УДК 539.3

Трач В.М., д.т.н., професор, Хоружий М.М., аспірант
(Національний університет водного господарства та природокористування, м. Рівне)

ПРО ОДНОРІДНИЙ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН СФЕРИЧНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ

Наведені результати досліджень у вигляді аналітичних залежностей для мембранних зусиль однорідного напружено-деформованого стану анізотропних неповних сферичних оболонок, що виготовлені із матеріалу з однією площиною симетрії пружних характеристик узагальненого закону Гука.
Ключові слова: анізотропна оболонка, аналітичний розрахунок, напружено-деформований стан.

Приведенные результаты исследований в виде аналитических зависимостей для мембранных усилий однородного напряженно деформированного состоянию анизотропных неполных сферических оболочек, которые изготовлены из материала с одной плоскостью симметрии упругих характеристик обобщенного закона Гука.
Ключевые слова: анизотропная оболочка, аналитический расчет, напряженно-деформированное состояние.

The results of researches as analytical dependences for membrane efforts of the homogeneous tensely-deformed state of anisotropic incomplete spherical shells which are made from material with one plane of symmetry of resilient descriptions of the generalized law of Guk are shown.
Keywords: anisotropic shell, analytical calculation, tense-deformed state.

Наразі для розрахунків напружено-деформованих станів, стійкості та динамічних параметрів тонкостінних конструкцій найбільш широко використовуються чисельні методи. Однак, при цьому виникає проблема оцінки достовірності отриманих результатів. Очевидно, що для цього еталонними даними можуть служити точні тривимірні або наближені аналітичні розрахунки оболонкових систем. Їх отримання складає важливу та актуальну проблему, що пов’язана з значними математичними складнощами. Але якщо такі результати можливо здобути, то це дозволяє оцінити достовірність чисельних розрахунків і тим самим зекономити час на їх знаходження. У роботах [1, 2, 7] приведені розрахунки напружено-деформованих станів, стійкості сферичних оболонок, а в [3, 4] дані результати таких розрахунків для оболонок, що виготовлені з ізотропного та ортотропного матеріалів. Їх особливість полягає у тому, що деформовані стани таких оболонок є безмоментними або ж однорідними [4,5].

В цій роботі приведено наближений аналітичний розрахунок, неповної з вирізом у полюсі, тонкої одношарової сферичної анізотропної оболонки. Тонкостінна конструкція має безперервну плавно змінну поверхню, завантажена симетричним рівномірно розподіленим навантаженням, а умови закріплення торців такі, що краї оболонки біля них мають можливість вільно переміщуватись в напрямку нормалі. Це дозволяє здійснювати їх розрахунок за наближеною безмоментною теорією при використанні гіпотез Кірхгофа – Лява. Матеріал, з якого виготовлена оболонка, моделюється так, що симетрія пружних характеристик узагальненого закону Гука пов'язана з однією площиною, яка є паралельною до серединної поверхні [6].

Згідно з [4] для довільно завантаженої анізотропної оболонки обертання, що знаходиться у циліндричній системі координат, маємо такі рівняння рівноваги:

$$\frac{\partial T_1}{\partial s}+(T_1+T_2)\frac{sin\gamma}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial\varphi}=-X, \tag{1}$$

$$\frac{\partial T_{12}}{\partial s}-2T_{12}\frac{\sin\gamma}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial\varphi}=-Y, \tag{2}$$

$$\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}=Z, \tag{3}$$

де T_1, T_2 і T_{12} – відповідно меридіональні, колові та зсувні погонні зусилля, X,Y,Z – зовнішні навантаження оболонки, віднесені до одиниці площі серединної поверхні, що діють відповідно вздовж меридіана, паралелі та нормалі до неї.

Для таких оболонок співвідношення для деформацій мають вигляд:

$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{w}{R_1}, \tag{4}$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{r}\frac{\partial\upsilon}{\partial\varphi}-\frac{\sin\gamma}{r}u+\frac{w}{R_2}, \tag{5}$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{\partial\upsilon}{\partial s}+\frac{\sin\gamma}{r}\upsilon, \tag{6}$$

де $\varepsilon_i, i=1,2,\varepsilon_{12}$ – відповідно лінійні та кутова деформації; u,υ,w – відповідно меридіональні, колові та нормальні переміщення довільної точки серединної поверхні оболонки.

Співвідношення пружності для безмоментної анізотропної оболонки такі:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{h}(a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + a_{16}T_{12}), \tag{7}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{h}(a_{12}T_1 + a_{22}T_2 + a_{26}T_{12}), \tag{8}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{h}(a_{16}T_1 + a_{26}T_2 + a_{66}T_{12}), \tag{9}$$

де $a_{ij}, i, j = 1,2,6$ – пружні сталі узагальненого закону Гука.

Для встановлення напруженого стану оболонки скористаємось методикою представленою в [3]. Виразимо в рівнянні (3) зусилля T_1 через T_2 та після його підстановки в (1) і (2) отримаємо такі вирази для мембранних зусиль:

$$T_1 = -\frac{1}{R_2 \cos^2 \gamma}\left(\int_{s_0}^{s} rq \sin \gamma ds - T_1^{\circ}\right), \tag{10}$$

$$T_2 = \frac{1}{R_1 \cos^2 \gamma}\left(\int_{s_0}^{s} rq \sin \gamma ds + qR - T_1^{\circ}\right), \tag{11}$$

$$T_{12} = -\frac{T_{12}^{\circ}}{R_2^2 \cos^2 \gamma}, \tag{12}$$

де T_1°, T_{12}° – сталі інтегрування, що визначаються із граничних умов на торцях оболонки.

Розглядатимемо симетрично завантажену $X = Y = 0$, $Z = q = const$ неповну анізотропну сферичну оболонку з малим отвором радіуса r_o [7] у полюсі (рисунок).

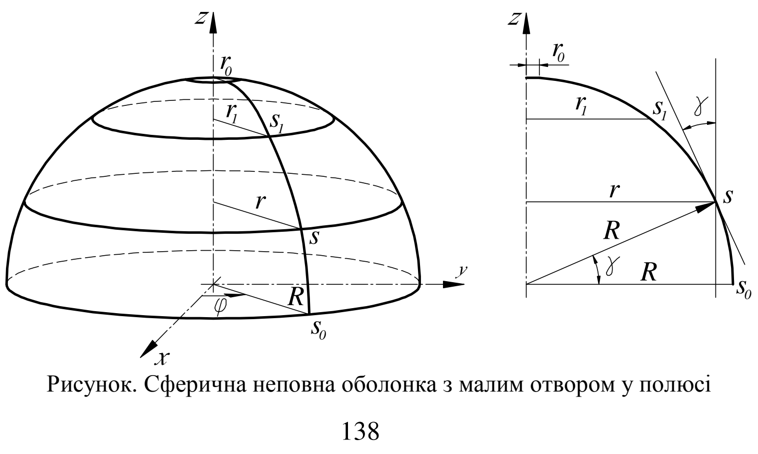

Рисунок. Сферична неповна оболонка з малим отвором у полюсі

З геометрії такої оболонки (рисунок) витікає, що

$$R_1 = R_2 = R\,,\ r = R\cos\gamma\,,\ \frac{\partial r}{\partial s} = \sin\gamma\,,\ \gamma = \frac{s}{R}\,, \tag{13}$$

де R – радіус серединної поверхні оболонки, r – відстань від довільної точки серединної поверхні до осі обертання z, γ – кут між дотичною до меридіана і віссю обертання.

Граничні умови закріплення торців оболонки

$$\text{при}\quad s = s_0,\quad u = 0, \upsilon = 0\,, \tag{14}$$
$$\text{при}\quad s = L,\quad u = 0, \upsilon = 0\,,$$

де L – довжина меридіана оболонки.

При урахуванні залежностей (13) та після інтегрування виразів (10)-(11) за меридіональною координатою s сферичної оболонки, отримаємо розв'язок для мембранних зусиль:

$$T_1 = \frac{qR}{2} + \frac{\overset{\circ}{T_1}}{R\cos^2\frac{s}{R}},\ T_2 = \frac{qR}{2} - \frac{\overset{\circ}{T_1}}{R\cos^2\frac{s}{R}},\ T_{12} = \frac{\overset{\circ}{T_{12}}}{R^2\cos^2\frac{s}{R}}. \tag{15}$$

Для знаходження сталих інтегрування $\overset{\circ}{T_1}, \overset{\circ}{T_{12}}$ скористаємось виразами для переміщень, що отримані зі спільного розв'язку систем (4)-(6) та (7)-(9):

$$u = \frac{\cos\frac{s}{R}}{h}\int_{s_0}^{s}\Big[(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})T_1 + (a_{16} - a_{26})T_{12} +$$
$$+ (a_{12} - a_{22})qR\Big]\frac{ds}{\cos\frac{s}{R}} + u_0\cos\frac{s}{R}, \tag{16}$$

$$\upsilon = \frac{\cos\frac{s}{R}}{h}\int_{s_0}^{s}\big[(a_{16} - a_{26})T_1 + a_{66}T_{12} + a_{26}qR\big]\frac{ds}{\cos\frac{s}{R}} + \upsilon_0 R\cos\frac{s}{R}, \tag{17}$$

де u_0, υ_0 – також сталі інтегрування.

Після підстановки (15) в (16) і (17) та деяких математичних перетворень маємо:

$$u=\frac{\cos\frac{s}{R}}{h}\int_{s_0}^{s}\left[(a_{11}-2a_{12}+a_{22})\frac{qR}{2}+(a_{11}-2a_{12}+a_{22})\frac{T_1^{\circ}}{R\cos^2\frac{s}{R}}+\right.$$

$$\left.+(a_{16}-a_{26})\frac{T_{12}^{\circ}}{R^2\cos^2\frac{s}{R}}+(a_{12}-a_{22})Rq\right]\frac{ds}{\cos\frac{s}{R}}+u_0\cos\frac{s}{R},\quad(18)$$

$$\upsilon=\frac{\cos\frac{s}{R}}{h}\int_{s_0}^{s}\left[(a_{16}-a_{26})\frac{qR}{2}+(a_{16}-a_{26})\frac{T_1^{\circ}}{R\cos^2\frac{s}{R}}+\right.$$

$$\left.+a_{66}\frac{T_{12}^{\circ}}{R^2\cos^2\frac{s}{R}}+a_{26}qR\right]\frac{ds}{\cos\frac{s}{R}}+\upsilon_0 R\cos\frac{s}{R}.\qquad(19)$$

При урахуванні (14) маємо сталі інтегрування для виразів (15):

$$T_1^{\circ}=-\frac{AC-(a_{16}-a_{26})CD}{\Delta},\qquad(20)$$

$$T_{12}^{\circ}=-\frac{(a_{11}-a_{12}-a_{22})BD-(a_{16}-a_{26})AB}{\Delta}.\qquad(21)$$

В (20) і (21) введені такі позначення:

$$A=\frac{qR^2}{2}(a_{11}-a_{22})\,ln\,tg\left(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$B=\left[\frac{sin\frac{s}{R}}{2\,cos^2\frac{s}{R}}+\frac{1}{2}ln\,tg\left(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$C=\frac{1}{R}\left[\frac{sin\frac{s}{R}}{2cos^2\frac{s}{R}}+\frac{1}{2}ln\,tg(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4})\right],$$

$$D=\frac{qR^2}{2}(a_{16}+a_{26})\ln tg(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4}),$$

$$\Delta=(a_{11}-2a_{12}+a_{22})a_{66}-(a_{16}-a_{26})^2. \qquad (22)$$

Після підстановки (20), (21) в (15) вирази для меридіональних, колових та зсувних погонних зусиль приймуть такий вид:

$$T_1=\frac{qR}{2}-\frac{CqR}{2\cos^2\frac{s}{R}}\ln tg(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4})\left[\frac{(a_{11}-a_{22})+(a_{16}-a_{26})(a_{16}+a_{26})}{(a_{11}-2a_{12}+a_{22})a_{66}-(a_{16}-a_{26})^2}\right], \quad (23)$$

$$T_2=\frac{qR}{2}+\frac{CqR}{2\cos^2\frac{s}{R}}\ln tg(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4})\left[\frac{(a_{11}-a_{22})+(a_{16}-a_{26})(a_{16}+a_{26})}{(a_{11}-2a_{12}+a_{22})a_{66}-(a_{16}-a_{26})^2}\right], \quad (24)$$

$$T_{12}=-\frac{Bq}{2\cos^2\frac{s}{R}}\ln tg(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4})\times$$

$$\times\left[\frac{(a_{11}-a_{12}-a_{22})(a_{16}+a_{26})-(a_{16}-a_{26})(a_{11}-a_{22})}{(a_{11}-2a_{12}+a_{22})a_{66}-(a_{16}-a_{26})^2}\right]. \qquad (25)$$

Аналіз залежностей (23)-(25), що описують напружений стан тонкої одношарової сферичної анізотропної оболонки, дозволяє стверджувати. В таких оболонках, навіть, від дії симетрично прикладеного рівномірно розподіленого навантаження *q,* з'являється зсувне зусилля T_{12} та кінематично еквівалентне йому колове переміщення υ. Тобто тут має місце явище закручування оболонки відносно осі обертання z, при цьому меридіональні лінії оболонки після деформації перетворюються у гвинтові. Характерним також є те, що коли навантаження *q* змінює свій знак, то розглядувана оболонка набуває закручування в протилежному напрямку. Також змінюється і знак колового переміщення υ.

Як відомо, для ортотропного матеріалу пружні сталі узагальненого закону Гука, що описують зсув при стиску (розтягу), $a_{16}=a_{26}=0$. Тоді мембранні зусилля, після підстановки таких характеристик пружності у (23)-(25), приймають такий вигляд:

$$T_1 = \frac{qR}{2} - \frac{CRq}{2\cos^2 \frac{s}{R}} \ln tg(\frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4}) \left[\frac{(a_{11} - a_{22})}{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})a_{66}} \right], \quad (26)$$

$$T_2 = \frac{qR}{2} + \frac{CRq}{2\cos^2 \frac{s}{R}} \ln tg(\frac{s}{2R} + \frac{\pi}{4}) \left[\frac{(a_{11} - a_{22})}{(a_{11} - 2a_{12} + a_{22})a_{66}} \right], \quad (27)$$

$$T_{12} = 0. \quad (28)$$

Для ізотропного матеріалу характерним є наявність двох сталих пружності: модуля Юнга E та коефіцієнта Пуассона ν. З урахуванням цього рівняння (23)-(25) стають такими:

$$T_1 = \frac{qR}{2}, \qquad T_2 = \frac{qR}{2}, \qquad T_{12} = 0. \quad (29)$$

Отримані залежності для мембранних зусиль T_1, T_2 і T_{12} безмоментної ізотропної (29) чи ортотропної (28) оболонки співпадають з такими, що здобуті в роботах [3,4] та логічно витікають з виразів (23)-(25).

1. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ/ Н. В. Валиш вили. – М. : Машиностроение, 1976. – 278 с. **2**. Григоренко Я. М. Теория оболочек переменной жест кости / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с. **3**. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян.– М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 384 с. **4**. Колкунов Н. В. Основы расчета упругих оболочек/ Н. В. Колкунов.– М. : Государственное издательство «Высшая школа», 1963. – 278 с. **5**. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых систем / А. Н. Гузь. – К. : Наук. Думка, 1981. – 275 с. **6**. Лехницкий А. К. Теорию упругости анизотропного тела / А. К. Лехницкий. – М. : Наука, 1977. – 416 с. **7**. Баженов В. А. Нелінійне деформування, стійкість і закритична поведінка анізотропних оболонок: монографія / В. А. Баженов, М. П. Семенюк, В. М. Трач. – К. : Каравела, 2010. – 352 с.

Рецензент: д.т.н., проф. Власюк А.П. (НУВГП)