2$.
 $|\vec{a} \times \vec{b}|=?$ $(\vec{a} \times \vec{b})^2=?$ $((3\vec{a}-2\vec{b}) \times (2\vec{a}+3\vec{b}))^2=?$
 - Сума трьох векторів дорівнює нульовому вектору. Довести, що їх попарні векторні добутки рівні або протилежні вектори.
 - $\vec{a}=(-3; 0; 1), \vec{b}=(2; 1; 6)$. $\vec{a} \times \vec{b}=?$ $(\vec{a}-3\vec{b}) \times (\vec{a}+2\vec{b})=?$
 - Знайти момент сили, його абсолютну величину і напрямні косинуси для сили, прикладеної в точці $A(0;1;2)$ відносно точки $P(4;-3;2)$.
 - Знайти площу трикутника, заданого координатами його вершин. $A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)$.
 - Знайти координати вектора \vec{x} , знаючи що він перпендикулярний до двох заданих векторів $\vec{a}=(2; -3; 1), \vec{b}=(1; -2; 3)$
 $\vec{x} \cdot (\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.
 - $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=1, \widehat{\vec{a}, \vec{b}}=5\pi/6, \vec{c} \perp \vec{a}, \vec{c} \perp \vec{b}$. $\vec{a} \vec{b} \vec{c}=?$
Який об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах?
 - Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах. Яку трійку вони утворюють? Чи компланарні ці вектори? Чи утворюють вони базис простору?
 $\vec{a}=(-2; 4; 6), \vec{b}=(4; 3; 0), \vec{c}=(1; 2; 4)$.
 - Знайти об'єм тетраедра, заданого координатами його вершин, і його висоту з вершини D . $A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$.
- Підготувитись до самостійної роботи по векторах.**

Заняття 7. Найпростіші задачі аналітичної геометрії.

Пряма на площині.

- Найпростіші задачі аналітичної геометрії: відстань між двома точками та поділ відрізка у заданому відношенні. Знаходження середини відрізка.
- Паралельний перенос осей координат в просторі. Поворот координатних осей на площині.
- Рівняння лінії на площині. Рівняння прямої через точку і нормальний вектор та загальне рівняння прямої на площині.
- Рівняння прямої на площині: через точку і напрямний вектор,



параметричні і через кутовий коефіцієнт. Геометричний зміст кутового коефіцієнта.

5. Рівняння прямої на площині: через дві точки і у відрізках. Відстань від точки до прямої.

6. Кут між прямими на площині через координати нормальних, напрямних векторів та через кутові коефіцієнти. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.

1. Знайти координати точки перетину медіан, якщо координати вершин трикутника $A(1;4)$, $B(3;0)$, $C(5;2)$.

2. Знайти довжину бісектриси трикутника з вершини A , якщо координати його вершин $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-2)$.

3. Яким буде рівняння кривої $xy=1$ при повороті координатних осей на 45 градусів?

4. Скласти рівняння перпендикулярної та паралельної до прямої $4x-y+4=0$ прямих, що проходять через точку $M(2;-4)$. Звести ці рівняння до рівнянь прямих у відрізках та побудувати всі прямі.

5. Знайти довжини і скласти рівняння висоти з вершини A , та середньої лінії, паралельної до BC трикутника, заданого координатами його вершин $A(4;-1)$, $B(3;3)$, $C(1;-2)$.

6. Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$.

7. Знайти площу квадрата, коли відомі рівняння його протилежних сторін: $2x+3y-6=0$, $4x+6y+17=0$.

8. Промінь світла упав на пряму $x+y+2=0$ в точці $M(2;-4)$ під кутом 45° . Скласти рівняння прямої, на якій лежить відбитий промінь.

Домашнє завдання

1. Знайти координати точок, що ділять відрізок AB на три рівні частини, якщо $A(1;-3)$, $B(4;3)$.

2. Через точки $A(-1;2)$ та $B(2;3)$ проведена пряма. Знайти точки перетину прямої з осями координат та кутовий коефіцієнт. Скласти різні види рівнянь цієї прямої: канонічне, параметричні, у відрізках, з кутовим коефіцієнтом.

3. Знайти кут між прямими $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$.

4. Знайти довжини і скласти рівняння медіани та бісектриси з вершини B трикутника з вершинами $A(2;0)$, $B(0;1)$, $C(4;3)$.



5. Задані сторони трикутника своїми рівняннями: $4x-y-7=0$, $x+3y-31=0$, $x+5y-7=0$. Знайти координати вершин трикутника.
6. Дані рівняння двох сторін прямокутника $5x+2y-7=0$, $5x+2y-36=0$ і рівняння його діагоналі $3x+7y-10=0$. Скласти рівняння інших сторін і другої діагоналі прямокутника.
7. Знайти точку, симетричну точці $P(-5;13)$ відносно прямої $2x-3y-3=0$.
8. Знайти відстань між двома прямими $3x-4y+2=0$, $3x-4y-3=0$.

Заняття 8. Пряма та площина у просторі.

Криві другого порядку.

1. Рівняння поверхні у просторі. Рівняння площини через точку і нормальний вектор та загальне рівняння площини у просторі.
2. Рівняння площини через три точки і у відрізках. Кут між площинами та відстань від точки до площини.
3. Пряма у просторі. Кут між прямими. Умови паралельності та перпендикулярності прямих.
4. Деякі задачі аналітичної геометрії: кут між прямою і площиною, перетин прямої і площини та перехід від загальних рівнянь прямої у просторі до канонічних і параметричних.
5. Означення, канонічні, параметричні та рівняння із зміщеним центром кола і еліпса.
6. Означення, пов'язані з гіперболою, її канонічне рівняння та рівняння із зміщеним центром.
7. Означення, пов'язані з параболою, її канонічне рівняння та рівняння із зміщеним центром.
8. Загальне рівняння кривої другого порядку та його зведення до канонічного.

1. Знайти кут між прямою і площиною та точку їх перетину.

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}, 2x+3y+z-1=0.$$

2. Дві грані куба лежать на площинах $2x-2y+z-1=0$, $2x-2y+z+5=0$. Знайти його об'єм.
3. Знайти проекцію точки $P(2;-1;3)$ на пряму $x=3t$, $y=5t-7$, $z=2t+2$.
4. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, заданої



своїми загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 4 = 0, \\ 3x - 5y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

5. Назвати та зобразити криві: а) $x^2/9 + y^2/4 = 1$, б) $x^2/9 - y^2/4 = 1$,
в) $y^2 + x - 4 = 0$, г) $x/9 + y/4 = 1$.

6. Знайти центри, радіуси і намалювати кола, задані своїми загальними рівняннями:

а) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$, б) $x^2 + y^2 = 2x$.

7. Знайти центр, фокуси, ексцентриситет, директриси (асимптоти) і намалювати еліпс (гіперболу), заданий своїм загальним рівнянням. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$.

8. Знайти вершини, параметри, фокуси, директриси і намалювати параболи, задані загальними рівняннями.

а) $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 2$, б) $x = 2y^2 - 12y + 14$.

Домашнє завдання

1. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;1;-3)$ перпендикулярно до площини $2x - 3y + 4z - 3 = 0$. Знайти точку перетину прямої з площиною.

2. Знайти проекцію точки $P(5;2;-1)$ на площину $2x - y + 3z + 23 = 0$.

3. Задано вершини тетраедра $A(5;2;-3)$, $B(1;-3;4)$, $C(0;4;1)$, $D(3;-2;0)$. Знайти рівняння грані ABC та довжину висоти тетраедра, опущеної на неї. Який кут утворює ребро AB з гранню ABC ?

4. Знайти канонічні і параметричні рівняння прямої, заданої своїми загальними рівняннями $\begin{cases} x + 2y - z - 6 = 0, \\ 2x - y + z - 6 = 0. \end{cases}$

5. Знайти тупий кут між прямими $x = 3t - 2$, $y = 0$, $z = -t + 3$ та $x = 2t - 1$, $y = 0$, $z = t - 3$.

6*. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-4;-5;3)$ і перетинає пряму

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{-1}, \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-5}.$$

7. Знайти центри, радіуси і намалювати кола, задані своїми загальними рівняннями:



а) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$, б) $x^2 + y^2 + x + y = 0$.

8. Знайти центри, фокуси, ексцентриситет, директриси (асимптоти) і намалювати еліпси (гіперболи), задані своїми загальними рівняннями: а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$,

б) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$.

9. Знайти вершини, параметри, фокуси, директриси і намалювати параболи, задані загальними рівняннями:

а) $y = 4x^2 - 8x + 7$, б) $x = -y^2 + 2y - 1$.

10. Назвати криві. Намалювати фігури, обмежені кривими.

а) $x + y = 0, x = y^2 - 2y$. б) $2x = 6 + \sqrt{36 - 9y^2}, 2x = 3y, y = 0$.

Заняття 9. Поверхні другого порядку.

Полярна система координат.

1. Циліндричні поверхні. Теорема про неповні рівняння. Циліндри другого порядку.
2. Конічні поверхні. Рівняння еліптичного конуса з віссю симетрії Oz .
3. Поверхні обертання. Рівняння поверхні, утвореної обертанням плоскої кривої навколо координатної осі.
4. Дослідження поверхонь методом плоских перерізів. Рівняння еліпсоїда та гіперболоїдів.
5. Рівняння параболоїдів. Загальне рівняння поверхонь другого порядку та зведення його до канонічного.
6. Полярна система координат на площині. Рівняння деяких кривих в полярній системі та її зв'язок з декартовою системою координат на площині.
7. Параметричні рівняння лінії на площині і в просторі. Параметричні рівняння ліній 1-го та 2-го порядків на площині. Циклоїда. Астроїда.

1. Назвати і намалювати, вибравши із заданих поверхонь:

- а) циліндричні з твірними, паралельними деякій координатній осі,
- б) поверхню обертання, вісь якої є деякою віссю координат.



$$z = 9 - x^2 - y^2, 4x^2 + y^2 = 4y, z = y^2.$$

2. Намалювати тіла, обмежені поверхнями, заданими своїми рівняннями, та їхні проекції на площину Oxy (на окремому малюнку). Назвати всі поверхні.

а) $z = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$. б) $z = x^2, z = 4, y = 0, y = 3$.

3. Звести загальне рівняння поверхні до канонічного із зміщеним центром, назвати і намалювати поверхню:

$$4x^2 + y^2 - 4y - z^2 - 4z = 0.$$

4. Намалювати криву, перейшовши до полярної системи координат, $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$ ($a > 0$).

5. Намалювати криві в полярній системі координат і, перейшовши до декартової системи координат, впізнати та

назвати їх: а) $\rho = 3 \sin \varphi$, б) $\rho = \frac{1}{1 - 2 \cos \varphi}$.

6. Назвати та намалювати криві, задані параметрично.

а) $x = 4 \cos t, y = 3 \sin t$. б) $x = 4 \cos^3 t, y = 4 \sin^3 t$.

в) $x = 3t - 2, y = 4t + 1$.

Домашнє завдання

1. Намалювати тіла, обмежені поверхнями, заданими своїми рівняннями, та їхні проекції на площину Oxy (на окремому малюнку). Назвати всі поверхні.

а) $z = x^2 - y^2, z = 0, x = 1$. б) $x^2 + y^2 + z^2 = 8, z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Звести загальне рівняння поверхні до канонічного із зміщеним центром, назвати і намалювати поверхню:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 4z - 4 = 0.$$

3. Намалювати криву, задану рівнянням в полярній системі координат $\rho = a \sin 4\varphi$ ($a > 0$).

4. Намалювати криву, перейшовши до полярної системи координат, $(x^2 + y^2)^2 = 4a^2(x^2 - y^2)$ ($a > 0$).

5. Намалювати криву в полярній системі координат і, перейшовши до декартової системи координат, впізнати та

назвати її $\rho = \frac{21}{5 - 2 \sin \varphi}$.



6. Назвати та намалювати криві. Виключивши параметр знайти рівняння цих кривих виду $F(x,y)=0$. а) $x=4 \cos t, y=4 \sin t$.

б) $x=t^2-2t+1, y=t-1$. в) $x=t-4, y=5t$.

Заняття 10. Функція однієї змінної. Границі.

1. Означення функції, основні елементарні функції, їх графіки. Суперпозиція функцій, елементарна функція, обернена функція.

2. Означення послідовності. Обмеженість. Границя послідовності. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності. Теореми про арифметичні дії над границями послідовностей і про обернену до нескінченно великої послідовність.

3. Границя функції в точці за Коші і за Гейне. Однобічні границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції в точці. Теореми про арифметичні дії над границями функцій, про нескінченно малі і великі функції в точці. Властивості границь.

4. Перша і друга визначні границі та основні наслідки з них.

1. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \ln \frac{x-3}{2x^2-5x}$, б) $y = \sqrt[3]{x-1}$, в) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$.

2. Знайти границі:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{4x^2+x+10}$,

є) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-25}{x^2-10x+25}$,

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-2)^2}{x^3-2x^2+1}$,

ж) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-2x^2+3x-6}{3x^2-4x-4}$,

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-2x^2+3x-6}{3x^2-4x-4}$,

з) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+2}{x^4-4x^2+3}$,

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+1} - \sqrt{x^2+1})$,

и) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$,

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+5} - n)$,

і) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$.

е) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$,



3. Обчислити границі з тригонометричними функціями:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x}$,

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} 4x \cdot \cos^2 x}{\operatorname{tg}^3 2x \cdot \operatorname{arcctg} x}$,

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$,

е) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 4x}{\cos x}$,

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$,

є) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x+2}$.

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 4x}$,

Домашнє завдання (Збірник задач під ред. Демидовича 16, 18, 23а, 38г, 181, 184, 194, 195, 204, 206, 213, 215, 218, 219, 221, 228.)

1. Знайти області визначення функцій:

а) $y = \lg \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1}$,

б) $y = \sqrt{x - x^3}$.

2. Дослідити на парність функцію $y = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$.

3. Знайти нулі та знаки функції $y = x^3 - 3x$.

4. Знайти границі:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$,

є) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$,

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$,

ж) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$,

в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$,

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$,

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n + \sqrt[3]{1 - n^3})$,

и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$,

д) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$,

і) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$,

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$,

к) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.



Заняття 11. Границі. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих. Неперервність. Розриви. Техніка обчислення похідної.

1. Перша і друга визначні границі та основні наслідки з них.
2. Нескінченно малі і нескінченно великі одного порядку і більшого чи меншого порядку. Еквівалентні функції. Таблиця еквівалентних функцій. Теорема про використання еквівалентних функцій при обчисленні границі.
3. Неперервна функція в точці і в області. Теорема про неперервність елементарної функції.
4. Точки розриву та їх класифікація.
5. Теореми про неперервні на відрізку функції: Вейерштрасса, Больцано-Коші, Больцано-Вейерштрасса.
6. Похідна функції в точці, її геометричний та механічний зміст. Рівняння дотичної і нормалі до графіка функції. Таблиця похідних і правил диференціювання.

1. Знайти границі:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-1}{3-x} \right)^{x+3}$,

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+2}{2x-5} \right)^{3x-4}$,

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+2}{2x^2+1} \right)^{x^2}$,

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-2}{5x+3} \right)^{x+5}$.

2. Знайти границі, використовуючи таблицю асимптотично рівних функцій:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 6}{3x^2 - 4x - 4}$,

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \operatorname{arctg} 4x \cdot \cos^2 x}{\operatorname{tg}^3 2x \cdot \arcsin x}$,

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$,

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x^3) \cdot (\sqrt[3]{1-x-1})}{\operatorname{tg}^3 x \cdot (e^{2x}-1)}$.

3. Дослідити функції на неперервність. Вказати точки розриву, їх рід та вертикальні асимптоти. Зобразити графіки функцій в

околах точок розриву. а) $y = \frac{x-3}{2x-1}$,

б) $y = \frac{x-1}{x^2-1}$,



$$\text{в) } y = \frac{1}{1+e^x}, \quad \text{г) } y = \begin{cases} x-4, & x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

4. Знайти похідні та диференціали функцій:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= 4x^3 + 5x^2 - 3x + 7, & \text{г) } y &= \frac{x^3 - 2x^2 - 6}{x^2 - 4 \arccos x}, \\ \text{б) } y &= (2x - 3) \sin x, & \text{д) } y &= 3 \sin^2(5x - 2), \\ \text{в) } y &= \frac{\ln x + \operatorname{tg} x}{\arcsin x}, & \text{е) } y &= 5^{\operatorname{arctg}^3 2x}, \\ & & \text{є) } y &= \ln^3(2x^2 - 5x). \end{aligned}$$

Домашнє завдання (Збірник задач під ред. Демидовича 241, 249, 268, 270, 296, 297, 325, 330, 368, 390, 397, 453, 535.)

1. Знайти границі:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-2}{4x-3} \right)^{2x+5}.$$

2. Знайти границі, використовуючи таблицю асимптотично

$$\text{рівних функцій: а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^2 + 3}{3x - 5}, \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)},$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x-x^3)^2}.$$

3. Дослідити функції на неперервність. Вказати точки розриву, їх рід та вертикальні асимптоти. Зобразити графіки функцій в око-

$$\text{лах точок розриву. а) } y = \frac{x}{x-2}, \quad \text{б) } y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

$$\text{в) } y = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{г) } y = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ 2x+1, & x > 3. \end{cases}$$

4. Знайти похідні та диференціали функцій:

$$\begin{aligned} \text{а) } y &= x^5 - 4x^3 + 2x - 3, & \text{г) } y &= \operatorname{arctg} \ln x + \ln \operatorname{arctg} x, \\ \text{б) } y &= x^7 e^x, & \text{д) } y &= \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{1-x^2}. \\ \text{в) } y &= \frac{x^2}{\ln x}, \end{aligned}$$



Заняття 12. Похідна та диференціал. Геометричний та фізичний зміст. Похідні неявно та параметрично заданої функції. Похідні вищих порядків. Правило Лопіталя. Формула Тейлора.

1. Диференційована функція в точці і диференціал. Теорема про зв'язок диференційованості і існування похідної, формула для диференціала через похідну, геометричний зміст диференціала. Таблиця диференціалів і правил диференціювання.
2. Інваріантність форми диференціалу. Похідна оберненої функції, та функцій, заданих параметрично і неявно, логарифмічне диференціювання. Похідні та диференціали вищих порядків.
3. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші, Лопіталя.
4. Формули Тейлора і Маклорена. Формули Маклорена для функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^a$.

1. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^2 - 3x + 2$ двома способами: за означенням та з використанням похідної.

2. Знайти похідні та диференціали функцій:

а) $y = x^2 - 4 \operatorname{tg} x$, б) $y = x \ln x - 2 \sin 3x$.

3. Знайти з допомогою диференціалу наближені значення

виразів: а) $y = \sqrt{1,2}$, б) $y = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$.

4. Знайти похідні функцій, заданих явно, неявно чи параметрично. Можливе логарифмічне диференціювання.

а) $y = (\operatorname{arctg} x)^x$,

в) $\begin{cases} x = 2t^2 - t - 1, \\ y = t^2 + 3t. \end{cases}$

б) $y = \sqrt[4]{\frac{\sin^2 x \cdot e^x \sqrt{x}}{(x+1)^3 \ln 2x}}$,

г) $\begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$

д) $\operatorname{tg} y = xy$,

е) $x^4 + x^3 \operatorname{arctg} y + y^2 = 1, y'(1) = ? (y > 0.)$

е) $y = (1+x^2) \operatorname{arctg} x, y'' = ?$



ж)
$$\begin{cases} x = \ln t, & \frac{d^2 y}{dx^2} - ? \\ y = \frac{1}{1-t}. \end{cases}$$

з)
$$\begin{cases} x = \cos 2t, & \frac{d^2 y}{dx^2} - ? \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

5. Задачі на застосування геометричного змісту похідної.

а) Під якими кутами синусоїди $y = \sin x$, $y = \sin 2x$ перетинають вісь абсцис в початку координат?

б) Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ при $x = 2$.

в) Знайти кути між кривими в точках їх перетину $y = x^3$, $y = x^2$.

6. Розкласти функцію $\operatorname{tg} x$ за формулою Маклорена до доданка з x^2 .

7. Обчислити наближено із даною точністю вираз з використанням основних відомих формул Маклорена: $\sin 1$, $\varepsilon = 0,01$.

8. Обчислити границі з використанням правила Лопітала:

а)
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - 2x}{3x^2 - 7x + 2},$$

г)
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}},$$

б)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x},$$

д)
$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)^{\cos \frac{\pi x}{2}}.$$

в)
$$\lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} (1-x),$$

Домашнє завдання (Збірник задач під ред. Демидовича 567, 577, 582, 668, 604, 615, 692а, 633а, 626, 643, 644, 736, 743, 766, 768, 776, 777, 782, 789, 800.)

1. Знайти похідні функцій, заданих явно, неявно чи параметрично. Можливе логарифмічне диференціювання.

а)
$$y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4},$$

д)
$$\ln y + \frac{x}{y} = 0, y'(0) - ?$$

б)
$$y = x^{\sin x},$$

е)
$$y = e^{x^2}, y'' - ?$$

в)
$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$$

є)
$$\begin{cases} x = \ln t, & \frac{d^2 y}{dx^2} - ? \\ y = t^3. \end{cases}$$

г)
$$x^3 + x^2 y + y^2 = 0,$$



2. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = \operatorname{tg} 2x$ в початку координат.
3. В якій точці дотична до параболи $y = x^2 - 7x + 3$ паралельна до прямої $5x + y - 3 = 0$?
4. Знайти кут між параболою $y = (x - 2)^2$, $y = -4 + 6x - x^2$ в точці їх перетину.
5. Знайти з допомогою диференціалу наближені значення виразів: а) $\sin 31^\circ$, б) $\arcsin 0,54$.
6. Розкласти многочлен $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ по степенях $(x - 2)$.
7. Розкласти функцію $f(x) = \ln x$ по степенях $(x - 1)$ до члена з $(x - 1)^2$.
8. Обчислити границі з використанням правила Лопітала:
а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$, б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$,
в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$, г) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \operatorname{ctg} x$, д) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$.

Заняття 13. Повне дослідження функції та побудова графіка.

Прикладні задачі на екстремум.

1. Формули Тейлора і Маклорена. Формули Маклорена для функцій e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
2. Спадні, зростаючі, монотонні функції. Дослідження на монотонність з допомогою похідної.
3. Екстремуми функції. Теорема Ферма. Достатні умови екстремуму. Дослідження на найбільше і найменше значення на проміжку.
4. Опуклість вниз та вверх графіка функції, точки перегину. Дослідження на опуклість і точки перегину з допомогою похідної.
5. Означення асимптоти. Дослідження на вертикальні, горизонтальні і похилі асимптоти.



1. Обчислити наближено з точністю 0,01 з використанням формули Маклорена $\sqrt[3]{9}$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = \frac{x}{1+x^2}$

на відрізку $[-3; 3]$.

3. Прикладна текстова задача на екстремум. З квадратного листка картону з стороною a потрібно вирізати однакові квадрати по кутах, щоб, загнувши виступи хрестоподібної фігури, отримати прямокутну коробку найбільшого об'єму. Якою має бути сторона кутового квадрата?

4. Лампа висить над центром круглого стола з радіусом r . При якій висоті лампи над столом освітлення предмета, що лежить на краю стола буде найкращою? (Освітленість прямо пропорційна косинусу падіння кута променів світла і обернено пропорційна квадрату відстані від джерела світла.)

5. Зробити повне дослідження і побудувати графіки функцій:

а) $y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$,

б) $y = 3x^3 - 4x + 5$.

Домашнє завдання (Збірник задач під ред. Демидовича 854,885, 921, 957.)

1. Обчислити наближено з точністю 0,01 з використанням формули Маклорена $\sqrt{e} = e^{0,5}$.

2. Знайти найбільше і найменше значення функції $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на відрізку а) $[-1; 5]$, б) $[-10; 12]$.

3. Із круглої колоди з діаметром d потрібно вирізати балку з прямокутним перерізом. Які повинні ширина і висота цього перерізу, щоб балка мала максимальний опір а) на стиск, б) на згин?

Примітка. Опір балки на стиск пропорційний площі її поперечного перерізу, а на згин — добутку ширини цього перерізу на квадрат його висоти.

4. Дослідити функції та побудувати їхні графіки:

а) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$,

б) $y = \ln(1 + e^{-x})$.