Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування
Кафедра вищої математики

04-02-019

методичні вказівки та завдання

до самостійної роботи із дисципліни вища математика

з розділу

«АЛГЕБРА ТА ГЕОМЕТРІЯ»

(частина ІІ)

для студентів зі спеціальності 113
«**Прикладна математика**»
денної форми навчання

Рекомендовано науково -
методичною комісією зі
спеціальності 113
"Прикладна математика"
протокол № 6 від 05.05.2017 р.

Рівне 2017

Методичні вказівки і завдання до самостійної роботи «Алгебра та геометрія» (частина ІІ) для студентів зі спеціальності 113 «Прикладна математика» денної форми навчання / **Тадеєв П. О., Кушнір В. П., Дейнека О. Ю.** – Рівне: НУВГП, 2017. – 29 с.

Упорядники: **Тадеєв П. О.,** кандидат фізико-математичних наук, доктор педагогічних наук, професор, **Кушнір В. П.,** канд. фіз.-мат. наук; **Дейнека О. Ю.**

Відповідальний за випуск: **Цецик С. П.**, кандидат педагогічних наук, доцент, заступник завідувача кафедри вищої математики.

ЗМІСТ

Вступ

Метою і завданням навчальної дисципліни „ Алгебра та геометрія ” : є оволодіння сучасними методами, теоретичними положеннями та головними застосуваннями абстрактної алгебри та геометрії в різних задачах математики, а також підготовка до їх використання в подальших навчальних курсах, сприяння розвитку логічного та аналітичного мислення студентів.

Для максимального залучення студентів до активної самостійної роботи з даної дисципліни на практичних заняттях, відповідно до робочої програми пропонуються короткі теоретичні відомості разом із задачами. Це дає можливість кожному студентові під керівництвом викладача розв’язувати завдання, які формують його математичний рівень.

§1. Групи. Кільця. Поля

Означення 1. Множина X із заданою на ній бінарною асоціативною операцією називається ***напівгрупою***.

Означення 2. Напівгрупа з одиничним (нейтральним) елементом називається ***моноїдом***.

Означення 3. Моноїд G, всі елементи якого мають обернені, називається ***групою***.

Іншими словами, передбачається, що виконуються наступні аксіоми:

1. На множині G визначена бінарна операція:
$(x, y) \rightarrow x_*y$.

2. Операція асоціативна: $(xy)z = x(yz)$ для всіх $x, y, z \in G$.

3. Для всіх $x \in G$ існує нейтральний елемент e:
$xe = ex = x$.

4. Для кожного елемента $x \in G$ існує обернений x^{-1}:
$x^{-1}{}_*x = x_*x^{-1}=e$.

Означення 4. Групою називається півгрупа, в якій виконуються обернені операції, тобто для будь-яких елементів a і b кожне з рівнянь $ax = b$, $ya = b$ має єдиний розв'язок.

Означення 5. Кількість елементів групи називається її ***порядком***: $|G| = n$.

Означення 6. Група з комутативною операцією називається ***комутативною*** (абелевою).

Означення 7. Мінімальне натуральне число n таке, що $x^n=e$, називається ***порядком елемента*** x: $|x| = n$.

Означення 8. Підмножина $H\subset G$ називається підгрупою групи G, якщо

а) $e\in H$;

б) $h_1, h_2\in H \to h_1 \cdot h_2 \in H$;

в) $h\in H\to h^{-1}\in H$.

Підгрупа $H\in G$ – власна, якщо $H\neq e$: $H\neq G$.

Означення 9. Група G називається ***циклічною групою***, якщо вона складається із степенів одного із своїх елементів a, тобто співпадає з однією із своїх циклічних підгруп $\{a\}$. Елемент a називається в цьому випадку ***твірним елементом*** групи G.

Теорема 1. Переставні елементи a, b будь-якої групи G, що мають взаємно прості порядки s, t, породжують в G циклічну підгрупу порядку st

$$\{a, b\}=\{ab\}.$$

Теорема Лагранжа. В будь-якій скінченій групі G порядок будь-якої підгрупи є дільником порядку самої групи.

Наслідки:

1) Порядок будь-якого елементу скінченої групи є дільником порядку самої групи;

2) Будь-яка скінчена група, порядок якої є просте число, є циклічною.

Означення 10. Відображення f: $G\to G^{\prime}$ групи $(G, *)$ в $(G^{\prime},\circ)$ називається гомоморфізмом, якщо $f(a*b)=f(a)\circ f(b)$, $\forall\ a, b \in G$.

Означення 11. Дві групи G і G^ι з операціями $*$ і $\circ$ називаються ізоморфними, якщо існує відображення $f\colon G \to G^\iota$ таке, що

1. $f(a{*}b)=f(a)\circ f(b)$, для усіх $a,\ b \in G$;
2. f –взаємнооднозначні.

Факт ізоморфізму груп позначається $G \cong G^\iota$.

Простіші властивості ізоморфізму:

1. Одиниця переходить в одиницю;
2. $f(a^{-1})=f(a)^{-1}$;
3. Обернене відображення $f^{-1}\colon\ G \to G^\iota$ (яке існує за означенням) також є ізоморфізмом.

Теорема 2. Усі циклічні групи одного і того ж порядку (в тому числі і нескінченні) ізоморфні.

Теорема Келі. Будь-яка скінчена група порядку n ізоморфна деякій підгрупі симетричної групи S_n.

Якщо в означенні ізоморфізму покласти $G=G^\iota$, ми одержимо ізоморфне відображення $\phi\colon G \to G$ групи G на себе. Воно називається *автоморфізмом групи* G (позначається $\mathrm{Aut}(G)$).

Означення 12. Нехай K – непорожня множина, на якій задані дві бінарні операції + (додавання) та $*$ (множення), які задовольняють наступним умовам:

1) $(K,+)$ – абелева група;

2) $(K, *)$ – напівгрупа;

3) Операція множення пов'язана дистрибутивними законами: відносно операції додавання:

$$(a+b)*c=a*c+b*c, \qquad c*(a+b)=c*a+c*b$$

для всіх a, b, $c \in K$.

Тоді $(K, +, *)$ називається *кільцем*.

Якщо $(K, *)$ – моноїд, то $(K, +, *)$ – *кільце з одиницею*.

Означення 13. Кільце називається *комутативним*, якщо $xy = yx$, для $x, y \in K$.

Означення 14. Кільце, елементами якого є деякі комплексні числа із звичайними операціями додавання і множення, називається *числовим кільцем*.

Означення 15. Підмножина I кільця K називається ідеалом в K, якщо вона замкнута відносно операції множення на елементи кільця.

Ідеал породжений одним елементом називається головним.

Означення 16. Комутативне кільце P називається ***полем***, якщо в ньому є як найменше один елемент, відмінний від нуля і виконується операція ділення, крім ділення на нуль, тобто для $\forall\ a,b \in P$, $a \neq 0$ існує в P елемент q, такий що: $aq = b$. Елемент q називають *часткою* елементів a і b записують $q = \dfrac{b}{a}$.

Отже, P (поле) – це комутативне кільце з одиницею, в якому кожен відмінний від нуля елемент має обернений відносно операції множення. Іншими словами комутативне кільце з одиницею P є полем, коли сукупність його відмінних від нуля елементів утворює абелеву групу відносно операції множення.

Завдання для самостійного розв'язування.

Перевірити, чи:

1) Множина дійсних чисел R з заданою на ній операцією додавання "+" утворює групу (R,+);

2) Множина дійсних чисел без нуля $R \setminus \{0\}$ з заданою на ній операцією множення утворює групу ($R \setminus \{0\}$,$*$);

3) Множина цілих чисел Z з заданою на ній операцією додавання "+" утворює групу (Z,+);

4) Множина дійсних додатних чисел без нуля R^+ з заданою на ній операцією множення утворює групу (R^+,$*$);

5) Множина з двох елементів M={a,b} з операцією, заданою наступним чином: $a * a = b * b = a,\ a * b = b * a = b$;

6) Множина S самосуміщень трикутника утворює групу відносно композиції відображень;

Які з наступних множин утворюють кільце відносно стандартних операцій додавання та множення:

7) $\{a+b\sqrt{6} \mid a,\ b \in \mathrm{Z}\}$;

8) $\{a+b\sqrt{6}+c\sqrt{2} \mid a,\ b,\ c \in \mathrm{Q}\}$;

9) $\{a+b\sqrt{6}+c\sqrt{3}+d\sqrt{2} \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathrm{Q}\}$;

10) $\{a+b\sqrt{3} \mid a,\ b \in \mathrm{Z}\}$;

11) $\{a+b\sqrt[4]{6} \mid a,\ b \in \mathrm{Q}\}$;

12) $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,\ b,\ c \in \mathrm{Q}\}$;

13) $\{a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4} \mid a,\ b,\ c \in \mathrm{Z}\}$?

Які з наступних множин утворюють поле відносно стандартних операцій додавання та множення:

14) $\{a+b\sqrt{6} \mid a,\ b \in \mathrm{Z}\}$;

15) $\{a+bi\sqrt{3} \mid a,\ b \in \mathrm{Z}\}$;

16) $\{a+bi\sqrt{6} \mid a,\ b \in \mathrm{Q}\}$;

17) $\{a+b\sqrt{5} \mid a,\ b \in \mathrm{Q}\}$;

18) $\{a+b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathrm{R}\}$;

19) $\{ai+b\sqrt{5} \mid a,\ b \in \mathrm{Q}\}$;

20) $\{ai+b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathrm{R}\}$?

§2. Лінійний простір

Означення 1. Множина L елементів x, y, z довільної природи називається *дійсним лінійним простором*, якщо справджуються такі три умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам x і y множини L ставиться у відповідність третій елемент z цієї множини, що називається *сумою елементів* x та y і позначається символом $z = x + y$.

II. Існує правило, за допомогою якого будь-якому елементу x множини L і будь-якому дійсному числу λ ставиться у відповідність елемент u цієї множини, що називається *сумою елемента* x на число λ і позначається символом $u = \lambda x$.

III. Вказані два правила підпорядковані таким восьми аксіомам:

1. $x + y = y + x$ (комутативність суми).

2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (асоціативність суми).

3. $\exists 0:\ x + 0 = x$, $\forall x \in L$.

4. $\forall x \in L\ \ \exists x':\ x + x' = 0$.

5. $\forall x \in L\ \ 1 \cdot x = x$.

6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (асоціативність відносно числового співмножника).

7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (дистрибутивність відносно суми чисел).

8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (дистрибутивність відносно суми елементів).

Властивості лінійного простору.

1) у довільному лінійному просторі існує єдиний нульовий елемент і для кожного елемента існує єдиний протилежний.

2) $\forall x \in L\ \ x \cdot 0 = 0$.

3) $\forall x \in L\ \ x' = -1 \cdot x$.

Означення 2. Вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, з яких хоча б одне відмінне від нуля, що лінійна комбінація векторів $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ з цими числами дорівнює нулю, тобто $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$.

Означення 3. Вектори $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n$ називаються *лінійно незалежними*, якщо рівність $\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + ... + \lambda_n\vec{x}_n = \vec{0}$ можлива лише у випадку, коли всі $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ дорівнюють нулю.

Означення 4. Число n, що дорівнює максимальній кількості лінійно незалежних векторів простору L називається *розмірністю простору*.

Означення 5. Сукупність лінійно незалежних векторів простору L, рівних за кількістю розмірності цього простору утворюють його *базис*.

Завдання для самостійного розв'язування.

А. Перевірити, чи є лінійними просторами такі множини:

1) Множина матриць-рядків довжиною n;
2) Множина квадратних матриць n-го порядку;
3) Множина всіх многочлені степеня $\leq n$;
4) Множина всіх многочлені степеня n;
5) Множина всіх многочлені степеня $\geq n$;
6) Множина, що складається тільки з одного елемента x і $x + x = x,\ \lambda x = x$;
7) Всі вектори, кінці яких лежать на заданій прямій;
8) Всі вектори, координати яких задовольняють рівнянню $x + y = 0$;
8) Всі вектори, координати яких задовольняють рівнянню $x + y = a,\ a \neq 0$;
9) Множина $C[a, b]$;
10) Множина $C^1[a, b]$;

11) Множина всіх функцій інтегрованих на $[a, b]$;
12) Множина всіх збіжних послідовностей;
13) Множина всіх розбіжних послідовностей;
14) Множина всіх векторів лінійного простору без виключеного вектора;
15) Множина всіх векторів лінійного простору без виключеної нескінченної кількості векторів;
16) Всі вектори, кінці яких лежать на заданому промені;
17) Всі вектори, кінці яких лежать на заданому відрізку;
18) Всі вектори, кінці яких лежать в заданій опуклій фігурі;
19) Всі вектори, кінці яких лежать в заданій довільній фігурі;
20) Множина, що складається тільки з двох елементів x, y і $x + y \overset{def}{=} xy,\ \lambda x \overset{def}{=} x^{\lambda}$?

В. Показати, що вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ утворюють базис та знайти координати вектора $\vec{x}$ в цьому базисі.

1) $\vec{e}_1 = (1,1,1),\ \vec{e}_2 = (1,2,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\quad \vec{x} = (-1,0,-4)$;
2) $\vec{e}_1 = (1,2,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\quad \vec{x} = (1,0,4)$;
3) $\vec{e}_1 = (-1,2,1),\ \vec{e}_2 = (-1,1,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\quad \vec{x} = (-2,3,3)$;
4) $\vec{e}_1 = (-1,-2,1),\ \vec{e}_2 = (-1,-1,1),\ \vec{e}_3 = (0,0,1),\quad \vec{x} = (-2,3,3)$;
5) $\vec{e}_1 = (0,0,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,1),\ \vec{e}_3 = (1,2,1),\quad \vec{x} = (1,0,4)$;
6) $\vec{e}_1 = (0,0,1),\ \vec{e}_2 = (1,1,1),\ \vec{e}_3 = (1,2,1),\quad \vec{x} = (2,3,7)$;
7) $\vec{e}_1 = (3,2,1),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (1,2,-1),\quad \vec{x} = (2,0,2)$;
8) $\vec{e}_1 = (3,2,1),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (1,2,-1),\quad \vec{x} = (2,5,-2)$;
9) $\vec{e}_1 = (3,2,1),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (1,2,-1),\quad \vec{x} = (6,5,2)$;
10) $\vec{e}_1 = (-3,2,1),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (-1,2,-1),\quad \vec{x} = (-6,5,-2)$;
11) $\vec{e}_1 = (-3,0,0),\ \vec{e}_2 = (1,1,2),\ \vec{e}_3 = (-4,2,-1),\quad \vec{x} = (-12,1,2)$;
12) $\vec{e}_1 = (-4,2,1),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (-1,2,-1),\quad \vec{x} = (-5,4,0)$;
13) $\vec{e}_1 = (-3,2,-1),\ \vec{e}_2 = (0,1,0),\ \vec{e}_3 = (-6,2,-1),\quad \vec{x} = (-9,4,-2)$;

14) $\vec{e}_1 = (-3,2,4)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (-1,2,-1)$, $\quad \vec{x} = (-3,7,4)$;

15) $\vec{e}_1 = (3,-1,4)$, $\vec{e}_2 = (3,1,4)$, $\vec{e}_3 = (0,2,0)$, $\quad \vec{x} = (6,0,8)$;

16) $\vec{e}_1 = (0,0,4)$, $\vec{e}_2 = (3,1,0)$, $\vec{e}_3 = (-1,2,-1)$, $\quad \vec{x} = (2,3,-1)$;

17) $\vec{e}_1 = (-1,3,4)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (-1,2,-1)$, $\quad \vec{x} = (-2,5,3)$;

18) $\vec{e}_1 = (0,0,4)$, $\vec{e}_2 = (3,1,0)$, $\vec{e}_3 = (-5,2,-1)$, $\quad \vec{x} = (3,1,12)$;

19) $\vec{e}_1 = (5,0,0)$, $\vec{e}_2 = (3,1,5)$, $\vec{e}_3 = (-1,2,-1)$, $\quad \vec{x} = (0,7,2)$;

20) $\vec{e}_1 = (4,1,4)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (1,2,-1)$, $\quad \vec{x} = (6,5,2)$.

Перетворення координат вектора

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ – два довільних базиси $n-$ вимірного лінійного простору L^n і вектори $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ виражаються через вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ за допомогою формул:

$$\vec{e}_1' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}_2' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix},$$

....

$$\vec{e}_n' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ \vdots \\ c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця складена з коефіцієнтів цих формул

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

називається *матрицею переходу* від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$. За допомогою матриці C перехід від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ запишеться у вигляді

$$(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)C.$$

Нехай відомо, що в «старому» базисі $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ вектор $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$, а «новому» базисі $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ вектор $\vec{x} = x'_1\vec{e}'_1 + x'_2\vec{e}'_2 + ... + x'_n\vec{e}'_n$. Тоді

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

або

$$X = CX', \text{ де } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійного розв'язування.

Дано як новий базис пов'язаний із старим, Розкласти вектор $\vec{x}$.
За новим базисом.

1) $\vec{e}_1' = (-3,0,0)$, $\vec{e}_2' = (1,1,2)$, $\vec{e}_3' = (-4,2,-1)$, $\vec{x} = (-12,1,2)$;

2) $\vec{e}_1' = (-4,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (-5,4,0)$;

3) $\vec{e}_1' = (-3,2,-1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-6,2,-1)$, $\vec{x} = (-9,4,-2)$;

4) $\vec{e}_1' = (-3,2,4)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (-3,7,4)$;

5) $\vec{e}_1 = (3,-1,4)$, $\vec{e}_2 = (3,1,4)$, $\vec{e}_3 = (0,2,0)$, $\vec{x} = (6,0,8)$;

6) $\vec{e}_1' = (0,0,4)$, $\vec{e}_2' = (3,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (2,3,-1)$;

7) $\vec{e}_1' = (-1,3,4)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (-2,5,3)$;

8) $\vec{e}_1' = (0,0,4)$, $\vec{e}_2' = (3,1,0)$, $\vec{e}_3'' = (-5,2,-1)$, $\vec{x} = (3,1,12)$;

9) $\vec{e}_1' = (5,0,0)$, $\vec{e}_2' = (3,1,5)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (0,7,2)$;

10) $\vec{e}_1' = (4,1,4)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (6,5,2)$;

11) $\vec{e}_1' = (1,1,1)$, $\vec{e}_2' = (1,2,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (-1,0,-4)$;

12) $\vec{e}_1' = (1,2,1)$, $\vec{e}_2' = (1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (1,0,4)$;

13) $\vec{e}_1' = (-1,2,1)$, $\vec{e}_2' = (-1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (-2,3,3)$;

14) $\vec{e}_1' = (-1,-2,1)$, $\vec{e}_2' = (-1,-1,1)$, $\vec{e}_3' = (0,0,1)$, $\vec{x} = (-2,3,3)$;

15) $\vec{e}_1' = (0,0,1)$, $\vec{e}_2' = (1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (1,2,1)$, $\vec{x} = (1,0,4)$;

16) $\vec{e}_1' = (0,0,1)$, $\vec{e}_2' = (1,1,1)$, $\vec{e}_3' = (1,2,1)$, $\vec{x} = (2,3,7)$;

17) $\vec{e}_1' = (3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (2,0,2)$;

18) $\vec{e}_1' = (3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (2,5,-2)$;

19) $\vec{e}_1' = (3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (1,2,-1)$, $\vec{x} = (6,5,2)$;

20) $\vec{e}_1' = (-3,2,1)$, $\vec{e}_2' = (0,1,0)$, $\vec{e}_3' = (-1,2,-1)$, $\vec{x} = (-6,5,-2)$.

Дійсний евклідовий простір

Дійсний лінійний простір L називається *дійсним евклідовим простором* E (або просто евклідовим простором), якщо справджуються такі умови:

I. Існує правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам (векторам) цього простору $\vec{x}$ і $\vec{y}$ ставиться у відповідність дійсне число, що називається *скалярним добутком* цих елементів і позначається символом $(\vec{x},\ \vec{y})$.

II. Вказане правило підпорядковане таким чотирьом аксіомам:

1. $(\vec{x},\ \vec{y}) = (\vec{y},\ \vec{x})$.

2. $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2,\ \vec{y}) = (\vec{x}_1,\ \vec{y}) + (\vec{x}_2,\ \vec{y})$.

3. $(\lambda\vec{x},\ \vec{y}) = \lambda(\vec{x},\ \vec{y})$.

4. $(\vec{x},\ \vec{x}) > 0$, якщо $\vec{x} \neq 0$, $(\vec{x},\ \vec{x}) = 0$. якщо $\vec{x} = 0$.

Приклад 1. У n-вимірному лінійному просторі L_n матриць-рядків довжини n скалярний добуток двох будь-яких векторів $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ і $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$ може бути значеним, наприклад за допомогою рівності

$$(\vec{x},\ \vec{y}) = x_1 y_1 + ... + x_n y_n .$$

Приклад 1. У нескінченновимірному лінійному просторі $C[a,\ b]$ скалярний добуток двох будь-яких функцій $x(t)$ і $y(t)$ можна означити, як інтеграл від їх добутку:

$$(\vec{x},\ \vec{y}) = \int_a^b x(t)y(t)dt .$$

Означення. Довжиною вектора $x \in E$ називається величина $|\,\vec{x}\,| = \sqrt{(\vec{x},\ \vec{x})}$.

Так, в евклідовому просторі E_n $|\,\vec{x}\,| = \sqrt{{x_1}^2 + ... + {x_n}^2}$.

Теорема. Для будь-яких двох векторів $\vec{x}$ і $\vec{y}$ в довільному евклідовому просторі E справедлива нерівність Коші-Буняковського

$$(\vec{x},\ \vec{y})^2 \leq (\vec{x},\ \vec{x})(\vec{y},\ \vec{y}) = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 .$$

Наприклад, в евклідовому просторі E_n ця нерівність має вигляд

$$(x_1 y_1 + ... + x_n y_n)^2 \le (x_1{}^2 + ... + x_n{}^2)(y_1{}^2 + ... + y_n{}^2)$$

а в евклідовому просторі $C[a, b]$ –

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt \right)^2 \le \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt \, .$$

Кутом φ між двома ненульовими векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$ в евклідовому просторі E називається той кут ($0 < \varphi < \pi$), косинус якого визначається співвідношенням

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{|\vec{x}||\vec{y}|} = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\sqrt{(\vec{x}, \vec{x})(\vec{y}, \vec{y})}} \, .$$

Ортонормований базис

Означення 1. Вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ n-вимірного евклідового простору E_n утворюють ортонормований базис цього простору, якщо ці вектори попарно ортогональні і модуль кожного із них дорівнює одиниці. тобто, якщо

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \left[\begin{array}{l} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \ne j, \ (i, \ j = \overline{1, n}). \end{array} \right.$$

Теорема. У кожному n-вимірному евклідовому просторі E_n існує ортонормований базис.

Алгоритм побудови за даною системою базисних векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ ортогонального базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ (*процес ортогоналізації*), має наступний вигляд:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|};$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \text{ де } \vec{b}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{a}_2, \vec{e}_1)\vec{e}_1;$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|}, \text{ де } \vec{b}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{a}_3, \vec{e}_2)\vec{e}_2 - (\vec{a}_3, \vec{e}_1)\vec{e}_1;$$

....

$$\vec{e}_n = \frac{\vec{b}_n}{|\vec{b}_n|}, \text{ де } \vec{b}_n = \vec{a}_n - (\vec{a}_n, \vec{e}_{n-1})\vec{e}_{n-1} - ... - (\vec{a}_n, \vec{e}_1)\vec{e}_1.$$

Якщо, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ та $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ два ортонормовані базиси в E_n і

$$\vec{e}'_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\vec{e}'_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{pmatrix},$$

....

$$\vec{e}_n' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{1n} \\ p_{2n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто, перехід від базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до базису $\vec{e}_1', \vec{e}_2', ..., \vec{e}_n'$ задається матрицею

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2. Квадратна матриця A називається *ортогональною*, якщо вона невироджена і $A^{-1} = A^T$.

Теорема 2. Квадратна матриця P порядку n є ортогональною тоді і тільки тоді, коли вона здійснює перехід від одного ортонормованого базису до іншого ортонормованого базису.

Завдання для самостійного розв'язування.

Використовуючи процес ортогоналізації із заданих векторів побудувати ортонормований базис.

1) $\vec{a}_1 = (5,0,0), \vec{a}_2 = (3,0,4), \vec{a}_3 = (-1,2,-2)$;

2) $\vec{a}_1 = (2,0,0), \vec{a}_2 = (-3,0,4), \vec{a}_3 = (1,2,-2)$;

3) $\vec{a}_1 = (1,0,0), \vec{a}_2 = (-3,0,-4), \vec{a}_3 = (1,-2,-2)$;

4) $\vec{a}_1 = (2,0,0), \vec{a}_2 = (-3,0,4), \vec{a}_3 = (2,4,-4)$;

5) $\vec{a}_1 = (0,1,0), \vec{a}_2 = (-3,0,-4), \vec{a}_3 = (2,4,4)$;

6) $\vec{a}_1 = (0,3,0), \vec{a}_2 = (0,3,-4), \vec{a}_3 = (-2,4,4)$

7) $\vec{a}_1 = (0,6,0), \vec{a}_2 = (0,-3,-4), \vec{a}_3 = (-2,-4,4)$;

8) $\vec{a}_1 = (0,4,0), \vec{a}_2 = (0,3,4), \vec{a}_3 = (-2,4,-4)$;

9) $\vec{a}_1 = (0,5,0), \vec{a}_2 = (4,3,0), \vec{a}_3 = (2,-4,4)$;

10) $\vec{a}_1 = (0,5,0),\ \vec{a}_2 = (-4,3,0),\ \vec{a}_3 = (2,3,6)$;

11) $\vec{a}_1 = (0,3,0),\ \vec{a}_2 = (5,12,0),\ \vec{a}_3 = (2,4,4)$;

12) $\vec{a}_1 = (0,5,0),\ \vec{a}_2 = (-5,12,0),\ \vec{a}_3 = (2,6,3)$;

13) $\vec{a}_1 = (0,-3,0),\ \vec{a}_2 = (5,0,12),\ \vec{a}_3 = (-2,4,4)$;

14) $\vec{a}_1 = (0,0,2),\ \vec{a}_2 = (5,0,-12),\ \vec{a}_3 = (6,2,3)$;

15) $\vec{a}_1 = (0,0,-2),\ \vec{a}_2 = (-5,0,-12),\ \vec{a}_3 = (6,2,3)$;

16) $\vec{a}_1 = (0,0,-3),\ \vec{a}_2 = (15,0,8),\ \vec{a}_3 = (-6,2,3)$;

17) $\vec{a}_1 = (0,0,3),\ \vec{a}_2 = (0,15,8),\ \vec{a}_3 = (-6,-2,3)$;

18) $\vec{a}_1 = (4,0,0),\ \vec{a}_2 = (0,6,8),\ \vec{a}_3 = (-6,-2,-3)$;

19) $\vec{a}_1 = (4,0,3),\ \vec{a}_2 = (0,6,0),\ \vec{a}_3 = (6,-2,-3)$;

20) $\vec{a}_1 = (-4,0,3),\ \vec{a}_2 = (2,0,0),\ \vec{a}_3 = (6,-2,3)$.

Взаємні базиси в E_n. Коваріантні та контрваріантні координати вектора

Нехай $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – довільний базис E_n.

Теорема 1. Сукупність векторів $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$ в E_n, означених рівностями

$$(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,j}) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j, \quad (i,\ j = \overline{1, n}) \end{cases}$$

утворюють базис у E_n і визначаються однозначно по відношенню до векторів $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$.

Означення 1. Базиси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ і $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, ..., \vec{e}^{\,n}$ називаються *взаємними.*

Нехай $\vec{x}$ – довільний вектор в E_n. Тоді, очевидно, що $\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ... + x^n\vec{e}_n = x_1\vec{e}^{\,1} + x_2\vec{e}^{\,2} + ... + x_n\vec{e}^{\,n}$.

Означення 2. Координати $x^1, x^2, ..., x^n$ вектора $\vec{x}$ в початковому базисі називаються *контраваріантними координатами* $\vec{x}$, а координати $x_1, x_2, ..., x_n$ того самого вектора у взаємному базисі $\vec{e}^1, \vec{e}^2, ..., \vec{e}^n$ *коваріантними координатами* $\vec{x}$.

Зауваження. У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – ортонормований базис $x_i = x^i$, $\vec{e}_i = \vec{e}^i$ $(i = \overline{1, n})$.

Означення 3. Матриця $G = \|g_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, де $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$, називається *метричною матрицею* в E_n, а її коефіцієнти g_{ij} – *метричними коефіцієнтами* базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ в E_n.

Теорема 2. Матриця $G^* = \|g^{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n}$, де $g^{ij} = (\vec{e}^i, \vec{e}^j)$ є оберненою до матриці G, тобто $G^* = G^{-1}$.

Зауваження. Коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ – ортонормований базис G є одиничною матрицею.

Теорема 3. Коваріантні і контрваріантні координати вектора $\vec{x}$ пов'язані рівностями:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (x^1, x^2, ..., x^n)G, \; (x^1, x^2, ..., x^n) = (x_1, x_2, ..., x_n)G^{-1}$$

Припустимо, що в E_n поряд з базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ взято новий базис $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$, зокрема формула переходу від $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ до $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n$ має вигляд

$$(\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, ..., \dot{\vec{e}}_n) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)C,$$

де

$$C=\begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_n^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & \dots & c_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_1^n & c_2^n & \dots & c_n^n \end{pmatrix},$$

тоді, справедливе твердження.

Теорема 4. Якщо $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \dots, \dot{\vec{e}}_n$ – базис, взаємний до $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \dots, \vec{e}^{\,n}$, то

$$(\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \dots, \dot{\vec{e}}_n) = (\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \dots, \vec{e}^{\,n})\left(C^{-1}\right)^T.$$

Теорема 5. Якщо $\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n$ – контраваріантні, а $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$ – коваріантні координати вектора $\vec{x}$ базисі $\dot{\vec{e}}_1, \dot{\vec{e}}_2, \dots, \dot{\vec{e}}_n$, то

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)C,$$

$$(\dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n) = (x^1, x^2, \dots, x^n)\left(C^{-1}\right)^T.$$

Зауваження. У випадку, коли $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ – ортонормований базис, а C – ортогональне перетворення, то $C=\left(C^{-1}\right)^T$.

§3. Тензори

Означення тензора

Для скорочення запису використовуємо правило Ейнштейна $x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i = x^i e_i$ зміст, якого полягає в тому, що під індексом, який зустрічається двічі (один раз зверху а інший раз знизу) розуміють сумування.

Означення. *Тензором A рангу* $k\,(k \in \mathbf{N})$ типу (p, q) в E_m $(p + q = k,\quad p \ge 0, q \ge 0)$ називаєсья геометричний об'єкт, який в кожному базисі $\boldsymbol{e}$ визначається заданням n^k чисел $a_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q}$, що називются коорднатами тензора A та змінюються у разі переходу до нового базису $\dot{\boldsymbol{e}}$ за формулами

$$\dot{a}_{i_1 \ldots i_p}^{j_1 \ldots j_q} = a_{k_1 \ldots k_p}^{l_1 \ldots l_q} c_{i_1}^{k_1} \ldots c_{i_q}^{k_p} d_{l_1}^{j_1} \ldots d_{l_p}^{j_q}.$$

Тензори класифікуються за їхніми рангами і будовою. Розрізняють тензори нульового, першого, другого тощо рангів. Ранг тензора визначається відповідно до формул перетворення і за кількістю компонентів тензора.

Рангом тензора є число, що показує вимір членів у формулах перетворення, щодо коефіцієнтів перетворення базисних векторів. Або ранг тензора дорівнює кількості індексів у його компонентах.

Наприклад, скалярні величини, являють собою тензори нульового рангу, вектори – тензори першого рангу.

За своєю будовою компоненти тензорів поділяються на контраваріантні, коваріантні і змішані. Таким чином, будова тензора характеризує кількість контраваріантних і коваріантних індексів у відповідних виразах. Тензор рангу k типу (p,q) зазвичай називають p разів коваріантним та q разів контраваріантним. Тому надалі індекс, що вказує на ранг тензора, будемо опускати.

Тензорна алгебра

Рівність тензорів

Два тензори вважаються рівними тоді і тільки тоді, коли вони однакового типу і мають рівні відповідні координати в деякому базисі.

Множення тензора на скаляр

Добутком тензора A на скаляр λ називається тензор $B = \lambda A$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють добутку компонент тензора А на скаляр λ.

Перестановка індексів

Нехай тензор задано своїми контраваріантними компонентами t^{ij}. Змінюючи місцями індекси, одержуємо новий тензор – t^{ji}, якому відповідає матриця, транспонована відносно матриці тензора, заданого компонентами t^{ij}.

У випадку, якщо t^{ij} є симетричним, то перестановка індексів зводиться до тотожного перетворення і має місце рівність:

$$t^{ij} = t^{ji}.$$

Додавання тензорів

Додавання тензорів можна виконувати тільки для тензорів однакового рангу і будови. Додати кілька тензорів, означає, що необхідно додати їхні однойменні компоненти.

Наприклад, сумою двох тензорів, заданих своїми контраваріантними компонентами r^{ij}, s^{ij}, буде тензор

$$t^{ij} = r^{ij} + s^{ij} = s^{ij} + r^{ij}.$$

Операція додавання тензорів інваріантна, тобто тензор, дорівнює сумі тензорів у деякій системі координат, буде дорівнювати сумі цих тензорів у будь-якій іншій координатній системі. Тензорні властивості t^{ij} очевидні, тому що формули перетворення компонент тензорів лінійні відносно компонент.

Саме ці властивості формул перетворення не дозволяють поширювати дії додавання на тензори різних рангів і будови.

Опускання і підняття індексів

Опускання і підняття індексів у тензорів будь-якого рангу і будови виконується за допомогою метричного тензора.

Нехай, наприклад, маємо тензор, заданий своїми контраваріантними компонентами t^{sk}. За допомогою коваріантних компонент метричного тензора g_{si} контраваріантні компоненти даного тензора перетворяться в змішані:

$$g_{si}t^{sk} = t_{i\cdot}^{\cdot k} .$$

Застосовуючи ще один раз цю ж операцію

$$t_{ij} = g_{si}g_{jk}t^{sk} ,$$

компоненти вихідного тензора перетворяться в коваріантні. Таким чином, ми опустили контраваріантні індекси.

Аналогічно можна по черзі підняти індекси у тензора, що заданий коваріантними компонентами

$$t_{\cdot k}^{i\cdot} = g^{si}t_{sk} ,$$

$$t^{ij} = g^{si}g^{jk}t_{sk} .$$

Добуток тензорів

Операція добутку тензорів поширюється на тензори будь-якого рангу і будови.

Добутком декількох тензорів називається новий тензор з компонентами, рівними добутку компонентів тензорів, що перемножуються, розташованими у визначеному порядку.

Ранг добутку підвищується і дорівнює сумі рангів співмножників, а його будова визначається послідовністю розташування індексів у добутку.

Наприклад, розглянемо добуток тензора другого рангу з компонентами t_{sk} і тензора першого рангу (вектора) з компонентами a^r. Результатами добутку цих тензорів будуть тензори третього рангу:

$$t_{sk\cdot}^{\cdot\cdot r} = t_{sk} a^r ,$$

$$t_{\cdot sk}^{r\cdot\cdot} = a^r t_{sk} .$$

Ці два добутки різні. Вони відрізняються порядком індексів. Тому, тензорний добуток некомутативний.

Згортання тензорів

Операція згортання виконується тільки над тензорами, заданими змішаними компонентами.

Операція згортання над вихідним тензором, заданим змішаними компонентами, полягає в прирівнюванні одного з контраваріантних індексів одному з коваріантних і розглядаються суми по прирівняних індексах.

Отримані суми утворять тензор, який має ранг на дві одиниці менше рангу тензора, що згортається.

Розглянемо тензор, заданий змішаними компонентами $t_{\cdot sk}^{r}$. Виконуючи вимоги згортання, одержимо:

$$q_{k\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\cdot} = t_{\cdot rk}^{r\cdot\cdot} .$$

Завдання для самостійного розв'язування.

Знайти вектор, що утворюється множенням тензора T^{ij} на вектор A_k з наступним згортанням по першому (другому) індексу тензора й індексу вектора в базисі простору E_3, якщо

1) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

2) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\qquad A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

3) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

4) $T^{ij} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

5) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

6) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

7) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

8) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

9) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

10) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & -4 & 8 \\ -3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$;

11) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

12) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

13) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 11 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

14) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

15) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

16) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 8 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A_k = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

17) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 8 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

18) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & -4 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

19) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 7 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

20) $T^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\quad A_k = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Список використаної літератури

1. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. / В. І. Дискант, Л. Р. Береза, О. П. Грижук, Л. М. Захаренко. – К.: Вища школа, 2001. – 303 с.
2. Кованцов Н. И. Дифференциальная геометрия, топология, тензорный анализ. Сборник задач. / Г. М. Зражевская, В. Г. Кочаровский, В. И. Михайловский. – К.: Вища школа, 1989. – 398 с.
3. Курош А. Г. Курс высшей алгебри. – М.: Физматгиз, 1959. – 432 с.
4. Тадеєв В. О. Комплексні числа та їх застосування в алгебрі та геометрії. (Бібліотечка заочної математичної школи), – Тернопіль: Підручники і посібники, 2003. – 64 с.
5. Фадеев Д. К. Сборник задач по высшей алгебре. / Д. К. Фадеев, И. С. Соминский. – М.: «Наука», 1972. – 304 с.