

### УДК 539.3

**Тинчук С. О., к.т.н., доцент** (Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

## **АНАЛІЗ ТОЧНОСТІ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМУВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛИТ НА ЖОРСТКІЙ ОСНОВІ**

Для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) багатошарових товстих плит на жорсткій основі досліджено застосування побудованих уточнених моделей беззгинового НДС. Розрахунками підтверджено ефективність і точність методики моделювання, яка дозволяє отримати розв'язки, що якісно і кількісно близькі до тривимірних.

**Ключові слова:** уточнена модель, плита багатошарова, жорстка основа, поперечний зсув, поперечне обтиснення.

**Розрахунки міцності** та деформативності різного роду однорідних та неоднорідних композитних, особливо багатошарових, покриттів зводяться до оцінки їх напружено-деформованого стану (НДС) як плит, що контактують із основою. Це стосується розрахунку дорожнього багатошарового одягу на достатньо жорстких мостових, тунельних та інших конструкціях транспортних споруд, захисних багатошарових покриттів плоских елементів конструкцій та деталей, функціональних покриттів робочих поверхонь різного обладнання, зокрема емалевих покриттів корпусів хімічних апаратів тощо. Тому достовірне визначення НДС багатошарових плит на жорстких основах при дії стаціонарного поперечного навантаження, є актуальною і багатофункціональною задачею.

Об'єднання матеріалів з ізотропними та трансверсально-ізотропними фізичними характеристиками в багатошаровий пакет дозволяє створювати багатофункціональні конструкції. НДС таких конструкцій, зважаючи на їх структурну неоднорідність та відносно низьку поперечну жорсткість окремих шарів, суттєво пов'язаний з впливом деформацій поперечного зсуву та деформацій поперечного обтиснення. Тому актуальною є задача уточненого моделювання НДС плит, яка б враховувала ці види деформацій. Вимоги до точності наближеного моделювання залежать від призначення конструкції та багатьох інших факторів. Необхідною є також і оцінка точності НДС, отриманого за уточненою моделлю. Потрібно відмітити, що застосування класичної теорії пластин чи уточнених поперечно-зсувних моделей призводить до тривіально-нульового розв'язку для НДС поперечно навантажених плит на жорсткій основі.

**Відомі уточнені** моделі НДС [1, 2], що враховують поперечні зсуви та поперечне обтиснення, зорієнтовані переважно на описання згинового НДС, тоді як у плитах на жорсткій основі переважає беззгинова складова НДС. Отже, потрібна розробка уточненої моделі, яка б з високою точністю описувала беззгинову складову НДС плити на жорсткій основі.

В роботі [3] запропоновано гіпотези та побудована спеціальна модель беззгинового деформування однорідної та шаруватої плити, яка в поєднанні з моделлю згинового деформування дає результати, що близькі до точного тривимірного розв'язку. В роботах [4, 5] розглянуті структурно-континуальні моделі НДС поперечно навантажених плит, в яких ідея ітераційного моделювання [3], застосована для плит на жорсткій основі.

Метою даної роботи є оцінка точності та доцільності підходів [3-5] до моделювання НДС плит на жорсткій основі в залежності від фізико-геометричних характеристик плит.

**У лінійно-пружній постановці** розглядається деформування прямокутної багатошарової плити, яка опирається на жорстку основу. Шари плити – ізотропні та трансверсально-ізотропні, довільної, але сталої товщини. Замість реальної конструкції

багатошарової плити (рис. 1, а) пропонується розглядати розрахункову схему плити, яка утворена симетричною дубовою відносно поверхні контакту даної плити з основою. Плита буде у цьому випадку двосторонньо симетрично навантаженою відносно серединної поверхні плити, а товщина плити збільшиться вдвоє  $H = 2b_n$  (рис. 1, б). При цьому, контакт плити з основою відповідає умовам проковзування без тертя (рис. 1, б). Жорсткий контакт плити з основою пропонується моделювати введенням додаткової абсолютно жорсткою тонкого прошарку  $h_0$  (рис. 1, в).

Між шарами плити виконуються умови жорсткого контакту без проковзування, проте вводячи тонкі прошарки малої відносної жорсткості можна без змін у постановці задачі розглядати і інші умови міжшарового контакту.

Запропонований підхід дозволяє оптимізувати розглянуту в [4] уточнену модель НДС плити, яка складалася з двох якісно відмінних НДС – згинового і беззгинового. Згинова складова НДС зникає, оскільки НДС в симетричній за структурою плиті при двосторонньому симетричному навантаженні повністю описується беззгиновим НДС. Як наслідок, кількість невідомих функцій і, відповідно, порядок диференціювання розрахункової системи рівнянь в задачі істотно зменшується.

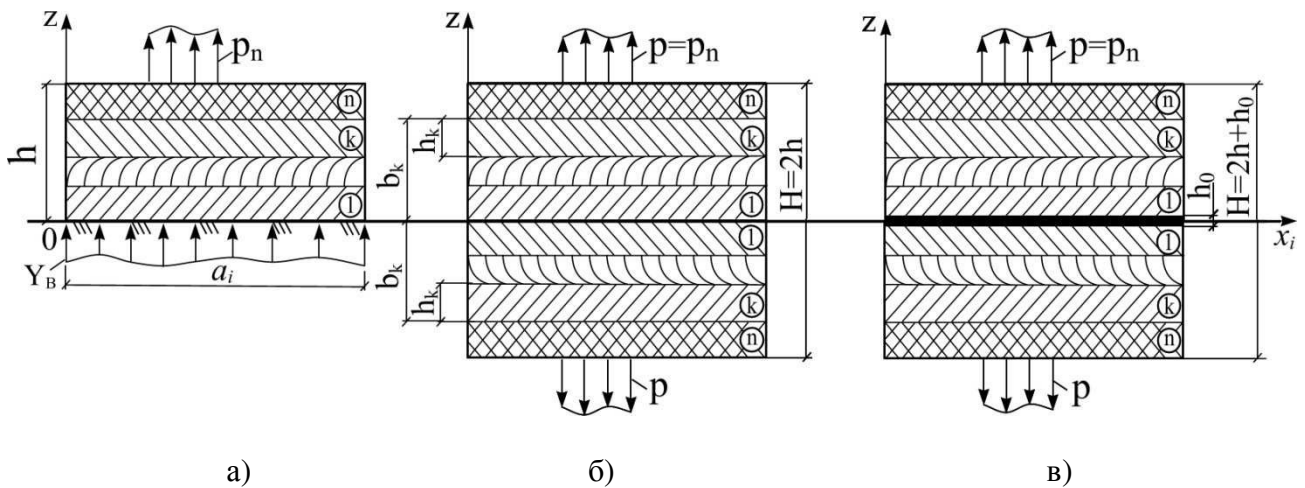


Рис. 1. Варіанти оптимізації розрахункової схеми плити

В континуальній моделі [5] компоненти вектора нормальних  $u_3^{(k)}$  та тангенціальних  $u_i^{(k)}$  зміщень до координатної поверхні  $x_1 x_2$  (рис. 1) представлені сумами добутків гіпотетично заданих степеневих функцій  $\psi_t^{(k)}$ ,  $\psi_{ir}^{(k)}$  поперечної координати  $z$  та шуканих функцій  $\gamma_t$ ,  $\beta_{ir}$  і  $v_i$  координатної поверхні  $x_1 x_2$ :

$$u_3^{(k)} = \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t + \psi_{33,3}^{(k)}(z)p; \quad t = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, 2};$$

$$u_i^{(k)} = v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{33}^{(k)}(z)p_{,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}; \quad r = \overline{1, 4}, \quad (1)$$

де дві функції  $\gamma_t$  моделюють вплив поперечного обтиснення, а вісім функцій  $\beta_{ir}$  – вплив поперечного зсуву в четвертому наближенні по кожній змінній  $x_i$ ,  $p$  – функція заданого навантаження. Тут і надалі диференціювання по  $x_\alpha$  позначено нижніми індексами після коми, а також виконується підсумовування за нижніми індексами, що повторюються.

Модель (1) зручна в тих задачах, де функція навантаження  $p(x_i)$  не має розривів першого і другого роду і тим самим не суперечить принципу нерозривності переміщень  $u_\alpha^{(k)}$  і принципом диференціювання функцій. В аналітичних методах розрахунку модель (1) дуже

ефективна [5]. Проте в задачах, де функція навантаження має розриви, необхідно замінити  $p(x_i)$  в (1) невідомою функцією обтиснення. Таким чином, далі реалізується також модель у вигляді:

$$\begin{aligned} u_3^{(k)} &= \psi_{3t,3}^{(k)}(z)\gamma_t; & t = \overline{1, 3}; \\ u_i^{(k)} &= v_i - \psi_{3t}^{(k)}(z)\gamma_{t,i} - \psi_{ir}^{(k)}(z)\beta_{ir}. \end{aligned} \quad (2)$$

Шукана функція  $\gamma_3(x_i)$  – гладка і відповідає умовам нерозривності також, як і функції  $v_i, \gamma_1, \gamma_2, \beta_{ir}$ .

Функції  $\psi_{3t}^{(k)}, \psi_{ir}^{(k)}$ , що моделюють розподіл зміщень за координатою  $z$  мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \psi_{3t,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} F_t^{(s)} dz; & \psi_{33,3}^{(k)} &= \int_0^z a_{3333}^{(s)} dz; & t = \overline{1, 2}; & r = \overline{1, 4}; \\ \psi_{ir}^{(k)} &= -\int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{ir}^{(s)} dz; & \psi_l^{(k)} &= \int_0^z \psi_{l,3}^{(s)} dz; & s = \overline{1, k}; & l = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (3)$$

В виразах (3) функції  $F_t^{(k)}(z)$  апроксимують розподіл напруг поперечного обтиснення  $\sigma_{33}$ , а функції  $f_{ir}^{(k)}(z)$  – напруг поперечного зсуву  $\sigma_{i3}$  по висоті плити. Вони мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} f_{i1}^{(k)} &= \Theta_i^{(k)} - \Theta_i^{(n)}(b_n)\varphi_i^{(k)}; & \varphi_i^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(s)} dz / \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(p)} dz; \\ f_{i(\omega+1)}^{(k)} &= \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(s)} \int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{i\omega}^{(k)} dz^2 - \varphi_i^{(k)} \int_{-b_n}^{b_n} A_{iiii}^{(p)} \int_0^z a_{i3i3}^{(s)} f_{i\omega}^{(s)} dz^2; \\ F_t^{(k)} &= \int_{-b_n}^z (f_{1t}^{(s)} + f_{2t}^{(s)}) dz; & k, p = \overline{1, n}; & s = \overline{1, k}; \\ \Theta_i^{(k)} &= \varphi_{3i}^{(k)} + \zeta_{0i(\chi)}\varphi_{4i}^{(k)}; & \varphi_{3i}^{(k)}(z) &= \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(s)} \varphi_0^{(s)} dz; & \omega = \overline{1, 3}; \\ \varphi_{4i}^{(k)}(z) &= \int_{-b_n}^z A_{iiii}^{(s)} \int_{-b_n}^z dz^2; & \varphi_0^{(k)}(z) &= \int_{-b_n}^z \int_{-b_n}^z a_{3333}^{(s)} dz^2, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $f^{(n)}(b_n)$  – значення функції при  $z = b_n$ ;  $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$  та  $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$  – коефіцієнти закону Гука  $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}$  і  $e_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma_{\gamma\delta}$ ; при трансверсальній ізотропії і симетрії шарів  $\Theta_1^{(k)} = \Theta_2^{(k)}$ ,  $f_{1r}^{(k)} = f_{2r}^{(k)}$ ,  $\zeta_{01(\chi)} = \zeta_{02(\chi)} = 0$ .

**Для обґрунтування області** застосування запропонованих моделей в залежності від розмірів плити розглянуто задачу плоскої деформації однорідної ізотропної плити ( $\nu = 0,3$ ) на жорсткій основі під дією синусоїдального навантаження  $p = p_0 \sin(\pi x_1 / a_1)$ . Плита розраховувалась за допомогою чотирьох варіантів запропонованих моделей, які позначені (рис. 2, 3 і табл. 1) відповідно,  $M_1(1,1)$  – оптимізована модель з заданою функцією навантаження (1) в якій утримувалось одна невідома функція поперечного обтиснення  $C_1$ , та одна функція поперечного зсуву  $S_1$ ;  $M_1(2,2)$  – модель (1) з  $C_2, S_2$ ;  $M_2(2,2)$  – оптимізована модель (2) без явної функції навантаження при  $C_2, S_2$ .  $M_3(3,3)$  – загальна модель [4] для схеми на (рис. 1, а) з  $C_3$  та  $S_3$ .

В табл. 1. наведено значення максимальних відносних зміщень  $u_\alpha^\# = u_\alpha^{\max} E / p_0 h$ , та максимальних відносних напруг  $\sigma_{ii}^\# = \sigma_{ii}^{\max} / p_0$ . В дужках показано похибки в порівнянні з тривимірними розв’язками ( $T$ ) для задачі плоскої деформації та для квадратної плити, які тут і далі отримано за методикою [6]. Розподіл похибок показано також на графіках (рис. 2).

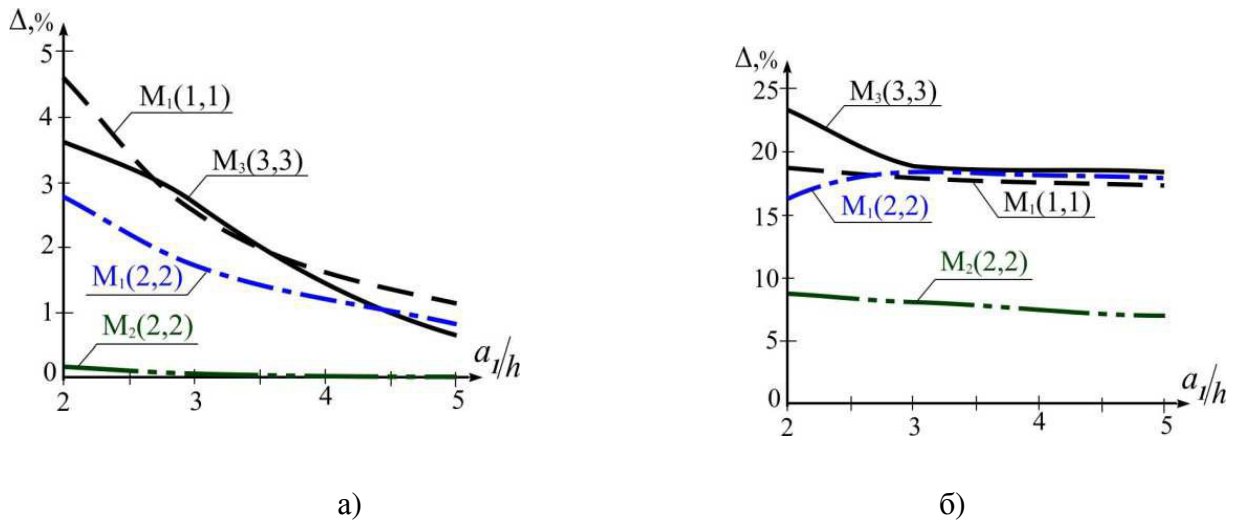


Рис. 2. Розподіл відносних похибок в однорідній ізотропній плиті:  
 а) нормальних зміщень  $u_3^{\#}$ ; б) максимальних напруг  $\sigma_{11}^{\#}$

Таблиця 1

Розрахунок плоскої деформації ізотропної плити на жорсткій основі

	$a_1 = 2h$				$a_1 = 3h$				$a_1 = 5h$					
	$T$	$M_3(3,3)$	$M_1(1,1)$	$M_1(2,2)$	$M_2(2,2)$	$T$	$M_3(3,3)$	$M_1(1,1)$	$M_1(2,2)$	$M_2(2,2)$	$T$	$M_3(3,3)$	$M_1(2,2)$	$M_2(2,2)$
$-10u_3^{\#}$ ( $\Delta, \%$ )	8,35 (3,66)	8,66 (4,58)	8,74 (2,86)	8,59 (0,1)	8,34 (0)	8,90 (2,76)	9,15 (2,58)	9,13 (1,73)	9,06 (0)	8,90 (0)	9,07 (0,7)	9,13 (0,8)	9,14 (0)	9,07 (0)
$-10\sigma_{11}^{\#}$ ( $\Delta, \%$ )	5,72 (23,2)	7,05 (17,4)	6,75 (16,3)	6,65 (8,3)	6,20 (8,3)	3,13 (18,1)	3,70 (16,7)	3,65 (17,5)	3,68 (7,8)	3,37 (7,8)	1,25 (19)	1,49 (18)	1,48 (18)	1,34 (7,4)
$-10\sigma_2^{\#}$ ( $\Delta, \%$ )	4,72 (33,9)	6,32 (6,25)	5,02 (24,0)	5,85 (2,9)	4,86 (2,9)	3,94 (16,3)	4,58 (3,95)	4,10 (16,1)	4,58 (1,8)	4,01 (1,8)	3,37 (7,9)	3,64 (3,8)	3,63 (1,0)	3,40 (1,0)
$-10u_1^{\#}$ ( $\Delta, \%$ )	3,40 (0,19)	3,39 (1,7)	3,34 (0,6)	3,42 (0,7)	3,43 (0,7)	4,79 (1,0)	4,84 (0,7)	4,82 (0,9)	4,83 (0,2)	4,80 (0,2)	7,03 (0,5)	7,07 (0,6)	7,08 (0,6)	7,04 (0,1)

Як видно з результатів розрахунку для ізотропної плити (табл. 1, рис. 2) похибки в розрахунках зменшуються із зменшенням відносної товщини  $h/a_1$ . Потрібно зауважити, що для оптимізованої схеми плити товщина плити в розрахунковій схемі збільшується вдвоє. Для максимальних напруг збіжність моделей дещо гірша, ніж для зміщень (рис. 2). Найкращі результати для ізотропної плити отримані за оптимізованою моделлю (2) з невідомою функцією навантаження  $M_2(2,2)$ , яка дозволяє розраховувати суттєво товсті плити, майже масиви.

Для обґрунтування області застосування запропонованих моделей в залежності від фізичних параметрів досліджується вплив співвідношень пружних характеристик плити на точність моделей (рис. 3).

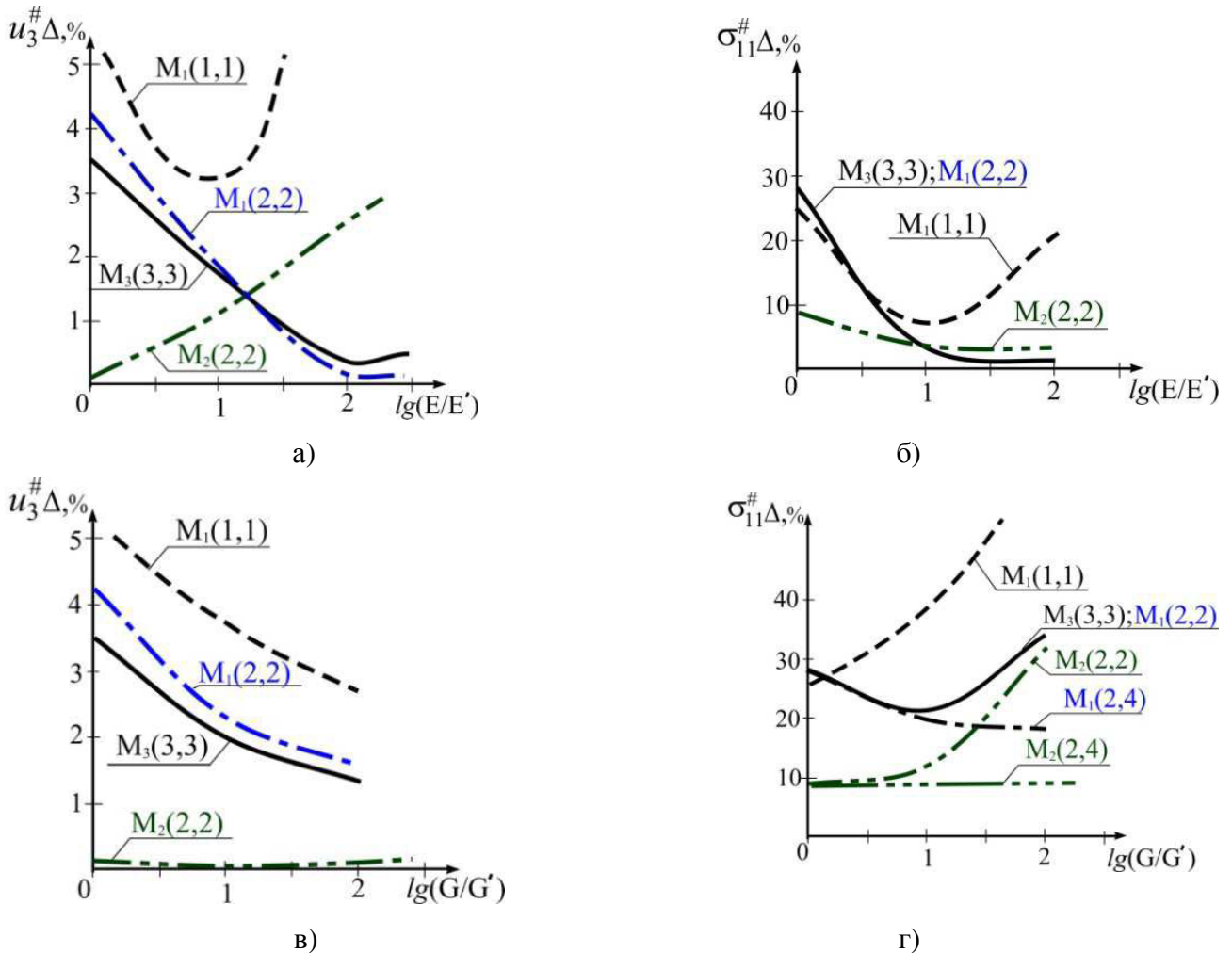


Рис. 3. Розподіл відносних похибок в однорідній трансформній плиті:  
а), в) для нормальних зміщень  $u_3^{\#}$ ; б), г) для максимальних напруг  $\sigma_{11}^{\#}$

Таблиця 2

Порівняння максимальних зміщень  $u_3^{\#}$  та максимальних напруг  $\sigma_{11}^{\#}$  в квадратній плиті з тривимірним розв'язком

Модель	$B1 = 0; B2 = 0$		$B1 = 1; B2 = 0$		$B1 = 2; B2 = 0$		$B1 = 0; B2 = 2$	
	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$	$u_3^{\#}$	$\sigma_{11}^{\#}$
$M_1(1,1)$ ( $\Delta, \%$ )	0,906 (6,95)	0,629 (27,2)	6,406 (3,12)	2,245 (6,5)	35,97 (15)	8,40 (22,4)	0,933 (2,73)	0,390 (90)
$M_1(2,2)$ ( $\Delta, \%$ )	0,883 (4,2)	0,631 (27,5)	6,327 (1,85)	2,190 (3,9)	31,43 (0,74)	6,898 (0,52)	0,922 (1,57)	0,289 (41,2)
$M_2(2,2)$ ( $\Delta, \%$ )	0,847 (0,08)	0,540 (9,1)	6,279 (1,08)	2,183 (3,55)	30,40 (2,5)	7,069 (3,0)	0,907 (0,07)	0,270 (32)
$M_3(3,3)$ ( $\Delta, \%$ )	0,877 (3,5)	0,635 (28,4)	6,320 (1,74)	2,189 (3,89)	31,37 (0,54)	6,885 (0,34)	0,920 (1,3)	0,274 (34)
$T$	0,848	0,495	6,212	2,108	31,98	6,862	0,908	0,205

Аналізувались розв'язки для квадратної плити на жорсткій основі з крайовими умовами Нав'є під дією синусоїдального навантаження при ковзкому контакті (рис. 3, табл. 2). Матеріал плити трансверсально-ізотропний з  $\nu = 0,3$ ;  $\nu'' = 0,1$ ;  $\nu''/E = \nu'/E'$ ;  $a = 3h$  ( $a = 1,5H$ ). Модулі пружності та зсуву в площині ізотропії  $E, G$ , а в перпендикулярному напрямку –  $E', G'$

В таблиці 2 введено позначення:  $\lg(E/E') = B1$ ,  $\lg(G/G') = B2$  і для трансверсальної ізотропії виконується співвідношення  $\nu''/E = \nu'/E'$  при  $\nu'' = 0,1$ . Приймалось  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,3$  для  $B1 = 0$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,01$  для  $B1 = 1$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu' = 0,001$  для  $B1 = 2$ .

Наближені розв'язки порівнювались з тривимірними розв'язками ( $T$ ). Показано, що в суттєво товстих квадратних плитах, наприклад з  $a/H = 1,25$  (табл. 2), при зростанні  $G/G'$  необхідно збільшувати кількість функцій поперечного зсуву: при  $G/G' < 100$  необхідно дві функції зсуву  $S_{ri} = 2$  у кожному з ортогональних напрямків  $x_i$ ; при  $100 \leq G/G' \leq 500$  –  $S_{ri} = 3 \div 4$ . При зростанні співвідношення  $E/E'$  необхідне збільшення кількості функцій поперечного обтиснення  $C_i$ : при  $E/E' \leq 10$  достатньо використання одної функції  $C_i = 1$ , при  $10 \leq E/E' \leq 1000$  потрібно дві функції обтиснення  $C_i = 2$ . У плиті з співвідношенням  $a/H = 1,5$  необхідна така ж сама кількість невідомих функцій, тоді як в плиті з  $a/H = 2,5$  є можливість зменшення кількості невідомих функцій. Відмітимо, що похибки для напруг  $\sigma_{11}$  більші, ніж для зміщень  $u_\alpha$  (рис. 3).

Результати за моделлю  $M_2$  мають більшу точність, порівняно з моделями  $M_1$  та  $M_3$ , при однаковій кількості невідомих функцій у моделях.

**Як видно з наведених** результатів розрахунку тестових задач, побудована математична модель дозволяє отримувати результати, що якісно і кількісно наближаються до тривимірних розв'язків. Модель можна застосовувати для розрахунку НДС суттєво товстих плит ( $a/H = 1,5$ ), при широкому діапазоні зміни параметрів відносної трансропії в шарі ( $1 \leq E/E' \leq 500$ ,  $1 \leq G/G' \leq 500$ ) та значних відмінностях в жорсткості окремих шарів ( $E^{(k)}/E^{(k+1)} = 10^3 \div 10^5$ ).

Потрібно відзначити, що результати розрахунків при використанні оптимізованого підходу до формування розрахункової схеми плити з використанням моделей беззгинового НДС ( $M_1, M_2$ ) та за загальною моделлю  $M_3$ , що описує як беззгиновий, так і згиновий НДС в заданій плиті, є досить близькими. Проте оптимізований підхід з моделями  $M_1, M_2$  дозволяє отримувати достовірні результати при меншій кількості шуканих функцій та при меншому загальному порядку диференціювання розрахункової системи рівнянь.

1. Пискунов В. Г. Об одном варианте неклассической теории многослойных пологих оболочек и пластин / В. Г. Пискунов // Прикладная механика. – 1979. – Т. 15, № 11. – С. 76–81.
2. Рассказов А. О. К теории многослойных ортотропных пологих оболочек / А. О. Рассказов // Прикладная механика. – 1976. – Т. 12, № 11. – С. 50–56.
3. Гуртовий А. Г. Высокоточное моделирование деформирования слоистых структур / А. Г. Гуртовий // Механика композитных материалов. – 1999. – Т. 35, № 1. – С. 13–28.
4. Гуртовий О. Г. Задача поперечного деформування трансверсально-ізотропної плити при контакті з абсолютно жорсткою основою / О. Г. Гуртовий, С. О. Тинчук // Зб. наук. праць – Вісник УДУВГП – Рівне : УДУВГП. – 2004. – Випуск 2 (26). – С. 222–229.
5. Гуртовий А. Г. Безызгибная уточненная модель деформирования многослойных плит на недеформируемом основании / А. Г. Гуртовий, С. А. Тинчук // Механика композитных материалов. – 2006. – Т. 42, № 5. – С. 643–654.
6. Пискунов В. Г. Решение задач статики для слоистых ортотропных плит в пространственной постановке / В. Г. Пискунов, В. С. Сипетов, Ш. Ш. Туйметов // Прикладная механика. – 1990. –

Т. 26, № 2. – С. 41–49.

Рецензент: д.т.н., професор Рокочинський А. М. (НУВГП)

**Tynchuk S. O., Candidate of Engineering, Associate Professor** (National University of Water Management and Nature Resources Use, Rivne)

#### **THE ANALYSIS OF ACCURACY OF MODELS FOR THE PROBLEMS DEFORMATION OF MULTILAYERED PLATES ON AN RIGID FOUNDATION**

For research of stress-strain state (SSS) of multilayered thick plates on an rigid foundation are investigated the use of constructed refined models of unflexural SSS. Calculations confirm the efficiency and accuracy of such approach, which allows one to obtain solutions qualitative and quantitatively close to three-dimensional ones.

**Keywords: refined model, multilayered plate, rigid foundation, transverse shear, transverse compression.**

**Тынчук С.А., к.т.н., доцент** (Национальный университет водного хозяйства и природопользования, г. Ровно)

#### **АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛИТ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ**

Для исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) слоистых толстых плит на жестком основании исследовано применение построенных уточненных моделей безызгибного НДС. Расчетами подтверждена эффективность и точность методики моделирования, позволяющей получить решения, которые качественно и количественно близки к трехмерным.

**Ключевые слова: уточненная модель, многослойная плита, жесткое основание, поперечный сдвиг, поперечное обжатие.**